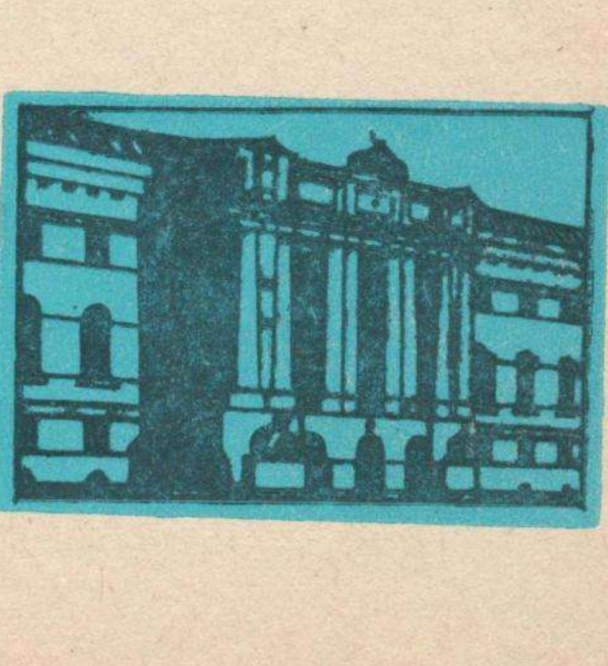
ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ ДІЙСНОГО ТА КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
32
1989



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Виходить з 1965 р.

Випуск 32

ПИТАННЯ ДІЙСНОГО ТА КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
1989

УДК 513

Вопросы действительного и комплексного анализа. Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 32. - Львов: Выща школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1989, 80 с. /на укр. яз./.

В Вестнике помещены статьи по теории функций, алгебре, топологии, теории вероятностей, механике, дифференциальным и интегральным уравнениям и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов. Библиогр. списки в конце статей.

Адреса редакційної колегії: 290000, м.Львів, вул.Університетська, 1, кафедра диференціальних рівнянь.

Редакція науково-технічної та природничої літератури

В $\frac{1702050000-020}{М 225/04/-89}$ Замовне

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ПРО СЛАБКУ ЗБІЖНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ТИПУ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ

Розглянемо в $Q_T = D\times(0,T)$, де $D\in\mathbb{R}^n$ – обмежена область, змішану задачу

$$u_{tt}+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u)+c(x,t)u_t+b(x,t)u=f(x,t), \qquad /1/$$

$$(x,t)\in Q_T,\quad D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x), \qquad /2/$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\right|_{S_T}=0,\quad i=0,\dots,2m-1, \qquad /3/$$

де $S_T=\partial D\times(0,T)$; n – зовнішня нормаль до S_T .

Рівняння /1/ містить як частковий випадок відоме рівняння поперечних коливань стержня. Різні задачі для таких рівнянь вже вивчалися [1].

Вважаємо, що коефіцієнти рівняння /1/ $a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta t}, c, b\in L_\infty(Q_T)$, функція $f\in L_2(Q_T)$, $\varphi\in H^{2m}(D), \psi\in L_2(D)$. Введемо простір $H_0^{2m,1}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційованих в $\bar{Q}_T$ функцій, які перетворюються у ноль в околі S_T, відносно норми

$$\|u\|_{H^{2m,1}(Q_T)}=\left(\int_{Q_T}\left(\sum_{|\alpha|\le 2m}|D^\alpha u|^2+|u_t|^2\right)dx\,dt\right)^{\frac12}.$$

Назвемо узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/ таку функцію $u\in H_0^{2m,1}(Q_T)$, яка задовольняє умову $u(x,0)=\varphi(x)$ й інтегральну рівність

$$\int_{Q_T}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}D^\beta u D^\alpha v-u_t v_t+cu_t v+buv\right)dx\,dt=$$

$$= \int\limits_{Q_T} f v\, dx\, dt - \int\limits_{D} \psi(x)\, v(x,0)\, dx$$

для кожної $v(x,t) \in \overset{\circ}{H}{}^{2m,1}(Q_T)$, $v(x,T) = 0$.

Розглянемо поряд з /1/–/3/ задачу

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^{\alpha}(a^{k}_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta} u) + c^{k}(x,t) u_t + b^{k}(x,t) u = f^{k}(x,t), \qquad /4/$$

$$u(x,0) = \varphi^{k}(x), \quad u_t(x,0) = \psi^{k}(x), \qquad /5/$$

$$\left.\frac{\partial^{i} u}{\partial n^{i}}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \dots, 2m-1. \qquad /6/$$

Нехай $a^{k}_{\alpha\beta}$, $a^{k}_{\alpha\beta t}$, c^{k}, $b^{k} \in L_{\infty}(Q_T)$ і обмежені однією і тією ж сталою, яка не залежить від k, $f^{k} \in L_2(Q_T)$, $\varphi^{k} \in \overset{\circ}{H}{}^{2m}(D)$, $\psi^{k} \in L_2(D)$ і

$$\| f^{k} \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi^{k} \|_{H^{2m}(D)} + \| \psi^{k} \|_{L_2(D)} \leq A,$$

A не залежить від k. Крім того, нехай $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$,

$$a^{k}_{\alpha\beta} = a^{k}_{\beta\alpha},$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}(x,t)\, \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \geq a_0 \sum_{|\alpha|=2m} \eta^{2}_{\alpha}; \quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a^{k}_{\alpha\beta}(x,t)\, \eta_{\alpha} \eta_{\beta} \geq a_0 \sum_{|\alpha|=2m} \eta^{2}_{\alpha},$$

$a^{k}_{\alpha\beta} \to a_{\alpha\beta}$, $c^{k} \to c$, $b^{k} \to b$ у просторі $L_2(Q_T)$, $f^{k} \to f$ слабко в $L_2(Q_T)$, $\varphi^{k} \to \varphi$ слабко в $H^{2m}(D)$, $\psi^{k} \to \psi$ слабко в $L_2(D)$, коли $k \to \infty$ виконуються всі наведені умови, то справедлива така теорема.

<u>Теорема.</u> Кожна із задач /1/–/3/ і /4/–/6/ має єдиний розв"язок у просторі $\overset{\circ}{H}{}^{2m,1}(Q_T)$, причому $u^{k}(x,t) \to u(x,t)$ слабо у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$, коли $k \to \infty$. Тут $u(x,t)$ розв"язок задачі /1/–/3/, $u^{k}(x,t)$ – розв"язок задачі /4/–/6/.

Для доведення теореми передовсім потрібно обгрунтувати існування та єдиність розв"язків /1/–/3/ і /4/–/6/ у просторі $H^{2m,1}_{0}(Q_T)$. Це можна зробити таким чином. Замість /1/ розглядаємо параболічне за Петровським рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D^{\alpha}(a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta} u) - \varepsilon \Delta u_t + c^{\varepsilon}(x,t) u_t + b^{\varepsilon}(x,t) u = f(x,t), \qquad /1'/$$

де $\varepsilon > 0$, $a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, c^{ε}, b^{ε} – усереднення коефіцієнтів $a_{\alpha\beta}$, c, b. Тоді з [2] випливає існування єдиного розв"язку задачі /1'/, /2/, /3/ у просторі $H^{4m^2}(Q_T)$. Тепер залишається одержати оцінку функції $u^{\varepsilon}(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$, яка не залежить від ε. Така оцінка може бути одержана шляхом домноження рівняння /7/ на $u_t^{\varepsilon}(x,t)$ й інтегрування по області Q_t. Зокрема справедлива оцінка

$$\|u^{\varepsilon}(x,t)\|_{H^{2m,1}(Q_T)} \leq C\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{H^{2m}(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)}\right),$$

причому стала C не залежить від ε. Отже, множина $\{u^{\varepsilon}(x,t)\}$ слабко компактна в $H_0^{2m,1}(Q_T)$ і з неї можна виділити слабко збіжну послідовність $u^{\varepsilon_i}(x,t)$ до функції $u(x,t)\in H_0^{2m,1}(Q_T)$. Легко переконатися, що функція $u(x,t)$ і є узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/. Аналогічно сказаному вище доводиться існування узагальненого розв"язку задачі /4/-/6/.

Тепер залишається показати, що $u^{k}(x,t) \to u(x,t)$ слабко в $H^{2m,1}(Q_T)$, коли $k\to\infty$. Для цього використаємо слабку компактність множини розв"язків $u^{k}(x,t)$ /4/-/6/. Нехай $W(x,t)\in H_0^{2m,1}(Q_T)$ яка-небудь слабка границя множини $\{u^{k}(x,t)\}$. Тоді легко показати, що $W(x,t)$ є узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/. Оскільки /1/-/3/ має єдиний розв"язок, то $u(x,t)=W(x,t)$ і вся послідовність $u^{k}(x,t)$ слабко збігається до $u(x,t)$ у просторі $H^{2m,1}(Q_T)$.

1. Б р и ш Н.И., В а л е ш к е в и ч И.Н. Метод Фурье для дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную по времени // Докл. АН СССР. 1962. Т.146. № 6. С.1247-1250. 2. С о л о н н и к о в В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1965. Т.83. С.152-158.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.956

Г.П.Лопушанська

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Доведемо розв"язальність однієї задачі типу Біцадзе-Самарського [1] у просторі узагальнених функцій.

