УДК 513

Я.Г.Притула

ПРО ОДНУ ОЗНАКУ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР"Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Нехай $f(x)$ - рівномірна майже періодична /р.м.п./ функція, спектр якої має єдину точку згущення в нескінченності [2]. Її ряд Фур"є можна записати в симетричній формі

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x}$$

$$|A_j| + |A_{-j}| > 0,\ j \neq 0;\ \lambda_{-j} = -\lambda_j;\ \lambda_j > 0,\ \lambda_{j+1} > \lambda_j$$

при $j > 0$.

Нехай

$$\omega(\delta, f) = \sup_{x, |h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)|$$

і

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \left[M\{|f(x+h) - f(x)|^p\} \right]^{1/p},$$

де

$$M\{g(x)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(x)\,dx.$$

Розглянемо функцію $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Нехай τ $/a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b/$ розбиття $[a, b]$.

Позначимо

$$V^{(\tau)}(f, [a, b]) = \sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^2.$$

Будемо говорити, що р.м.п. функція $f(x)$ має обмежену τ -варіацію, якщо існують числа $A > 0$ і $\ell > 0$, для яких

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad V^{(\tau)}(f, [a, a+\ell]) \leq A.$$

Теорема. Нехай $1 < p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1,\ 0 < \beta < 2,\ \gamma > 0$

і $1 \leq \tau < 2p$

Якщо р.м.п. функція $f(x)$ має обмежену τ - варіацію і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\beta/2p} n^{\gamma-\beta/2} \omega_{r+(2-r)q}^{\beta-\beta r/2p} (\pi/\lambda_n, f) \qquad /1/$$

збігається, то і ряд

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^{\beta} |j|^{\gamma} \qquad /2/$$

збігається.

<u>Доведення.</u> Нехай

$$\bar{\omega}_2^2(h,f) = M\{|f(x+h)-f(x)|^2\}.$$

Проводячи міркування як і в [4] для цілого числа S, яке задовольняє нерівності $sh \leqslant \ell < (s+1)h$, одержуємо

$$s\bar{\omega}_2^{2p}(h,f) \leqslant A\,\omega_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h,f).$$

Тому

$$\omega_2^{2p}(h,f) \leqslant \frac{A}{\ell}\,\frac{(s+1)h}{s}\,\omega_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h,f) \leqslant \frac{2A}{\ell}\,h\,\omega_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h,f). \qquad /3/$$

З рівності Парсеваля для р.м.п. функцій маємо

$$M\{|f(x+h)-f(x)|^2\} = 4\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^2 \sin^2\frac{h\lambda_j}{2}.$$

Звідси

$$\omega_2^2(\pi/\lambda_n, f) = \sup_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} \bar{\omega}_2^2(h,f) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} \Big[4\sum_{|\lambda_j|\geqslant\lambda_n}' |A_j|^2 \sin^2\frac{h\lambda_j}{2}\Big] =$$

$$= 2\sum_{|j|\geqslant n} |A_j|^2 - \inf_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} 2\sum_{|j|\geqslant n} |A_j|^2 \cos\lambda_j h.$$

Враховуючи, що [5]

$$\inf_{|h|\leqslant \pi/\lambda_n} \sum_{|j|\geqslant n}' |A_j|^2 \cos\lambda_j h \leqslant 0,$$

одержуємо

$$\sum_{|j|\geq n} |A_j|^2 \leqslant \omega_2^2 \left(\pi/\lambda_n, f\right). \qquad /4/$$

З нерівностей /3/ і /4/ маємо

$$\sum_{n\leq |j|<2n} |A_j|^2 \leqslant C_1 \lambda_n^{-1/p} \omega_{r+(2-r)q}^{2-r/p} \left(\pi/\lambda_n, f\right),$$

де $C_1 = \left(\frac{2A\pi}{\ell}\right)^{1/p}$.

Тоді

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_j|^{\beta} |j|^{\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{2^n\leq |j|<2^{n+1}} |A_j|^{\beta} |j|^{\gamma}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{2^n\leq |j|<2^{n+1}} |A_j|^2\right)^{\beta/2} \left(\sum_{2^n\leq |j|<2^{n+1}} |j|^{\frac{2\gamma}{2-\beta}}\right)^{\frac{2-\beta}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2^n}^{-\beta/2p} 2^{n(\gamma-\beta/2+1)} \omega_{r+(2-r)p}^{\beta-\frac{\beta r}{2p}} \left(\pi/\lambda_{2^n}, f\right),$$

де $C_2 = C_1^{\beta/2}$.

Збіжність останнього ряду рівносильна збіжності ряду /1/. Звідси випливає справедливість теореми.

Для періодичної функції $f(x)$ у випадку $\beta=1$, $\gamma=0$ теорема доведена в [7], загальний випадок розглянутий у [3].

Умови доведеної теореми в деякому розумінні проміжні між умовами відомих ознак збіжностей ряду /2/, які є узагальненнями на р.м.п. функції ознак Зігмунда і Саса.

Наприклад, при $p\to 1$, $q\to\infty$ умови теореми переходять в умови, які розглядались у [1], а при $p\to\infty$, $q\to 1$ – в умови збіжності ряду /2/, які наведені в [6].

1. К у п ц о в Н.П. Прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах Банаха и разложения Фурье. Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1969. 2. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., 1959. 3. О с м а н о в Г.И. О сходимости рядов Фурье и преобразований Фурье функций из классов $L_2(0,2\pi)$, $L_2^{\alpha}[0,2\pi]$ и $L_2^{(\alpha)}(-\infty,\infty)$ // Тр. Азерб. ин-та нефти и химии. Сер. мат., 1970. Вып. 28. С.132-140. 4. П р и -

т у л а Я.Г. Признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций ограниченной вариации // Укр. мат. журн. 1981. Т.33. № 1. С.28–32. 5. П р и т у л а Я.Г. О неравенстве Джексона для B^2 -почти периодических функций // Изв. вузов. Сер. мат. 1972. № 8/123/. С.9–13. 6. П р и т у л а Я.Г. Про збіжність рядів з коефіцієнтів Фур"є майже періодичних функцій Безіковича // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1971. № 2. С.48–52.
7. Izumi M. Izumi S. On absolute convergence of Fourier series // Arkiv för Mat. 1967, vol. 7, N12. p. 152-160.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89