Функція $\frac{1}{\lambda t} - \frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t} \to 0$ при $t \to 0$ всюди крім точки 0. Враховуючи, що міра $(dE_\lambda f, f)$ неперервна при $\lambda = 0$, за лемою Фату одержуємо

$$\lim_{t\to\infty} \int_{Re\lambda \geq 0} \left(\frac{1}{\lambda t} - \frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t}\right) dE_\lambda f \to 0,$$

що завершує доведення теореми.

1. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1979. 2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. 3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.89

УДК 515.12

Б.М.Бокало

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДОТИКАННЯ ТОПОЛОГІЙ І $\mathcal{P}$-РОЗРІДЖЕНИХ ПРОСТОРІВ

В [1] визначено відношення дотикання топологій, які задані на одній і тій же множині. Це відношення має більш тонку природу, ніж відношення включення топологій. Його можна розглядати як один з виразників фундаментальної інтуїтивної ідеї апроксимації однієї топології іншою. Ми дослідимо поведінку цього відношення при операції добутку просторів, а також встановимо зв'язок між поняттям дотикання топологій і поняттям $\mathcal{P}$-розрідженості простору. У термінології та позначеннях дотримуємося праці [2]. Усі простори, що розглядаються, вважаються хаусдорфовими.

Нехай $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}'$ – топології на множині X.

Означення 1 [1]. Топологія $\mathcal{T}$ дотикається топології $\mathcal{T}'$, якщо в кожній непорожній множині $Y \subset X$ існує точка y така, що для довільних її околів $U \in \mathcal{T}$ і $U' \in \mathcal{T}'$ існують такі $V \in \mathcal{T}$ і $V' \in \mathcal{T}'$, що $y \in V' \cap Y \subset U \cap Y$ і $y \in V \cap Y \subset U' \cap Y$.

Означення 2. Топологія $\mathcal{T}$ сильно дотикається топології $\mathcal{T}'$, якщо для кожної непорожньої множини $Y \subset X$ існує непорожня множина $U \subset Y$, яка належить як $\mathcal{T}/Y$, так і $\mathcal{T}'/Y$.

Означення 3 [3]. Топологічний простір X називається $\mathcal{P}$-розрідженим, де $\mathcal{P}$ – деяка топологічна властивість, якщо в кожній непорожній замкненій множині $Y \subset X$ існує точка y і такий її окіл O_y в X, що підпростір $\overline{O_y \cap Y}$ має властивість $\mathcal{P}$.

Топологічна властивість $\mathcal{P}$, яка зберігається операцією вільної суми, без обмеження на кількість елементів, домовимось називати адитивною. Скажемо, що властивість $\mathcal{P}$ локально наслідкова по замкнених множинах, якщо для довільного простору X, який має властивість $\mathcal{P}$, кожний замкнений підпростір F простору X локально володіє властивістю $\mathcal{P}$, тобто для кожної точки $x \in F$ існує окіл Ox в X такий, що підпростір $\overline{Ox \cap F}$ має властивість $\mathcal{P}$.

Теорема 1. Регулярні топології $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}'$ на множині X дотикаються тоді і тільки тоді, коли для кожної непорожньої множини $Y \subset X$ існує непорожня множина $V \subset Y$, яка належить як $\mathcal{T}/Y$, так і $\mathcal{T}'/Y$, тобто коли $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}'$ сильно дотикаються.

Теорема 2. Для будь-якого регулярного простору $(X, \mathcal{T})$ і довільної адитивної, локально наслідкової по замкнених множинах, властивості $\mathcal{P}$ рівносильні наступні умови:

а/ на X існує регулярна топологія $\mathcal{T}'$ з властивістю $\mathcal{P}$, яка дотикається топології $\mathcal{T}$;

б/ на X існує регулярна топологія $\mathcal{T}'$ з властивістю $\mathcal{P}$, яка сильно дотикається топології $\mathcal{T}$;

в/ $(X, \mathcal{T})$ – $\mathcal{P}$-розріджений простір.

Нагадаємо, що коли $\mathcal{P}$ – компактність, то $\mathcal{P}$-розріджені простори називаються k-розрідженими, а якщо $\mathcal{P}$ – метризованість, то $\mathcal{P}$-розріджені простори називаються $\mathcal{M}$-розрідженими.

Наслідок 1. Для регулярного простору $(X, \mathcal{T})$ рівносильні наступні умови:

а/ $\mathcal{T}$ дотикається метризованої топології $\mathcal{T}'$;

б/ $(X, \mathcal{T})$ – $\mathcal{M}$-розріджений простір.

Наслідок 2. Для регулярного простору $(X, \mathcal{T})$ рівносильні умови:

а/ топологія $\mathcal{T}$ дотикається локально компактної топології $\mathcal{T}'$;

б/ топологія $\mathcal{T}$ сильно дотикається компактної топології $\mathcal{T}'$;

в/ $(X, \mathcal{T})$ – k -розріджений простір.

Нижче, X і Y – довільні множини, $\mathcal{T}_X$ і $\mathcal{T}'_X$ – топології на X; $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{T}'_Y$ – топології на Y. Через $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ позначимо топологію тихонівського добутку $(X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.

Теорема 3. Нехай $\mathcal{T}_X$ сильно дотикається $\mathcal{T}'_X$. Тоді:

а/ якщо $\mathcal{T}_Y$ дотикається $\mathcal{T}'_Y$, то $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ дотикається $\mathcal{T}'_X \otimes \mathcal{T}'_Y$;

б/ якщо $\mathcal{T}_Y$ сильно дотикається $\mathcal{T}'_Y$, то $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ сильно дотикається $\mathcal{T}'_X \times \mathcal{T}'_Y$.

Теорема 4. Рівносильні наступні умови:

а/ $\mathcal{T}$ сильно дотикається $\mathcal{T}'$;

б/ $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ сильно дотикається $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}'$;

в/ $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ дотикається $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}'$.

Теорема 5. Нехай властивість $\mathcal{P}$ – адитивна, локально наслідкова по замкнених множинах і скінчено мультиплікативна.

Тоді, якщо X і Y – $\mathcal{P}$ -розріджені простори, то і простір $X \times Y$ $\mathcal{P}$ -розріджений.

Теорема 6. Нехай властивість $\mathcal{P}$ – адитивна, локально наслідкова по замкнених множинах, скінчено мультиплікативна та зберігається досконалими відображеннями /у бік образу/.

Тоді, якщо компакт Y є неперервним образом $\mathcal{G}$ -добутку $\mathcal{P}$ -розріджених компактів, то Y – $\mathcal{P}$ -розріджений компакт.

Автор висловлює щиру подяку проф. А.В. Архангельському за керівництво роботою.

1. Архангельский А.В., Бокало Б.М. Общая концепция касания топологий // Бакинская международная топологическая конференция. 1987. С. 19. 2. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986. 3. Чобан М.М., Додон Н.К. Теория $\mathcal{P}$ -разряженных пространств. Кишинев, 1979.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89