Нехай Ω - область в R^n, $n\geq 3$, обмежена замкненими $n-1$ - вимірними поверхнями $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$, $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Gamma_i=\Gamma$, класу C^{∞} причому $\Gamma_2,\dots,\Gamma_m$ лежать у скінченній області, обмеженій поверхнею Γ_1, а $\gamma_1, \dots \gamma_k$ - $n-1$ - вимірні поверхні класу C^∞, що лежать в Ω. На Γ_i задані нескінченно диференційовані функції a_{ij} / $a_{ij}(x) = a_j(x)$, якщо $x \in \Gamma_i$ / і гомеоморфізми $\hat{\omega}_{ij} : \Gamma_i \to \gamma_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$, і $\omega_{ij} : x + \nu_{\Gamma_i}\varepsilon \to \hat{\omega} x + \nu_\gamma \varepsilon$, $x \in \Gamma_i$ деяких околів $U(\Gamma_i)$ в околи $\tilde{U}(\gamma_j)$ для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ /$\omega_{ij}(x) = \omega_j(x)$, якщо $x \in \Gamma_i$. Вважаємо, що $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, ε_0 таке, що також не перетинаються між собою всі $U(\Gamma_i), \tilde{U}(\gamma_j), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$

Припустимо, що $D(\Gamma) = C^\infty(\Gamma)$, $D'(\Gamma)$ - простір неперервних лінійних функціоналів на $D(\Gamma)$, (φ, F) - дія узагальненої функції $F \in D'(\Gamma)$ на основну $\varphi \in D(\Gamma)$.

Задача А. Нехай $F \in D'(\Gamma)$, $F = \sum_{i=1}^m F_i$, $\operatorname{supp} F_i \subset \Gamma_i$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} [u(x_\varepsilon) + \sum_{j=1}^k a_j(x_\varepsilon) u(\omega_j(x_\varepsilon))] \varphi(x_\varepsilon) d\Gamma_\varepsilon = (\varphi, F) \qquad /1/$$

для кожної $\varphi \in D(\Gamma)$. Тут $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, $a_j(x_\varepsilon) = a_j(x)$, якщо $x_\varepsilon = x + \nu_\Gamma \varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon = \{x_\varepsilon = x + \nu_\Gamma \varepsilon, x \in \Gamma\} \subset \Omega$, $/\nu_\Gamma/ = 1$.

Для випадку $F = f(x) \in C(\Gamma)$ задача розглядалась в [4], де доведена її однозначна розв"язальність за умови

$$\sum_{j=1}^k |a_j(x)| \leq 1, \ \sum_{j=1}^k a_j(x) = -1, \ x \in \Gamma \qquad /2/$$

і розв"язальність із точністю до довільної аддитивної сталої у припущенні, що

$$\sum_{j=1}^K |a_j(x)| \leq 1, x \in \Gamma, \sum_{j=1}^K a_j(x_*) > -1, x_* \text{ - деяка точка } \Gamma. \qquad /3/$$

Нехай $G_i(x,y)$ - функція Гріна задачі Діріхле в області Ω_i, обмеженій поверхнею Γ_i / $\Omega_i \cap \Omega = \Omega$ /, $i = \overline{1,m}$, $K_i(x,y) = \frac{1}{p_n} \frac{\partial G_i(x,y)}{\partial \nu_{\Gamma_i y}}$, $x \in \Omega_i$, $y \in \Gamma_i$, p_n — площа одиничної сфери в R^n,

$$K(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_i, \quad y \in \Gamma_i \\ K_i(x,y), & x \in \Omega \cup (\Gamma / \Gamma_i), \ y \in \Gamma_i. \end{cases}$$

Теорема 1. Нехай $F = \sum_{i=1}^m F_i \in D'(\Gamma)$. Функція

$$u(x) = \sum_{i=1}^m (K_i(x,y), B_i), \quad x \in \Omega, \qquad /4/$$

де

$$B_i \in D'(\Gamma_i), \ (g_i, B_i) = (\varphi_{g_i}, F_i) \ \ \forall g_i \in D(\Gamma_i), \operatorname{supp} F_i \subset \Gamma_i,$$

$\varphi_{g_i}(x)$ – розв"язок інтегрального рівняння;

$$\varphi(y)+\int_{\Gamma}\varphi(x)\,T(x,y)\,d_x\Gamma=g(y),\ y\in\Gamma_i, \qquad /5/$$

$$g(y)=\begin{cases} g_i(y), & y\in\Gamma_i\\ 0, & y\in\Gamma\setminus\Gamma_i\end{cases},\quad T(x,y)=K(x,y)+\sum_{j=1}^{k}a_j(x)K(\hat{\omega}_j(x),y),\quad x,y\in\Gamma,$$

є єдиним розв"язком задачі А при умові /2/. Якщо $(\varphi_0, F)=0$, де $\varphi_0(x)$ – розв"язок однорідного інтегрального рівняння, що відповідає рівнянню /5/ у випадку /3/, узагальнені функції $B_i\in D'(\Gamma_i)$ визначені рівністю $(g_i, B_i)=(\tilde{\varphi}_{g_i}, F_i)$ для кожної $g_i\in D(\Gamma_i)$, $\tilde{\varphi}_{g_i}$ – розв"язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y)+\int_{\Gamma}\varphi(x)T(x,y)d_x\Gamma=g_i(y)-g_1^0(y)\int_{\Gamma}g_1(t)\,d\Gamma_1,$$

$g_1^0\in D(\Gamma_1), \int_{\Gamma_1}g_1^0(t)\,d\Gamma_1=0$, то функція /4/ є розв"язком задачі А при умові /3/ і він єдиний з точністю до довільної адитивної сталої.

Теорема доводиться за тією ж схемою, що і відповідні теореми у праці [2].

Позначимо через $\rho(x)$ нескінченно диференційовану функцію в $\overline{\Omega}$, яка має порядок відстані від точки $x\in\Omega$ до Γ біля Γ, а в іншій частині області Ω дорівнює нулеві. Так само, як в [3, 5], можна довести теорему.

<u>Теорема 2.</u> Гармонійна в області Ω функція $u(x)$ тоді і лише тоді є розв"язком задачі А, коли існує натуральне число τ таке, що

$$\int_{\Omega}\rho^{\tau}(x)\,|u(x)|\,dx<\infty.$$

<u>Задача Б.</u> Нехай $F\in D'(\Gamma)$, $F=\sum_{i=1}^{m}F_i$, $\operatorname{supp}F_i\subset\Gamma_i$, знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\Big[\frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial\nu}+\sum_{j=1}^{k}a_j(x_\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial q}(\omega_j(x_\varepsilon))\Big]\varphi(x_\varepsilon)\,d\Gamma_\varepsilon=(\varphi,F)$$

для кожної $\varphi\in D(\Gamma)$. Тут $q=(q_1,\dots,q_n)$, $|q|=1$, $q(x)=\nu_{\Gamma_i}(\omega_j(x))$ для $x\in\Gamma_i$.

Аналогічні результати справедливі для задачі Б, а також для нелокальних задач типу А і Б для систем диференціальних рівнянь 2-го порядку варіаційного типу [2] з нескінченно диференційованими коефіцієнтами при умовах існування фундаментального розв"язку для них у всьому просторі R^n.

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т.185. № 4. С.739-740. 2. Волошина М.С., Гупало Г.С., Лопушанська Г.П. Про узагальнену задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь у випадку багатозв"язної області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1978. Вип. 13. С.5-8. 3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843-846. 4. Кишкис К.Ю. Об одной нелокальной задаче для гармонических в многосвязной области функций // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23. № 1. С.174-177. 5. Лопушанская Г.П. Об обобщенных граничных значениях решений сильно эллиптических систем второго порядка // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. К., 1976. С.102-103.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.956

Г.П.Лопушанська, А.А.Новинюк

ПРО РОЗВ"ЯЗКИ У ЗАМКНЕНОМУ ВИГЛЯДІ КЛАСИЧНИХ І НЕКЛАСИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ У НАПІВСМУЗІ

Розвиваючи метод [2] розв"язування узагальненої задачі Коші, у [3] показано, як у деяких кутових областях для рівнянь з постійними коефіцієнтами можна розв"язувати нові задачі, що не ставляться у класичній теорії. Метод, який у [3] називають операційним методом в узагальнених функціях, ми застосуємо до дослідження класичних і некласичних крайових задач у циліндричній області.

Нехай $u(t,x)$ - регулярний розв"язок рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad /1/$$

в області $\Omega = \{(t,x): t>0,\ 0<x<1\}$, $\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & (t,x)\in\Omega \\ 0, & (t,x)\bar{\in}\Omega. \end{cases}$

Тоді $\tilde{u}$ є регулярною узагальненою функцією [2] і задовольняє у просторі $\mathcal{D}'(R^2)$ рівняння

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}(t,x), \qquad /2/$$

де $\tilde{f}(t,x) = \theta(x)\theta(1-x)[u_t(0,x)\cdot\delta(t) + u(0,x)\cdot\delta'(t)] +$

$$+\theta(t)[u(t,1)\cdot\delta'(x-1) - u(t,0)\cdot\delta'(x) + u_x(t,1)\cdot\delta(x-1) - u_x(t,0)\cdot\delta(x)];$$

$\theta(t)$ – функція Хевісайда. Як відомо [2], розв"язок рівняння /2/ має вигляд

$$\tilde{u}(t,x) = \varepsilon(t,x) * \tilde{f}(t,x), \qquad /4/$$

де $\varepsilon(t,x)$ – фундаментальний розв"язок, а згідно з [3, 5] він єдиний в області Ω.

