$$\int_0^\infty t^{z-1}\frac{1}{\sigma^\nu \Gamma(\nu)}\;\frac{e^{-\frac{1}{\sigma t}}}{t^{\nu+1}}\,dt=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{z-1}\frac{\Gamma(1-z+\nu)}{\Gamma(\nu)},\; Re\, z<1+\nu,\;(\sigma>0,\ \nu>0),$$

то з огляду на формулу /3/ густина Парето є амплiфiкацiєю густин

$$\frac{\nu}{(1+t)^{\nu+1}}=e^{-t}\boxdot\frac{1}{\Gamma(\nu)}\;\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{\nu+1}}\;.$$

Отже, випадкова змiнна Парето – це добуток двох незалежних випадкових змiнних: стандартної експонентної та iнверсiї гама змiнної з одиничним параметром масштабу i параметром форми ν.

З формули /3/ бачимо, що початковi моменти

$$m_j=\Gamma(j+1)\,\frac{\Gamma(\nu-j)}{\Gamma(\nu)},\qquad /j=1,2,\ldots/,$$

випадкової змiнної Парето iснують лише для $j<\nu$. Зокрема, сподiвання iснує при $\nu>1$, дисперсiя при $\nu>2$.

<u>Спадна iнтенсивнiсть вiдмов.</u> З формули /4/ бачимо, що iнтенсивнiсть вiдмов розподiлу Парето монотонно спадає. Ця властивiсть використовується в теорiї надiйностi. Iнтенсивнiсть вiдмов /4/ однозначно визначає густину /1/ за формулою

$$p(t;\nu)=h(t,\nu)\,e^{-\int_0^t h(x;\nu)dx},\quad t>0,\ (\nu>0).$$

Зазначимо, що розподiл Парето використовується в економiцi для моделювання розподiлiв доходу.

Стаття надiйшла до редколегiї 25.09.88

УДК 517.944:947

Марiя Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ОДИН НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛIНIЙНОЇ ЗАДАЧI КОШI ДЛЯ РIВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо таку задачу Кошi:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=a(x)f(y)+b(x), \qquad /1/$$

$$y\big|_{x=x_0}=y_0\neq 0, \qquad /2/$$

$$y'\big|_{x=x_0}=y_1 \qquad /3/$$

Припускаємо, що всі функції p, p', q, a, b, f – неперервні, $p>0, q\geq 0$. Крім того, функція $f(y)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(y)-f(\tilde{y})|\leq N|y-\tilde{y}|. \tag{4}$$

Позначимо через $\tilde{y}$ розв"язок такої лінійної задачі:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\tilde{y}}{dx}\right)-\left[q(x)-a(x)K\right]\tilde{y}=b(x),\quad K=\frac{f(y_0)}{y_0}, \tag{5}$$

$$\tilde{y}\Big|_{x=x_0}=y_0\neq 0, \tag{6}$$

$$\tilde{y}'\Big|_{x=x_0}=y_1. \tag{7}$$

Оцінимо близькість розв"язків задач /1/-/3/ та /5/-/7/. Звичайними міркуваннями легко отримати таку нерівність

$$\max_{|x-x_0|\leq h}|y(x)-\tilde{y}(x)|\leq\frac{A\left(N+\frac{f(y_0)}{y_0}\right)}{1-NA}\max_{|x-x_0|\leq h}|\tilde{y}(x)-y_0|, \tag{8}$$

де

$$A=\max_{|x-x_0|\leq h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\left|\frac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)}{\varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi)-\varphi_2(\xi)\varphi_1'(\xi)}\right|d\xi\right|.$$

Тут $\varphi_i(x)$ $(i=1;2)$ – фундаментальна система розв"язків рівняння $(py')'-qy=0$. Нерівність /8/ виведена у припущенні $NA<1$. Вона є додатковим обмеженням на вихідні дані нелінійної задачі /1/-/3/ і обгрунтовує використання задачі /5/-/7/ для розв"язку вихідної нелінійної задачі Коші.

Як приклад розглянемо таку задачу

$$y''+\omega^2 y+ay^3=0, \tag{9}$$

$$y(0)=y_0\neq 0,\quad y'(0)=0. \tag{10}$$

Точний розв"язок /9/-/10/ має вигляд

$$y=y_0\,cn\sqrt{\omega^2+ay_0^2}\,x. \tag{11}$$

Наближений розв"язок цієї ж задачі за вищевказаною схемою дорівнює

$$\tilde{y}=y_0\cos\sqrt{\omega^2+ay_0^2}\,x. \tag{12}$$

Як випливає з /11/ та /12/, ці два розв"язки даються близькими періодичними функціями, причому періоди T та $\tilde{T}$ точного та наближеного розв"язків пов"язані співвідношенням

$$T = \tilde{T}\left\{1 + \frac{a y_0^2}{4(2\omega^2 + a y_0^2)} + \frac{9}{64}\left[\frac{a y_0^2}{2\omega^2 + a y_0^2}\right]^2 + \dots\right\}.$$

На закінчення відзначимо, що цю ж схему можна поширити на більш загальні задачі Коші для рівнянь типу

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = a(x)f(y) + b(x)\frac{d}{dx}\mathcal{F}(y) + c(x)g(y') + d(x), \qquad /13/$$

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 \neq 0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y_1 \neq 0.$$

Пропонована лінеаризація здійснюється за допомогою замін

$$f(y) \sim \frac{f(y_0)}{y_0}\tilde{y}, \quad \mathcal{F}(y) \sim \frac{\mathcal{F}(y_0)}{y_0}\tilde{y}, \quad g(y') \sim \frac{g(y_1)}{y_1}\tilde{y}'.$$

Близькість лінеаризованого за такою схемою розв"язку задачі Коші до точного можна оцінити стандартними міркуваннями [2, 3] у припущенні неперервності та ліпшицевості функцій $f(y)$, $\mathcal{F}(y)$, $g(y')$.

1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961. 2. М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д. Про модифікований метод еквівалентної лінеаризації для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.40-42. 3. М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для рівнянь Льєнара // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.42-45.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89