

1. А р т е м о в и ч О.Д. О конечных нильпотентных группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. К., 1984.
2. А р т е м о в и ч О.Д. Строение конечных сверхразрешимых групп с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. К., 1985.
3. А р т е м о в и ч О.Д. О группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями // Строение групп и свойства их подгрупп. К., 1986.
4. Ч е р н и к о в С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М., 1980.
5. *Robinson D.J.S. A course in the theory of groups. - New York e.a. 1982.*

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517:947

О.Л.Горбачук

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З НОРМАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ НА НЕСКІНЧЕНОСТІ

Розглядаємо еволюційне рівняння $\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0$, $t \in [0, \infty]$, де A - нормальний оператор в банаховому просторі. Задача Коші поставлена рівномірно коректно, якщо початкові дані $y_n(0) = 0$, то розв'язок $y_n(t) \rightarrow 0$ рівномірно по t на кожному скінченному проміжку $[0, T]$ [2], с.58/. Послідовність функцій $y_n(t)$, $t \in [0, \infty]$ має границю в сенсі Чезаро, якщо існує $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y_n(\varepsilon) d\varepsilon$ [3], с.519-523/.

Теорема. Обмежений розв'язок рівномірно коректної задачі Коші рівняння $\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0$, де A - нормальний оператор, має границю при $t \rightarrow \infty$ в сенсі Чезаро.

Доведення. Оскільки задача Коші поставлена рівномірно коректно, то A - генератор півгрупи $u(t)$ класу C_0 [2]. Враховуючи, що A - нормальний оператор, одержуємо представлення $u(t) = \int e^{-\lambda t} dE_\lambda$ [3] і $y(t) = \int e^{-\lambda t} dE_\lambda f$, де $y(0) = f$ і інтегрування відбувається по комплексній площині. Далі потрібна лема.

Лема. Якщо розв'язок $y(t)$ рівняння $\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0$, де A - нормальний оператор, обмежений, то носій спектральної міри $(E_\lambda f, f)$, $f = y(0)$ лежить у правій півплощині $\text{Re} \lambda > 0$ /тобто міра $E_\lambda f, f$ зосереджена в $\text{Re} \lambda > 0$ /.

Доведення. Для того, щоб показати, що міра відкритої лівої півплощини $\text{Re } \lambda < 0$ дорівнює нулю, достатньо встановити, що міра точок $\text{Re } \lambda < -\frac{1}{n}$ — це нуль при довільному n . Справді, з огляду на зчисленну адитивність міри ліва відкрита півплощина одержується як зчислення об'єднання $\{\text{Re } \lambda < -\frac{1}{n}\}$. Зробивши обчислення і врахувавши, що розв'язок за умовою обмежений, одержимо

$$\|y(t)\| = \int_0^t e^{(-2\text{Re } \lambda)t} d(E_\lambda f, f) \leq M, \quad f = y(0).$$

Оскільки підінтегральна функція додатна, то

$$\int_0^t e^{(-2\text{Re } \lambda)t} d(E_\lambda f, f) \leq M$$

Функція $e^{-2\text{Re } \lambda t} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ у кожній точці області $\text{Re } \lambda < -\frac{1}{n}$. Використовуючи лему Фату [1], одержуємо $d(E_\lambda f, f) = 0$. Лема доведена.

При доведенні теореми розглянемо два випадки. У першому нехай $f \in \text{Ker } A$, тобто $Af = 0$ і $E_0 f = f$. Оскільки f — власний вектор, то $e^A f = e^0 f = f$.

Обчислимо границю в сенсі Чезаро

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\varepsilon) d\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-A\varepsilon} f d\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f d\varepsilon = f$$

Розглянемо другий випадок, коли $Af \neq 0$, тобто $E_0 f \neq f$. Звідси випливає, що міра $(E_\lambda f, f)$ неперервна в нулі по λ . Встановимо, що у другому випадку чезарівська границя розв'язку дорівнює нулю. Враховуючи, що міра зосереджена у замкнутій правій площині, одержуємо

$$y(t) = \int_{\text{Re } \lambda \geq 0} e^{\lambda t} dE_\lambda f, \quad t \in [0, \infty).$$

Знаходимо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\varepsilon) d\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_{\text{Re } \lambda \geq 0} e^{-\lambda \varepsilon} dE_\lambda f \right) d\varepsilon.$$

Використовуючи теорему Губіні, записуємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\varepsilon) d\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\text{Re } \lambda \geq 0} \left(\int_0^t e^{-\lambda \varepsilon} d\varepsilon \right) dE_\lambda f =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\text{Re } \lambda \geq 0} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \varepsilon} \right]_0^t dE_\lambda f =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\text{Re } \lambda \geq 0} \left(-\frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda t} \right) dE_\lambda f.$$

Функція $\frac{1}{\lambda t} - \frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ всюди крім точки 0. Враховуючи, що міра (dE, f, f) неперервна при $\lambda = 0$, за лемою Фату одержуємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\text{Re} \lambda \geq 0} \left(\frac{1}{\lambda t} - \frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t} \right) dE, f \rightarrow 0,$$

що завершує доведення теореми.

1. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1979. 2. Крейн С.Г. Линеинные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. 3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.89

УДК 515.12

Б.М.Бокало

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДОТИКАННЯ ТОПОЛОГІЙ І $\mathcal{P}$ -РОЗРІДЖЕНИХ ПРОСТОРІВ

В [1] визначено відношення дотикання топологій, які задані на одній і тій же множині. Це відношення має більш тонку природу, ніж відношення включення топологій. Його можна розглядати як один з виразників фундаментальної інтуїтивної ідеї апроксимації однієї топології іншою. Ми дослідимо поведінку цього відношення при операції добутку просторів, а також встановимо зв'язок між поняттям дотикання топологій і поняттям $\mathcal{P}$ -розрідженості простору. У термінології та позначеннях дотримуємося праці [2]. Усі простори, що розглядаються, вважаються хаусдорфовими.

Нехай $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}'$ - топології на множині X .

Означення 1 [1]. Топологія $\mathcal{T}$ дотикається топології $\mathcal{T}'$, якщо в кожній непорожній множині $Y \subset X$ існує точка y така, що для довільних її околів $U \in \mathcal{T}$ і $U' \in \mathcal{T}'$ існують такі $V \in \mathcal{T}$ і $V' \in \mathcal{T}'$, що $y \in V \cap U \subset V' \cap U$ і $y \in V' \cap U \subset V \cap U$.

Означення 2. Топологія $\mathcal{T}$ сильно дотикається топології $\mathcal{T}'$, якщо для кожної непорожньої множини $Y \subset X$ існує непорожня множина $U \subset Y$, яка належить як $\mathcal{T}/U$, так і $\mathcal{T}'/U$.