Введемо позначення

$$a(x) = u_t(0,x), \qquad b(x) = u(0,x),$$
$$c(t) = u(t,1), \quad d(t) = u(t,0), \; g(t) = u_x(t,0), \; e(t) = u_x(t,1) \qquad /5/$$

Обчислюючи згортку /4/, яка буде регулярною функцією [3], і враховуючи, що $\tilde{u} = 0$ поза областю Ω, знаходимо представлення розв"язку рівняння /1/ через функції /5/:

$$2u(t,x) = \begin{cases} \int\limits_{x-t}^{x+t} a\,d\xi + b(x-t) + b(x+t), & (t,x)\in\Omega_1, \\ \int\limits_{x-t}^{1} a\,d\xi + b(x-t) + c(x+t-1) + \int\limits_{0}^{x+t-1} e\,d\xi, & (t,x)\in\Omega_2, \\ \int\limits_{0}^{x+t} a\,d\xi + b(x+t) + d(t-x) - \int\limits_{0}^{t-x} g\,d\xi, & (t,x)\in\Omega_3, \\ \int\limits_{0}^{1} a\,d\xi + c(x+t-1) + \int\limits_{0}^{x+t-1} e\,d\xi - \int\limits_{0}^{t-x} g\,d\xi + d(t-x), & (t,x)\in\Omega_4, \end{cases} \qquad /6/$$

$$\Omega_1 = \{(t,x)\in\Omega:\ x-t\geq 0,\ x+t\leq 1\},\quad \Omega_2 = \{(t,x)\in\Omega: x-t\geq 0,\ x+t\geq 1\},$$
$$\Omega_3 = \{(t,x)\in\Omega: x-t\leq 0,\ x+t\leq 1\},\quad \Omega_4 = \{(t,x)\in\Omega: x-t\leq 0,\ x+t\geq 1\}$$

і співвідношення між функціями /5/

$$\int\limits_{\eta}^{1} a\,d\xi + b(\eta) - c(1-\eta) + \int\limits_{0}^{1-\eta} e\,d\xi = 0, \quad \eta\in(0;1); \qquad /7\ a/$$

$$\int\limits_{0}^{1} a\,d\xi - c(1+\eta) + \int\limits_{0}^{1+\eta} e\,d\xi - \int\limits_{0}^{\eta} g\,d\xi + d(\eta) = 0,\ \eta > 0; \qquad /7\ б/$$

$$\int_0^{\eta} a\,d\xi + b(\eta) - \int_0^{\eta} g\,d\xi - d(\eta) = 0, \quad \eta \in (0;1); \qquad /7\text{ в}/$$

$$\int_0^{1} a\,d\xi + c(\eta) + \int_0^{\eta} e\,d\xi - \int_0^{\eta+1} g\,d\xi - d(\eta+1) = 0, \ \eta > 0 \qquad /7\text{ г}/$$

Якщо з /7 в/ знайти $b(\eta)$, а з /7 г/ $\int_0^{\eta} e\,d\xi$ і підставити в /7 б/, то отримаємо

$$d(\eta) + d(\eta+2) - 2c(\eta+1) - \int_0^{\eta} g\,d\xi + \int_0^{\eta+2} g\,d\xi = 0, \ \eta > 0, \qquad /8/$$

звідки видно, що три функції c, d, g не є незалежні.

Тепер зі сукупності шести функцій /5/, що задовольняють /7/, виділяємо різні варіанти крайових умов, у кожному з яких існує єдиний розв"язок $u(t,x) \in C^2(\Omega)$. Отримуємо змішані задачі $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,g\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,b,g,e\}$, некласичні задачі $\{a,c,e\}$, $\{b,c,e\}$, $\{a,d,g\}$, $\{b,d,g\}$, задачі без початкових умов $\{c,e,D$ на $(0;1)\}$, $\{C,D\}$, $\{C,d\}$, $\{C,g\}$, де $C(\eta) = \int_0^{\eta} e\,d\xi - c(\eta)$, $D(\eta) = d(\eta) + \int_0^{\eta} g\,d\xi$, та інші задачі, в яких задано комбінації функцій із сукупності /5/, у тому числі, наприклад, змішану задачу з нелокальними граничними умовами, одному методу розв"язування якої присвячена праця [1].

Під час розв"язування змішаних задач операційним методом в узагальнених функціях виявляється їх зв"язок із одним типом функціональних рівнянь. Розглянемо для прикладу першу змішану задачу $\{a,b,c,d\}$. Щоб записати її розв"язок, потрібно знайти функції g і e. Із /6/ бачимо, що досить знати $G(\eta) = \int_0^{\eta} g\,d\eta$ і $E(\eta) = \int_0^{\eta} e\,d\eta$. З допомогою /7 а/ і /7 в/ знаходимо g і e на інтервалі /0; 1/, використовуючи /7 б/ і /7 г/, отримуємо функціональні рівняння

$$E(\eta+1) - E(\eta-1) = c(\eta+1) + c(\eta-1) - 2d(\eta) \overset{df}{=} A(\eta), \ \eta > 1;$$

$$G(\eta+1) \ G(\eta-1) = 2c(\eta+1) - d(\eta) - d(\eta+2), \ \eta > 1.$$

Запишемо перше з цих рівнянь у матричному вигляді [4]

$$\bar{v}(\eta) = K\bar{v}(\eta-1) + \bar{A}(\eta), \ \eta > 1, \qquad /9/$$

де

$$\bar{v}(\eta) = \begin{pmatrix} E(\eta+1) \\ E(\eta) \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \bar{A}(\eta) = \begin{pmatrix} A(\eta) \\ 0 \end{pmatrix},$$

і знайдемо його розв"язок $\bar{v}(\eta)=K^m\bar{v}(\eta-m)+\sum_{i=0}^{m-1}K^i\bar{A}(\eta-i)$, $\eta\in(m+1;\ m+2)$. Так само шукаємо $G(\eta)$. Область Ω_4 характеристиками поділена на області $\Omega_4^{3p}=\{(t,x)\in\Omega_4: t-x\le p,\ t+x\ge p+1\}$, $\Omega_4^{3p-1}=\{(t,x)\in\Omega_4: t-x\ge p,\ t+x\le p+1\}$, $\Omega_4^{3p+1}=\{(t,x)\in\Omega_4: p\le t-x)\le p+1;\ p+1\le t+x\le p+2\}$, $p=1,2\ldots$ Із /6/ випливає необхідність знати $E(t+x-1)$ і $G(t-x)$. Щоб записати, наприклад, значення розв"язку u задачі у точці $(t,x)\in\Omega_4^{3p}$, де $t+x-1\ge p$, знаходимо $E(\eta+1),\ \eta\in(p-1;\ p)$ для $\eta=x+t-2$ як першу компоненту векторного розв"язку $\bar{v}(\eta)$ при $m=p-2$. Подібно шукаємо значення $G(t-x)$.

Якщо $b\in C(0;1)$, $a\in C^1(0;1)$, $c,d\in(C^2\cap L^1)(0,\infty)$ і задовольняють $a(0)=c'(0)=d'(0)=a(1)$, $b(0)=d(0)$, $b(1)=c(0)$, $b''(0)=d''(0)$, $b''(1)=c''(0)$ /умови узгодження/, то отриманий таким чином розв"язок двічі неперервно диференційований і на характеристиках, а отже, класичний.

Отже, метод дає змогу записати розв"язок класичної мішаної задачі у замкненому вигляді і при слабших припущеннях, ніж у вигляді ряду Фур"є.

Простіше розв"язуються деякі некласичні задачі. Для прикладу розглянемо задачу $\{a,d,g\}$, тобто

$$u_t(0,x)=a(x),\ u(t,0)=d(t),\ u_x(t,0)=g(t). \qquad /10/$$

Із /7 в/ знаходимо $b(\eta)$, а з /7 г/ $c(\eta)+\int_0^\eta e\,d\eta=$ $=\int_0^{\eta+1}g\,d\eta+d(\eta+1)-\int_0^1 a\,d\eta$ дістаємо розв"язок задачі

$$2u(t,x)=\begin{cases}\int_0^{x-t}g\,d\eta+\int_0^{x+t}g\,d\eta-2\int_0^{x-t}a\,d\eta+d(x-t)+d(x+t), & (t,x)\in\Omega_1\cup\Omega_2\\ \int_{t-x}^{t+x}g\,d\eta+d(t-x)+d(t+x), & (t,x)\in\Omega_3\cup\Omega_4.\end{cases} \qquad /11/$$

Якщо $a\in C^1(0;1)$, $d\in(C^2\cap L^1)(0;\infty)$, $g\in(C^1\cap L^1)(0;\infty)$, $a(0)=d'(0)$, $a'(0)=g'(0)$, то він із класу $C^2(\Omega)_t$. Із /11/ видно, що досить знати $a(x)$, $d(t)+\int_0^t g\,dt$, $d(t)-\int_0^t g\,dt$, тобто замість /10/ можна розглядати задачу

$$u_t(0,x)=a(x),\ u(t,0)-\int_0^t u_x(t,0)\,dt=d_1(t),\ u(t,0)+\int_0^t u_x(t,0)\,dt=d_2(t), \qquad /12/$$

або

$$u_t(0,x)=a(x),\ u_t(t,0)-u_x(t,0)=g_1(t),\ u_t(t,0)+u_x(t,0)=g_2(t). \quad /13/$$

Згідно з /11/, розв"язок /12/ має вигляд

$$2u(t,x)=\begin{cases} d_2(x-t)+d_2(x+t)-2\int\limits_0^{x-t} a\,d\eta, & (t,x)\in \Omega_1\cup\Omega_2 \\ d_1(t-x)+d_2(t+x), & (t,x)\in\Omega_3\cup\Omega_4, \end{cases}$$

і належить $C^2(\Omega)$, якщо $d_1'(0)+d_2'(0)=a(0), d_1''(0)+d_2''(0)=a'(0)$,

а розв"язок /13/

$$2u(t,x)=\begin{cases} \int\limits_0^{x-t} g_2\,d\xi+\int\limits_0^{x+t} g_2\,d\xi+C_1-2\int\limits_0^{x-t} a\,d\eta, & (t,x)\in\Omega_1\cup\Omega_2 \\ \int\limits_0^{t-x} g_1\,d\xi+\int\limits_0^{t+x} g_2\,d\xi+C_1, & (t,x)\in\Omega_3\cup\Omega_4, \end{cases}$$

де C_1 – довільна константа; $g_1(0)+g_2(0)=a(0);\ g_1'(0)+g_2'(0)=a'(0)$.

Розв"язок задачі $\{C,D\}$ $2u(t,x)=D(x+t)-C(1-x+t)+C_1$ також залежить від довільної сталої $C_1=-\int\limits_0^1 a\,d\eta$. Аналогічно до попереднього, можна розглянути задачу $u_t(t,0)+u_x(t,0)=D_1(t)$, $u_x(t,1)-u_t(t,1)=C_1(t)$.

