УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ПАРЕТО

Випадкова змінна Парето з густиною розподілу ймовірностей

$$p(t;\nu)=\frac{\nu}{(1+t)^{\nu+1}},\quad t>0,\ (\nu>0), \qquad /1/$$

де ν - параметр форми, має ентропію

$$-\int_0^\infty p(t;\nu)\log_2 p(t;\nu)dt=\log_2\frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu},\ (\nu>0) \qquad /2/$$

відбиття

$$\int_0^\infty t^{z-1}p(t;\nu)dt=\Gamma(z)\frac{\Gamma(1-z+\nu)}{\Gamma(\nu)},\ 0<\operatorname{Re} z<1+\nu,\ (\nu>0) \qquad /3/$$

та інтенсивність відмов

$$h(t;\nu)=p(t;\nu)\Big/\int_t^\infty p(x;\nu)dx=\frac{\nu}{1+t},\ t>0,\ (\nu>0). \qquad /4/$$

<u>Максимальність ентропії</u>. Зі всіх абсолютно неперервних розподілів, заданих на додатній частині дійсної осі, що мають однакові перші логарифмічні моменти, для розподілу Парето характерна найбільша ентропія.

Справді, нехай абсолютно неперервна випадкова змінна з густиною $f(t),\ t>0$ має перший логарифмічний момент

$$\int_0^\infty f(t)\ln(1+t)dt=\int_0^\infty p(t;\nu)\ln(1+t)dt=\frac{1}{\nu},\ (\nu>0). \qquad /5/$$

Тоді

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 p(t;\nu)dt=\log_2\frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu},\quad (\nu>0). \qquad /6/$$

Отже, різницю

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt-\log_2\frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu}, \qquad /7/$$

враховуючи /6/, записуємо у формі

$$\int_0^\infty f(t)\log_2\frac{p(t;\nu)}{f(t)}dt. \qquad /8/$$

За нерівністю Остроградського

$$\log_2 x \leq (x-1)\log_2 e, \quad x>0$$

для виразу /8/ дістаємо нерівність

$$\int_0^\infty f(t)\log_2 \frac{p(t;\nu)}{f(t)}dt \leq \int_0^\infty f(t)\left[\frac{p(t;\nu)}{f(t)}-1\right](\log_2 e)dt = 0. \qquad /9/$$

Оскільки вираз зліва у нерівності /9/ дорівнює різниці /7/, то виведено нерівність

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt \leq \log_2 \frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu}, \qquad /10/$$

що є змістом наведеного твердження.

Приклад. Якщо випадкова змінна Парето має перший логарифмічний момент такий самий, як модуль змінної Коші, то ентропія змінної Парето більша від ентропії модуля змінної Коші.

Справді, модуль змінної Коші з густиною

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, \quad t>0$$

має перший логарифмічний момент

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{2}{\pi}G = 0{,}9296953\ldots, \qquad /11/$$

де G = 0,915965594... – стала Каталана, та ентропію

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt = 2+\log_2\frac{\pi}{2} = 2{,}651495\ldots . \qquad /12/$$

Випадкова змінна Парето з густиною /1/ має перший логарифмічний момент /5/ та ентропію /2/.

За умовою відповідні логарифмічні моменти /5/ і /11/ однакові $\frac{1}{\nu}$ = 0,9296953. Звідки ν = 1,075621.

При цьому значенні параметра форми ентропія /2/ змінної Парето дорівнює 2,678789 і є більшою від ентропії /12/ модуля змінної Коші.

Розщеплення на незалежні множники. Оскільки

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = \Gamma(z), \quad 0 < \operatorname{Re} z$$

та

$$\int_0^{\infty} t^{z-1}\frac{1}{\sigma^{\nu}\Gamma(\nu)}\;\frac{e^{-\frac{1}{\sigma t}}}{t^{\nu+1}}\,dt=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{z-1}\frac{\Gamma(1-z+\nu)}{\Gamma(\nu)};\; Re\, z<1+\nu,\,(\sigma>0,\;\nu>0),$$

то з огляду на формулу /3/ густина Парето є амплiфiкацiєю густин

$$\frac{\nu}{(1+t)^{\nu+1}}=e^{-t}\boxdot\frac{1}{\Gamma(\nu)}\;\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{\nu+1}}.$$

Отже, випадкова змiнна Парето – це добуток двох незалежних випадкових змiнних: стандартної експонентної та iнверсiї гама змiнної з одиничним параметром масштабу i параметром форми ν.
З формули /3/ бачимо, що початковi моменти

$$m_j=\Gamma(j+1)\frac{\Gamma(\nu-j)}{\Gamma(\nu)},\qquad /j=1,2,\ldots/,$$

випадкової змiнної Парето iснують лише для $j<\nu$. Зокрема, сподiвання iснує при $\nu>1$, дисперсiя при $\nu>2$.

Спадна iнтенсивнiсть вiдмов. З формули /4/ бачимо, що iнтенсивнiсть вiдмов розподiлу Парето монотонно спадає. Ця властивiсть використовується в теорiї надiйностi. Iнтенсивнiсть вiдмов /4/ однозначно визначає густину /1/ за формулою

$$p(t;\nu)=h(t,\nu)\,e^{-\int_0^t h(x;\nu)dx},\quad t>0,\,(\nu>0).$$

Зазначимо, що розподiл Парето використовується в економiцi для моделювання розподiлiв доходу.

Стаття надiйшла до редколегiї 25.09.88

УДК 517.944:947

Марiя Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ОДИН НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛIНIЙНОЇ ЗАДАЧI КОШI ДЛЯ РIВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо таку задачу Кошi:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=a(x)f(y)+b(x),\qquad /1/$$

$$y\big|_{x=x_0}=y_0\neq 0,\qquad /2/$$

$$y'\big|_{x=x_0}=y_1\qquad /3/$$