Зауважимо, що зі /7/ випливає залежність між початковими функціями у задачі [1] на інтервалі /0; 1/.

1. Вагабов А.И. Одна задача колебания струны // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 12. С.2163-2166. 2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1981. 3. Малаховская Р.М. Приложение операционного метода в обобщенных функциях к исследованию краевых задач // Тр. Томского ун-та. Сер. мех.-мат. 1975. Т.220. С.29-39. 4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984. 5. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.913

В.Г.Костенко, О.М.Маняк, Л.П.Окотруб, О.Р.Патерко

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Досліджуємо лінійне звичайне диференціальне рівняння

$$x''' + A(t)x' + q(t)x = 0 \qquad /1/$$

на періодичність, обмеженість і стійкість його розв"язків, а також знайдемо зони стійкості розв"язків залежно від параметра μ. При цьому припускаємо $q(t)$ неперервною, $A(t)$ неперервно диференційованою на інтервалі $t_0 \leq t < \infty$ функціями t, крім того,

$$A(t) = z^{-2}(t)\left(\mu^2 - 2z(t)z''(t) + z'^2(t)\right), \qquad /2/$$

де $z(t)$ – довільна достатньо гладка функція; μ – довільний параметр.

Користуючись тим, що рівняння

$$\tilde{x}''' + A(t)\tilde{x}' + \frac{A'(t)}{2}\tilde{x} = 0 \qquad /3/$$

має фундаментальну систему розв"язків виду [1]

$$\tilde{x}_1(t,t_0) = z(t), \quad \tilde{x}_2(t,t_0) = z(t)\cos\mu\varphi(t,t_0),$$
$$\tilde{x}_3(t,t_0) = z(t)\sin\mu\varphi(t,t_0), \qquad /4/$$

де $\varphi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} z^{-1}(\tau)d\tau$, будь-яку задачу Коші для /1/ методом варіації довільних сталих зводимо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Зокрема, при знаходженні нормальної фундаментальної системи розв"язків $x_1(t,t_0)$, $x_2(t,t_0)$, $x_3(t,t_0)$ рівняння /1/ одержуємо такі рівняння Вольтерра:

$$x_1(t,t_0) = z^{-1}(t_0)z(t) + \frac{z''(t_0)z(t)}{\mu^2}\left(1-\cos\mu\varphi(t,t_0)\right) + \frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)x_1(\tau,t_0)d\tau,$$

$$x_2(t,t_0) = \frac{z(t)}{\mu}\sin\mu\varphi(t,t_0) + \frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)x_2(\tau,t_0)d\tau,$$

$$x_3(t,t_0) = \frac{z(t_0)z(t)}{\mu^2}\left(1-\cos\mu\varphi(t,t_0)\right) + \frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)x_3(\tau,t_0)d\tau, \qquad /5/$$

де $K(t,\tau) = \mu z(t)z(\tau)\left(1-\cos\mu\varphi(t,\tau)\right)$.

Задача Коші для рівняння /1/ зводиться до задачі Коші для системи рівнянь

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \Lambda(t)\bar{X},$$

де

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}, \qquad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -q(t) & -A(t) & 0 \end{pmatrix}. \qquad /6/$$

Нехай додатково коефіцієнти в /1/ періодичні з періодом ω. Розглянемо характеристичне рівняння матриці монодромії

$$\det\left[X(t_0+\omega, t_0) - \rho E\right] = 0, \qquad /7/$$

де

$$X(t_0+\omega, t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0+\omega,t_0) & x_2(t_0+\omega,t_0) & x_3(t_0+\omega,t_0) \\ x_1'(t_0+\omega,t_0) & x_2'(t_0+\omega,t_0) & x_3'(t_0+\omega,t_0) \\ x_1''(t_0+\omega,t_0) & x_2''(t_0+\omega,t_0) & x_3''(t_0+\omega,t_0) \end{pmatrix},$$

E – одинична матриця. Із формули Якобі [2]

$$\det X(t_0+\omega, t_0) = \det X(t_0, t_0)\, e^{\int^{\omega} Sp\,\Lambda(t)dt},$$

де $Sp\,\Lambda(t)$ – слід матриці $\Lambda(t)$, одержуємо з врахуванням /6/ $\det X(t_0+\omega,t_0) = \det X(t_0,t_0) = 1$. Тепер /7/ набере вигляду

$$\rho^3 - 3C\rho^2 + 3B\rho - 1 = 0.$$

Тут $\quad 3C = x_1(t_0+\omega,t_0) + x_2'(t_0+\omega,t_0) + x_3''(t_0+\omega,t_0),$

$$3B = \begin{vmatrix} x_1(t_0+\omega,t_0) & x_2(t_0+\omega,t_0) \\ x_1'(t_0+\omega,t_0) & x_2'(t_0+\omega,t_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2'(t_0+\omega,t_0) & x_3'(t_0+\omega,t_0) \\ x_2''(t_0+\omega,t_0) & x_3''(t_0+\omega,t_0) \end{vmatrix} + \qquad /8/$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1(t_0+\omega,t_0) & x_3(t_0+\omega,t_0) \\ x_1''(t_0+\omega,t_0) & x_3''(t_0+\omega,t_0) \end{vmatrix}.$$

Нехай ρ_1, ρ_2, ρ_3 – корені рівняння /7/ /мультиплікатори матриці монодромії/. Оскільки $\rho_1\rho_2\rho_3 = 1$, то із $|\rho_i| < 1$ випливає, що існує ρ_j, для якого $|\rho_j| > 1$, і навпаки. У таких випадках [2] усі розв"язки рівняння /1/ нестійкі. Для них неможлива асимптотична стійкість, за якої $|\rho_i| < 1$, $i = \overline{1,3}$.

Отже, обмеженість і стійкість розв"язків рівняння /1/ можливі лише тоді, коли $|\rho_1| = |\rho_2| = |\rho_3| = 1$. При цьому можливі такі випадки: 1/ $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$; 2/ $\rho_1 = \;$, $\rho_2 = \rho_3 = -1$; 3/ $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \alpha + i\beta$, $\rho_3 = \alpha - i\beta$, $(|\rho_2| = |\rho_3| = 1)$. Легко бачити, що перший випадок можливий лише за умови, коли $C = B = 1$, другий, коли $C = B = -\frac{1}{3}$, а третій, коли $-\frac{1}{3} < C = B < 1$. Таким чином, достатня умова обмеженості та стійкості розв"язків рівняння /1/ виражається нерівностями

$$-\frac{1}{3} \leqslant C = B \leqslant 1 . \qquad /9/$$

Крім того, розв"язки рівняння /1/ у першому випадку ω - періодичні, у другому ω - і 2ω - періодичні, у третьому поряд з ω - періодичними існують при $C = B = 0$ 3ω - періодичні, а при $C = B = \frac{1}{3}$ - 4ω - періодичні.

Щоб знайти зони стійкості розв"язків рівняння /1/ залежно від μ при $\mu \to \infty$, методом послідовних наближень знаходимо наближені розв"язки рівнянь /5/ з точністю до $O\left(\frac{1}{\mu^6}\right)$:

$$x_1(t,t_0) = \mathfrak{z}(t)\Big\{\mathfrak{z}^{-1}(t_0) - \frac{\mathfrak{z}''(t_0)}{\mu^2}(1-\cos\mu\varphi(t,t_0)) + \frac{\mathfrak{z}^{-1}(t_0)}{\mu^2}\int_{t_0}^{t}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))d\tau -$$
$$-\frac{\mathfrak{z}''(t_0)}{\mu^4}\int_{t_0}^{t}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))(1-\cos\mu\varphi(\tau,t_0))d\tau +$$
$$+\frac{\mathfrak{z}^{-1}(t_0)}{\mu^4}\int_{t_0}^{t}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))\int_{t_0}^{\tau}\mathfrak{z}^2(s)\left(\frac{A'(s)}{2}-q(s)\right)(1-\cos\mu\varphi(\tau,s))ds\,d\tau\Big\} + O\left(\frac{1}{\mu^6}\right),$$

$$x_2(t,t_0) = \mathfrak{z}(t)\Big\{\frac{1}{\mu}\sin\mu\varphi(t,t_0) + \frac{1}{\mu^3}\int_{t_0}^{t}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))\sin\mu\varphi(\tau,t_0)d\tau +$$
$$+\frac{1}{\mu^5}\int_{t_0}^{t}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))\int_{t_0}^{\tau}\mathfrak{z}^2(s)\left(\frac{A'(s)}{2}-q(s)\right)(1-\cos\mu\varphi(\tau,s))\sin\mu\varphi(s,t_0)ds\,d\tau\Big\} + O\left(\frac{1}{\mu^6}\right),$$

$$x_3(t,t_0) = \mathfrak{z}(t)\Big\{\frac{\mathfrak{z}(t_0)}{\mu^2}(1-\cos\mu\varphi(t,t_0)) + \frac{\mathfrak{z}(t_0)}{\mu^4}\int_{t_0}^{t}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)(1-\cos\mu\varphi(t,\tau))(1-\cos\mu\varphi(\tau,t_0))d\tau\Big\} + O\left(\frac{1}{\mu^6}\right).$$

Знаходимо наближене і також з точністю до $O\left(\frac{1}{\mu^6}\right)$ зображення для $x_2'(t_0+\omega,t_0)$ та $x_3''(t_0+\omega,t_0)$. Тоді

$$3C = 1 + 2\cos k\mu - \frac{1-\cos k\mu}{\mu^2}\alpha +$$
$$+\frac{1}{\mu^4}\int_{t_0}^{t_0+\omega}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)\int_{t_0}^{\tau}\mathfrak{z}^2(s)\left(\frac{A'(s)}{2}-q(s)\right)(1-\cos\mu\varphi(\tau,s))\left[1-\cos(\mu k-\mu\varphi(\tau,s))\right]ds\,d\tau + O\left(\frac{1}{\mu^6}\right),$$

де $k = \int_{t_0}^{t_0+\omega}\mathfrak{z}^{-2}(\tau)d\tau$, $-\alpha = \int_{t_0}^{t_0+\omega}\mathfrak{z}^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2}-q(\tau)\right)d\tau$.

Спочатку із /9/ розглядаємо

$$3C = 3 \qquad /10/$$

при $\mu = \frac{2n\pi+\delta}{k}$, де $-\pi \leqslant \delta \leqslant \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Рівняння /10/ після деяких перетворень і спрощень, проведених з точністю до $O\left(\frac{1}{\mu^6}\right)$, зводиться до

$$\delta = \pm \frac{K^2}{(2n\pi)^2}\left\{a_0^2 - a_{2n}^2 - b_{2n}^2 + \frac{a_{4n}^2}{4} + \frac{b_{4n}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

де $a_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha$; $a_{2n} = \int_{t_0}^{t_0+\omega} z^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)\cos\frac{2n\pi}{K}\varphi(\tau, t_0)\,d\tau$;

$$b_{2n} = \int_{t_0}^{t_0+\omega} z^2(\tau)\left(\frac{A'(\tau)}{2} - q(\tau)\right)\sin\frac{2n\pi}{K}\varphi(\tau, t_0)\,d\tau.$$

Тоді

$$\mu_{2n} = \frac{2n\pi}{K} \pm \frac{K}{(2n\pi)^2}\left\{a_0^2 - a_{2n}^2 - b_{2n}^2 + \frac{a_{4n}^2}{4} + \frac{b_{4n}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad /11/$$

Аналогічно знаходимо наближені розв"язки рівняння

$$\mathcal{C} = -1 \qquad /12/$$

при $\mu = \frac{(2n+1)\pi + \delta}{K}$, звідки

$$\mu_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{K} \pm \frac{2K}{(2n+1)\pi}\left\{\frac{\alpha}{2K^2} + \frac{1}{2^4(2n+1)^2\pi^2}\left[a_{2(2n+1)}^2 + b_{2(2n+1)}^2 - \alpha^2\right]\right\}^{1/2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad /13/$$

Формули /11/ і /13/ дають змогу попередньо оцінити зони стійкості рівняння /1/ при $\mu \to \infty$. Можливі зони стійкості дають так звані неоднорідні інтервали [2] параметра μ, побудовані з використанням коренів рівнянь /10/ і /12/ відносно μ при $\mu \to \infty$, а саме:

$$\left(\bar{\bar{\mu}}_{2n}, \bar{\mu}_{2n+1}\right) = \left(\frac{2n\pi}{K} + \frac{K}{(2n\pi)^2}\left\{a_0^2 - a_{2n}^2 - b_{2n}^2 + \frac{a_{4n}^2}{4} + \frac{b_{4n}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),\right.$$

$$\left.\frac{(2n+1)\pi}{K} - \frac{2K}{(2n+1)\pi}\left\{\frac{\alpha}{2K^2} + \frac{1}{2^4(2n+1)^2\pi^2}\left[a_{2(2n+1)}^2 + b_{2(2n+1)}^2 - \alpha^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),$$

$$\left(\bar{\bar{\mu}}_{2n+1}, \bar{\mu}_{2n+2}\right) = \frac{(2n+1)\pi}{K} + \frac{2K}{(2n+1)\pi}\left\{\frac{\alpha}{2K^2} + \frac{1}{2^4(2n+1)^2\pi^2}\left[a_{2(2n+1)}^2 + b_{2(2n+1)}^2 - \alpha^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad /14/$$

$$\left.\frac{2(n+1)\pi}{K} - \frac{K}{2^2(n+1)^2\pi^2}\left\{a_0^2 - a_{2(n+1)}^2 - b_{2(n+1)}^2 + \frac{a_{4(n+1)}^2}{4} + \frac{b_{4(n+1)}^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

За умови $\mu \to \infty$ довжина цих інтервалів прямує до $\frac{\pi}{K}$.

Тому що в /9/ $C = B$, то розглядаючи рівняння $\mathcal{B} = 3$ і $\mathcal{B} = -1$ і використовуючи /3/ для $\mathcal{B}$ аналогічно попередньому, переконуємось, що і в цьому випадку можливі зони стійкості для рівняння /1/ з точністю до $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ збігаються з інтервалами /14/.

Таким чином, інтервали /14/ є зонами стійкості розв"язків рівняння /1/ залежно від параметра μ при $\mu \to \infty$.

1. К о с т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения, Т.10. № 10. 1974. С. 45-51. 2. П а в л ю к І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. К., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.946

В.Г.Костенко

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОВІДДАЧІ

Шукаємо розв"язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad /1/$$

в області $\Pi\{0<x<l_1, \quad 0<y<l_2, \quad t>0\}$, який би задовольнив початкову

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l_1, \quad 0 \le y \le l_2 \qquad /2/$$

та крайову

$$u_x(0,y,t) = 0, \quad 0 \le y \le l_2, \quad t \ge 0,$$

$$u_y(x,0,t) = 0, \quad 0 \le x \le l_1, \quad t \ge 0, \qquad /3/$$

$$u(l_1,y,t) + \lambda_1(y,t)\, u_x(l_1,y,t) = \mu_1(y,t), \quad 0 \le y \le l_2, \quad t \ge 0,$$

$$u(x,l_2,t) + \lambda_2(x,t)\, u_y(x,l_2,t) = \mu_2(x,t), \quad 0 \le x \le l_1, \quad t \ge 0.$$

умови. У /3/ належить також визначити $\lambda_1(y,t)$, $\lambda_2(x,t)$ при додатковій умові

$$u(0,y,t) = f_1(y,t), \quad 0 \le y \le l_2, \quad t \ge 0,$$

$$u(x,0,t) = f_2(x,t), \quad 0 \le x \le l_1, \quad t \ge 0. \qquad /4/$$

Функції $\mu_1(y,t)$, $\mu_2(x,t)$, $f_1(y,t)$, $f_2(x,t)$ вважаємо заданими і, крім того, $\mu_1(y,0) = \mu_2(x,0) = 0$, $f_1(0,t) = f_2(0,t)$.

Замість сформульованої /1/-/4/ розглядаємо допоміжну задачу на визначення розв"язку рівняння /1/, який би задовольняв /2/ і був неперервно диференційованим у замкненій області $\bar{\Pi}$ з умовами на її межі:

$$
\begin{aligned}
&u_x(0,y,t)=0, \quad 0\le y\le \ell_2, \quad t\ge 0,\\
&u_y(x,0,t)=0, \quad 0\le x\le \ell_1, \quad t\ge 0,\\
&u_x(\ell_1,y,t)=\beta_1(y,t), \quad 0\le y\le \ell_2, \quad t\ge 0,\\
&u_y(x,\ell_2,t)=\beta_2(x,t), \quad 0\le x\le \ell_1, \quad t\ge 0.
\end{aligned} \qquad /5/
$$

Тут $\beta_1(y,t)$, $\beta_2(x,t)$ вважаємо невідомими, які підлягають визначенню з умови /4/.

Припустимо, що остання задача розв"язана. Тоді стають відомими не лише $u(x,y,t), \beta_1(y,t)$, $\beta_2(x,t)$, а й $u(\ell_1,y,t)$, $u(x,\ell_2,t)$, що дає змогу знаходити $\lambda_1(y,t)$ і $\lambda_2(x,t)$ з двох останніх умов /3/.

Розв"язок допоміжної задачі /1/, /2/, /4/, /5/ шукаємо у вигляді

$$
u=v(x,y,t)+\frac{x^2}{2\ell_1}\beta_1(y,t)+\frac{y^2}{2\ell_2}\beta_2(x,t). \qquad /6/
$$

Тоді

$$
\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=F(x,y,t), \qquad /7/
$$

$$
v\big|_{t=0}=0, \qquad /8/
$$

$$
\begin{aligned}
&v_x(0,y,t)=0, \qquad v_y(x,0,t)=0,\\
&v_x(\ell_1,y,t)=0, \qquad v_y(x,\ell_2,t)=0,
\end{aligned} \qquad /9/
$$

де

$$
F(x,y,t)=a^2\left[\frac{1}{\ell_1}\beta_1(y,t)+\frac{1}{\ell_2}\beta_2(x,t)+\frac{x^2}{2\ell_1}\frac{\partial^2\beta_1}{\partial y^2}+\frac{y^2}{2\ell_2}\frac{\partial^2\beta_2}{\partial x^2}\right]-\frac{x^2}{2\ell_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial t}-\frac{y^2}{2\ell_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial t},
$$

якщо

$$
\beta_{1,y}(0,t)=\beta_{2,x}(0,t)=\beta_{1,y}(\ell_2,t)=\beta_{2,x}(\ell_1,t)=0. \qquad /10/
$$

Розв"язок задачі /7/-/9/ зображаємо рядом

$$
v(x,y,t)=\sum_{m,s=0}^{\infty} T_{ms}(t)\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y, \qquad /11/
$$

і враховуємо аналогічне зображення для

$$
F(x,y,t)=\sum_{m,s=0}^{\infty} a_{ms}(t)\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y. \qquad /12/
$$

де

$$
a_{ms}(t)=\frac{4}{\ell_1\ell_2}\int_0^{\ell_1}d\xi\int_0^{\ell_2}\Big\{a^2\Big[\frac{1}{\ell_1}\beta_1(\eta,t)+\frac{1}{\ell_2}\beta_2(\xi,t)+\frac{\xi^2}{2\ell_1}\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\eta^2}+\frac{\eta^2}{2\ell_2}\frac{\partial^2\beta_2}{\partial\xi^2}\Big]-\frac{\xi^2}{2\ell_1}\frac{\partial\beta_1(\eta,t)}{\partial t}-\frac{\eta^2}{2\ell_2}\frac{\partial\beta_2(\xi,t)}{\partial t}\Big\}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}\xi\cos\frac{s\pi}{\ell_2}\eta\, d\eta \qquad /13/
$$

Тоді для $T_{ms}(t)$ маємо задачу

$$T'_{ms}(t) + a^2\lambda^2_{ms}\, T_{ms}(t) = a_{ms}(t), \qquad /14/$$

$$T_{ms}(0) = 0, \qquad /15/$$

де $\lambda^2_{ms} = \pi^2\left(\frac{m^2}{\ell_1^2} + \frac{s^2}{\ell_2^2}\right)$, і тому

$$T_{ms}(t) = \int_0^t a_{ms}(\tau)\, e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\, d\tau. \qquad /16/$$

Отже, розв"язок задачі /1/, /2/, /5/ має вигляд

$$u(x,y,t) = \sum_{m,s=0}^{\infty}\int_0^t a_{ms}(\tau)\, e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)}\, d\tau \cos\frac{s\pi}{\ell_2}y \cos\frac{m\pi}{\ell_1}x + \frac{x^2}{2\ell_1}\beta_1(y,t) + \frac{y^2}{2\ell_2}\beta_2(x,t) \qquad /17/$$

Тепер умова /4/ дає

$$f_1(y,t) = \int_0^t \sum_{m,s=0}^{\infty} a_{ms}(\tau)\, e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)} \cos\frac{s\pi}{\ell_2}y\, d\tau + \frac{y^2}{2\ell_2}\beta_2(0,t), \qquad /18/$$

$$f_2(x,t) = \int_0^t \sum_{m,s=0}^{\infty} a_{ms}(\tau)\, e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)} \cos\frac{m\pi}{\ell_1}x\, d\tau + \frac{x^2}{2\ell_1}\beta(0,t) \qquad /19/$$

і тим самим з врахуванням /13/ задача /1/, /2/, /4/, /5/ зводиться до системи двох інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра з невідомими $\beta_1(y,t)$ і $\beta_2(x,t)$.

Інтегруючи частинами в /13/, використовуючи при цьому /10/ і зображаючи рядами

$$x^2 = \frac{4\ell_1^2}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^m}{m^2}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x, \quad 0 \le x \le \ell_1,$$

$$y^2 = \frac{4\ell_2^2}{\pi^2}\sum_{s=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^s}{s^2}\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y, \quad 0 \le y \le \ell_2,$$

систему /18/, /19/ зводимо до системи двох інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду

$$f_1(y,t) = \int_0^t \left[\int_0^{\ell_2} \mathcal{K}_{11}(y,t;\eta,\tau)\beta_1(\eta,\tau)d\eta + \int_0^{\ell_1}\mathcal{K}_{12}(y,t,\xi,\tau)\beta_2(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau, \qquad /20/$$

$$f_2(x,t) = \int_0^t \left[\int_0^{\ell_2} \mathcal{K}_{21}(x,t;\eta,\tau)\beta_1(\eta,\tau)d\eta + \int_0^{\ell_1}\mathcal{K}_{22}(x,t,\xi,\tau)\beta_2(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau, \qquad /21/$$

де

$$\mathcal{K}_{11}(y,t,\eta,\tau) = \frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}{}' (-1)^m e^{-a^2\lambda^2_{ms}(t-\tau)} \cos\frac{s\pi}{\ell_2}\eta \cos\frac{s\pi}{\ell_2}y,$$

$$\mathcal{K}_{12}(y,t;\xi,\tau)=\frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}(-1)^s e^{-a^2\lambda_{ms}^2(t-\tau)}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}\xi\cos\frac{s\pi}{\ell_2}y,$$

$$\mathcal{K}_{21}(x,t;\eta,\tau)=\frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}(-1)^m e^{-a^2\lambda_{ms}^2(t-\tau)}\cos\frac{s\pi}{\ell_2}\eta\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x,$$

$$\mathcal{K}_{22}(x,t;\xi,\tau)=\frac{4a^2}{\ell_1\ell_2}\sum_{m,s=0}^{\infty}(-1)^s e^{-a^2\lambda_{ms}^2(t-\tau)}\cos\frac{m\pi}{\ell_1}\xi\cos\frac{m\pi}{\ell_1}x \qquad /22/$$

У просторі змінних $x,\ y,\ t$ розглядаємо поверхню S_t, точки якої визначаються двома системами нерівностей: $x=0,\ 0\le y\le\ell_2,\ t\ge 0$ і $y=0,\ 0\le x\le\ell_1,\ t\ge 0$. Інколи аналогічні поверхні називають часоподібними. У нашому випадку S_t часоподібний двогранний кут. Якщо на S_t ввести

$$f(x,y,t)=\begin{cases} f_1(y,t), & x=0,\quad 0\le y\le\ell_2,\ t\ge 0\\ f_2(x,t), & y=0,\quad 0\le x\le\ell_1,\ t\ge 0,\end{cases}$$

$$\beta(x,y,t)=\begin{cases} \beta_1(y,t), & x=0,\quad 0\le y\le\ell_2,\ t\ge 0\\ \beta_2(x,t), & y=0,\quad 0\le x\le\ell_1,\ t\ge 0,\end{cases}$$

$$\mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\begin{cases} \mathcal{K}_{11}(y,t;\eta,\tau), & x=\xi=0,\quad 0\le y,\eta\le\ell_2,\ 0\le\tau\le t\\ \mathcal{K}_{12}(y,t;\xi,\tau), & x=\eta=0,\quad 0\le y\le\ell_2,\ 0\le\xi\le\ell_1,\ 0\le\tau\le t\\ \mathcal{K}_{21}(x,t;\eta,\tau), & y=\xi=0,\quad 0\le x\le\ell_1,\ 0\le\eta\le\ell_2,\ 0\le\tau\le t\\ \mathcal{K}_{22}(x,t;\xi,\tau), & y=\eta=0,\quad 0\le x,\xi\le\ell_1,\ 0\le\tau\le t,\end{cases}$$

то система /20/, /21/ стає інтегральним рівнянням з невідомою функцією $\beta(x,y,t)$ на S_t, тобто

$$f(x,y,t)=\iint_{S_t}\mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\,\beta(\xi,\eta,\tau)\,dS_\tau. \qquad /23/$$

Відомо [1], що класичний розв"язок задачі /1/-/3/ існує, якщо $\lambda_1(y,t),\lambda_2(x,t),\mu_1(y,t),\mu_2(x,t)\in H^{2,1}(S_t),\ \lambda_1(y,t),\lambda_2(x,t)\ge\lambda_0>0$ і початкові та крайові умови узгоджені до першого порядку.

Єдиність розв"язку рівняння /23/ є наслідком єдиності розв"язку змішаної задачі /1/, /2/, /5/ та єдиності розв"язку задачі Коші /3/ для /1/ з початковими умовами на S_t /умова /4/ та перші дві умови /3//.

Інтегральний оператор

$$A_h\beta = \iint_{S_{t-h}} \mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\beta(\xi,\eta,\tau)dS_\tau = f(x,y,t)$$

при довільному $h>0$ неперервний, оскільки елементи його ядра зображаються рівномірно збіжними рядами в області $0\leq x,\xi\leq \ell_1$, $0\leq y,\eta\leq \ell_2$, $0\leq \tau\leq t-h$ в припущенні $\beta(x,y,t)\in H^{2}(S_2)$.

Якщо існує $\lim\limits_{h\to 0} A_h\beta = A_\beta$, то довизначивши за неперервністю A_h при $h=0$, прийнявши

$$\iint_{S_t} \mathcal{K}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)\beta(\xi,\eta,\tau)dS_\tau = A_\beta,$$

оператор стає неперервним, включаючи і $h=0$. Існування $\lim\limits_{h\to 0} A_h\beta$ з врахуванням /10/, /20/ - /22/ є наслідком того, що

$$\beta_{1,s}(\tau)=\frac{2}{\ell_2}\int_0^{\ell_2}\beta_1(\eta,\tau)\cos\frac{s\pi}{\ell_2}\eta\, d\eta = 0\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

$$\beta_{2,s}(\tau)=\frac{2}{\ell_1}\int_0^{\ell_1}\beta_2(\xi,\tau)\cos\frac{m\pi}{\ell_1}\xi\, d\xi = 0\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\lim_{\tau\to t}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{-\left(\frac{am\pi}{\ell_1}\right)^2(t-\tau)} = \frac{1}{2}$$

Отже, регулярний за Тихоновим [3] наближений розв"язок рівняння /23/ можна визначити як точну нижню границю деякого згладжуючого функціоналу, наприклад,

$$M_{h,\alpha}(\beta) = \rho^2_{L^2(S_{t-h})}(A_h\beta, f) + \alpha\Omega(\beta),$$

де

$$\Omega(\beta) = \iint_{S_{t-h}}\left[q\beta^2 + p_1\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2 + p_2\left(\frac{\partial\beta}{\partial\eta}\right)^2 + p_3\left(\frac{\partial\beta}{\partial\tau}\right)^2\right]dS_\tau;$$

$$q, p_1, p_2 \geq 0,\quad p_3 \geq p_0 > 0;$$

$$\rho^2_{L^2(S_{t-h})}(A_h\beta, f) = \iint_{S_{t-h}}(A_h\beta - f)^2 dS_t$$

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.
3. Mizohata S. Unicite du prolongement de solutions pour quelques operateurs differentiels paraboliques // Mem Coll Sci Univ Kyoto 1958. Ser A1. Vol. 31. p. 219-239.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517.948

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Обернена задача логарифмічного потенціалу, як відомо, полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв"язну область $\mathcal{D}$, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область $\mathcal{D}$ площини $z = z(x,y)$, що містить початок координат, причому $z(0)=0,\ z'(0)>0$. Функцію $z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma z_*(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{u_e(z(\tau))\,d\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$u_e(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z}, \quad z_*(t) = \overline{z\left(\frac{1}{\bar t}\right)}, \quad |t|<1; \qquad /2/$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k t^k, \quad \alpha_1>0 \qquad /3/$$

Розглянемо випадок, коли

a) $u_l(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^6}$,

б) $u_l(z) = \frac{1}{z} + \frac{b}{z^7}$,

де a), b) – комплексні числа; $\sigma = 1$.

Підставляючи а/, б/, /3/ в /1/, отримаємо нелінійні системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{6a\alpha_6}{\alpha_1^7}, \\ \bar{\alpha}_6 = \frac{a}{\alpha_1^6}, \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \ldots = 0; \end{cases} \qquad (a')$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{7b\alpha_7}{\alpha_1^8}, \\ \bar{\alpha}_7 = \frac{b}{\alpha_1^7}, \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = \ldots = 0. \end{cases} \qquad (б')$$

Системи /а'/ /б'/ мають єдиний розв"язок (α_1, α_6), (α_1, α_7) відповідно при

$$|a|^2 \leq \frac{6^5}{7^7}, \quad |b|^2 \leq \frac{7^6}{8^8}, \qquad /3'/$$

які задовольняють умову

$$z'(t) \neq 0 \qquad \text{при} \qquad |t| < 1.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

<u>Теорема.</u> Для потенціалів а/, б/, які задовольняють умову /3'/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має єдиний розв"язок у класі конформних відображень круга $|t| < 1$. При

$$|a|^2 > \frac{6^5}{7^7}, \quad |b|^2 > \frac{7^6}{8^8}$$

задача в цьому класі функцій розв"язку не має.

<u>Приклад.</u> Для потенціалів а/, б/ при

$$a = \sqrt{\frac{6^5}{7^7}}, \qquad b = \sqrt{\frac{7^6}{8^8}}$$

єдиними розв"язками в класі конформних відображень є відповідні функції

$$z(t)=\sqrt{\frac{6}{7}}\,t+\frac{1}{\sqrt{42}}\,t^6,$$

$$z(t)=\sqrt{\frac{7}{8}}\,t+\frac{1}{\sqrt{56}}\,t^7.$$

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 519.21

Я.І.Єлейко, О.І.Єлейко

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З ДОВІЛЬНИМ ЧИСЛОМ ТИПІВ І ПЕРЕТВОРЕННЯМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ВІКУ

Нехай T -деяка абстрактна множина, яку називатимемо множиною типів. На множині T виділена σ -алгебра її підмножин $\mathcal{U}$, яка містить всі одноточкові множини, крім цього, породжується вона зчисленною кількістю своїх елементів. Розглядається популяція, що складається з деякого числа частинок, кожній з яких приписується певний тип, тобто елемент множини T. Закон еволюції популяції полягає в тому, що новонароджена частинка незалежно від наявності інших частинок і передісторії розвитку популяції живе випадковий час $\tau(x)>0$, після чого перетворюється в деяку сукупність новонароджених частинок різних типів.

Нехай $\xi(t,S)$ - число частинок у момент часу t, типи яких належать множині $S\subset\mathcal{U}$. У початковий момент часу допускаємо існування однієї частинки фіксованого типу. Тоді $\xi_\tau(S)$ - число потомків однієї частинки, типи яких належать множині $S\subset\mathcal{U}$. Слід відзначити, що $\xi(t,S)$, $\xi_\tau(S)$ - випадкові міри.

Позначимо

$$A_x(t,S)=M_x\{\xi(t,S)\};$$

$$M(x,du,dy)=M_x\{\xi_\tau\in du/\tau=y\}\,G_x(dy),$$

де M_x - умовне математичне сподівання, за умови, що в початковий момент наявна одна частинка типу x нульового віку; $G_x(dy)=P_x\{\tau\in dy\}$.

Припустимо, що ядро $M(x, du, dy)$ критичне і незвідне [2]. Тоді існує така інваріантна міра $\mu(dx)$ і власна функція $h(x) \geq 0$ μ майже всюди, що

$$\int_T M_x(\xi_\tau(du)) h(u) = h(x),$$

$$\int_T M_x(\xi_\tau(du)) \mu(dx) = \mu(du).$$

<u>Теорема I.</u> Нехай ядро $M(x, du, dy)$ - критичне і незвідне, функція розподілу $G_x(t)$ - нерешітчаста і виконуються умови

$$m = \int_T \mu(dx) \int_0^\infty \int_T M(x, du, dy)\, y\, h(y) < \infty; \qquad /1/$$

$$\int_T \mu(dx) M_x \tau < \infty; \qquad /2/$$

$$\mu\{x \in T : \sup_{t \geq 0} A_x(t, T)\} > 0,$$

тоді

$$\lim_{t \to \infty} A_x(t, s) = \frac{1}{m} h(x) \int_S \mu(dy) \int_0^\infty dt\, (1 - G_y(t))$$

для μ майже всіх $x \in T$.

<u>Доведення.</u> Для $A_x(t, s)$ за формулою повної ймовірності за моментом τ має місце

$$A_x(t, s) = (1 - G_x(t))\, \delta_x(s) + \int_0^t \int_T M(x, du, dz)\, A_u(t - z, s), \qquad /3/$$

де

$$\delta_x(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin S, \\ 1 & \text{при } x \in S. \end{cases}$$

Розв"язок рівняння /3/ записується у вигляді

$$A_x(t, s) = \int_T \int_0^t \delta_y(s) (1 - G_y(t - u))\, R_x(dy, dy), \qquad /4/$$

де

$$R_x(dy, dy) = \sum_{k \geq 0} M^{k*}(x, du, dy),$$

$M^{K*}(x, du, dy)$ - K - кратна згортка ядра $M(x, du, dy)$.
Для знаходження границі /4/ достатньо перевірити виконання умов теореми 2 із [2]. В нашому випадку ці умови можна отримати із /2/. Теорема доведена.

У випадку, коли функція розподілу $G_x(t)$ решітчаста з кроком δ для всіх x, тобто $\sum_n P_x\{\tau = n\delta + \rho(x)\} = 1$, де $\rho(x)$ - функція зсуву, тоді ядро $M(x, dy, dt)$ також решітчасте з функцією зсуву $\rho(x)$ і кроком δ.

Теорема 2. Нехай ядро $M(x, dy, dt)$ решітчасте з кроком $\delta > 0$ і функцією зсуву $\rho(x)$. Якщо виконуються умови теореми 1 і

$$\sum_n \int_T \mu(dx) P_x\{\tau = n\delta + \rho(x)\} < \infty,$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty} A_x(n\delta + \rho(x), S) = \frac{1}{m} h(x) \sum_K \int_S \mu(dy) P_y\{\tau = n\delta + \rho(y)\}$$

для μ майже всіх x.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 і спирається на теорему 3 із [2]. Подібний результат для гіллястих процесів Беллмана-Харріса отриманий у статті [1].

1. Е л е й к о Я.И. Асимптотическое поведение первого момента ветвящегося процесса Беллмана-Харриса с произвольным числом типов // Некоторые вопросы теории случайных процессов. К., 1984. С.32-35. 2. Ш у р е н к о в В.М. К теории марковского восстановления // Теория вероятностей и ее применение. 1984. Т.96. № 2. С.248-263.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ N - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Досліджуємо деякі достатні умови існування N - майже періодичного розв'язку рівняння

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad /1/$$

права частина якого є S^p -майже періодичною функцією змінної x, рівномірно відносно y і y'. Аналіз істотно грунтується на результатах, отриманих в [1, 2] для рівняння

$$y'' = \varphi(x)y + \psi(x)y' + \omega(x) \qquad /2/$$

Одержані результати сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Нехай у рівнянні /2/

1/ $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ неперервні на всій дійсній осі, причому

$$0 < \alpha^2 < \varphi(x) < \beta^2; \quad \sup_{-\infty<x<+\infty} |\psi(x)| < \frac{\beta^2-\alpha^2}{|\beta|}, \quad \beta^2 < 2\alpha^2;$$

2/ $\omega(x)$ - сумовна функція разом із своїм p -м степенем / $p \geq 1$ / у кожному скінченному інтервалі, для якої інтеграл

$$\Omega(x) = \int_0^x \omega(t)dt \qquad /3/$$

обмежений. Тоді існує розв"язок $y(x)$ рівняння /2/ такий, що

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |y(x)| \leq \frac{2|\beta| \sup_{-\infty<x<+\infty} |\Omega(x)|}{2\alpha^2-\beta^2}. \qquad /4/$$

Теорема 2. Нехай у рівнянні /2/

1/ $\varphi(x)$ - неперервна функція на всій дійсній осі;

2/ $\psi(x)$ - неперервно диференційовна функція на всій дійсній осі;

3/ $0<\alpha^2< \varphi(x)+\frac{1}{4}\psi^2(x)-\frac{1}{2}\psi'(x)<\beta^2$;

4/ інтеграл /3/, а також інтеграл

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(t)dt$$

обмежені. Тоді існує розв"язок рівняння /2/, для якого

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |y(x)| \leq \frac{2|\beta| \sup_{-\infty<x<+\infty} |\Omega(x)|}{\alpha^2} \qquad /5/$$

Теорема 3. Нехай

1/ $f(u,v,w)$ - визначена функція для всіх $u \in J =]-\infty, +\infty[$, $(v,w) \in D$;

2/ $f(u,v,w)$ - S^p- майже періодична функція по u, рівномірно відносно $(v,w) \in D$, причому інтеграл

$$\Phi(u,v,w) = \int_0^u f(t,v,w)dt \qquad /6/$$

обмежений в області $J \times D$;

3/ існують в області $J \times D$ неперервні частинні похідні $f'_v(u,v,w)$ і $f'_w(u,v,w)$ такі, що

$$0<\alpha^2<f'_v(u,v,w)<\beta^2, \sup_{(u,v,w)\in J\times D}|f'_w(u,v,w)|<\frac{\beta^2-\alpha^2}{|\beta|}, \beta^2<2\alpha^2.$$

Тоді, якщо існує обмежений на J розв"язок $y(x)$ рівняння /1/, то він є N - майже періодичним.

<u>Доведення.</u> Нехай $y(x)$ обмежений на J розв"язок рівняння /1/. Приймемо $\Delta(x,\tau)=y(x+\tau)-y(x)$. Тоді з /1/ отримуємо

$$\frac{d^2\Delta(x,\tau)}{dx^2}=f(x+\tau, y(x+\tau), y'(x+\tau))-f(x,y(x),y'(x))=$$

$$=f_1(x,\tau)\Delta(x,\tau)+f_2(x,\tau)\frac{d\Delta(x,\tau)}{dx}+f(x+\tau,y(x),y'(x))-f(x,y(x),y'(x)). \qquad /7/$$

Функції $f_1(x,\tau)$, $f_2(x,\tau)$ на основі умови 3/ теореми 3 задовольняють умову 1/ теореми 1, а функція

$$f_3(x,\tau)=f(x+\tau, y(x), y'(x))-f(x,y(x),y'(x))$$

на основі умови 2/ теореми 3 задовольняє умову 2/ теореми 1. Отже, за теоремою 1 існує розв"язок рівняння /7/, для якого

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|\Delta(x,\tau)|\le\frac{2|\beta|\sup_{x\in J}\left|\int_0^x f_3(t,\tau)dt\right|}{2\alpha^2-\beta^2} \qquad /8/$$

За умовою $f(u,v,w)$ - S^p - майже періодична функція змінної u, рівномірно відносно v,w. Це означає, що для будь-якого дійсного числа $\varepsilon>0$ кожний інтервал $]\alpha,\alpha+1[$ містить хоча б один S^p - майже період $\tau=\tau(\varepsilon)$, що

$$\sup_{-\infty<u<+\infty}\left(\int_u^{u+1}|f(t+\tau,v,w)-f(t,v,w)|^p dt\right)^{1/p}<\varepsilon. \qquad /9/$$

Розглянемо тепер нерівність /8/, а також множину значень $|x|<N$, де $N>0$ довільне дійсне число. Приймемо $k=[N]+1$. Тоді

$$\left|\int_0^x f_3(t,\tau)dt\right|\le\int_0^k|f_3(t,\tau)|dt=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{\xi_i}^{\xi_i+1}|f_3(t,\tau)|dt, \qquad /10/$$

де $\xi_0=0$, $\xi_{i+1}=\xi_i+1$. Застосувавши тепер в /10/ нерівність Гельдера, на основі /9/ маємо

$$\left|\int_0^x f_3(t,\tau)dt\right|\le\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{\xi_i}^{\xi_i+1}|f_3(t,\tau)|^p dt\right)^{1/p}<k\varepsilon. \qquad /11/$$

Далі, беручи до уваги /11/, з /8/ отримуємо

$$|y(x+\tau)-y(x)|<\frac{2\kappa|\beta|}{2\alpha^2-\beta^2}\cdot\varepsilon$$

для всіх $x\in\,]-N,N[$, тобто $y(x)$ - N - майже періодичний розв"язок рівняння /1/.

Теорема 4. Нехай

1/ функція $f(u,v,w)$ визначена для всіх $u\in J=\,]-\infty,+\infty[$ і всіх $(v,w)\in\mathcal{D}$, а також є S^{p} - майже періодична по u , рівномірно відносно $(v,w)\in\mathcal{D}$;

2/ в області $J\times\mathcal{D}$ існують неперервні частинні похідні $f_v'(u,v,w)$ і $f_w'(u,v,w)$, а також неперервна частинна похідна $f_{uv}''(u,v,w)$, причому

$$0<\alpha^2<f_v'(u,v,w)+\frac{1}{4}\left(f_w'(u,v,w)\right)^2-\frac{1}{2}f_{uv}''(u,v,w)<\beta^2;$$

3/ інтеграли

$$\int_0^u f_v'(t,v,w)dt,\qquad \int_0^u f_w'(t,v,w)dt$$

обмежені в області $J\times\mathcal{D}$. Тоді, якщо існує обмежений для всіх $x\in J$ розв"язок $y(x)$ рівняння /1/, то він є N - майже періодичним.

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3, тільки замість нерівності /4/ треба використовувати нерівність /5/ і теорему 2.

1. Л і с е в и ч Л.М. Деякі достатні умови існування обмеженого і майже періодичного розв"язку одного лінійного диференціального рівняння другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1981. Вип. 18. С.93-97. 2. Л і с е в и ч Л.М. Про одну достатню умову існування обмеженого і майже періодичного розв"язку лінійного диференціального рівняння другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 24. С.93-96. 3. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., 1953.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 536.24.02

Ю.М.Коляно, Б.В.Ковальчук

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМОЧУТЛИВИХ ОРТОТРОПНИХ ТІЛ

Розглянемо термочутливий ортотропний півпростір $z > 0$, який піддається раптовому нагріванню по поверхні $z = 0$ скупченим джерелом тепла потужністю q, тобто

$$\lambda_3(t)\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=0} = -q\,\delta(x)\,\delta(y)\,S_+(\tau), \qquad /1/$$

де $\lambda_i(t)$ – коефіцієнти теплопровідності в напрямках x_i $/i = 1, 2, 3/$; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; $S_+(\tau)$ – асиметрична одинична функція; τ – час.

Для визначення виникаючого при цьому нестаціонарного температурного поля використаємо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_2(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_3(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = C_v(t)\,\dot{t}, \qquad /2/$$

де $C_v(t)$ – коефіцієнт об"ємної теплоємності.

Початкова температура півпростору допускається сталою, тобто

$$t\Big|_{\tau=0} = t_н \qquad /3/$$

На нескінченості мають місце граничні умови

$$t\Big|_{\substack{|x|\to\infty \\ |y|\to\infty}\ z\to\infty} = t_н,\quad \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{|x|\to\infty} = 0,\quad \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{|y|\to\infty} = 0 \qquad /4/$$

Для багатьох матеріалів [1 – 3] залежності коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_i(t)$ і об"ємної теплоємності $C_v(t)$ від температури мають однаковий характер, тобто

$$a_i = \frac{\lambda_i(t)}{C_v(t)} = const.$$

У цьому випадку крайова задача /1/–/4/ повністю лінеаризується за допомогою змінної Кіргофа

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda_3^0}\int_{t_н}^{t}\lambda_3(\zeta)\,d\zeta \qquad /5/$$

і набирає вигляду

$$\lambda_3^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\Big|_{z=0} = -q\,\delta(x)\delta(y)S_+(\tau), \qquad /6/$$

$$\lambda_1^0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_2^0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_3^0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = C_v^0 \dot{\vartheta}, \qquad /7/$$

$$\vartheta\Big|_{t=0} = 0, \qquad /8/$$

$$\vartheta\Big|_{\substack{|x|\to\infty \\ |y|\to\infty}\; z\to\infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{|x|\to\infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Big|_{|y|\to\infty} = 0, \qquad /9/$$

де λ_i^0 – опорні коефіцієнти теплопровідності в напрямках x_i і об"ємної теплоємності.

Застосовуючи інтегральні перетворення Фур"є по x, y і Лапласа по τ, розв"язок крайової задачі /6/-/9/ знаходимо у вигляді

$$\vartheta = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{erfc\,\frac{1}{2}\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)\frac{C_v}{\tau}}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad /10/$$

де $erfc\,\zeta = 1 - erfc\,\zeta$; $erf\zeta$ – інтеграл ймовірності;

$$X = \frac{x}{\sqrt{\lambda_1^0}};\; Y = \frac{y}{\sqrt{\lambda_2^0}};\; Z = \frac{z}{\sqrt{\lambda_3^0}};\; Q = \frac{q}{\sqrt{\lambda_1^0\lambda_2^0\lambda_3^0}}$$

При стаціонарному тепловому режимі маємо

$$\vartheta_s = \frac{Q}{2\pi\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \qquad /11/$$

Для нетермочутливого ортотропного тіла $/\lambda_i = \lambda_i^0,$ $\theta_j = t_j - t_H$ $/j = 1,2$ // при $z=0,\ y=0,\ x=\frac{d}{2}$ і $z=0,\ x=0,$ $y=\frac{d}{2}$ із /11/ відповідно одержуємо

$$\theta_1 = \frac{q}{\pi\sqrt{\lambda_2^0\lambda_3^0}\,d}, \quad \theta_2 = \frac{q}{\pi\sqrt{\lambda_1^0\lambda_3^0}\,d}. \qquad /12/$$

Із /12/ випливає, що

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \qquad /13/$$

Опустивши датчик на глибину $z = b$ при $x = 0,\ y = d$ і вимірявши надлишкову температуру $\theta_3 = t_3 - t_н$, для нетермочутливого ортотропного тіла з /11/ знайдемо

$$\theta_3 = \frac{q}{2\pi\sqrt{b^2\lambda_1^0\lambda_2^0 + d^2\lambda_1^0\lambda_3^0}} \qquad /14/$$

Використовуючи другу формулу в /12/, а також /13/, замість /14/ записуємо

$$\theta_3 = \frac{q\,\theta_2}{2\sqrt{q^2 + (b\pi\lambda\theta_1)^2}} \qquad /15/$$

Для ізотропного нетермочутливого тіла $/\lambda_i = \lambda_i^0 = \lambda_э/$ із /11/ випливає

$$\theta_S = t_S - t_н = \frac{q}{2\pi\lambda_э\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad /16/$$

При $x = 0,\ y = \frac{d}{2},\ z = 0$ з /16/ одержуємо

$$q = \pi\theta_э\lambda_э d \qquad /17/$$

Отже,

$$\theta_3 = \frac{\theta_э\lambda_э\theta_2}{2\sqrt{(\theta_э\lambda_э)^2 + (\varepsilon\theta_1\lambda_2^0)^2}}, \qquad /18/$$

де $\varepsilon = \frac{b}{d}$

Із /18/ випливає, що λ_2^0 визначається за формулою

$$\lambda_2^0 = \sqrt{\theta_2^2 - (2\theta_3)^2}\ \frac{\theta_э\lambda_э}{2\varepsilon\theta_1\theta_3} \qquad /19/$$

Враховуючи /19/, із /13/ знаходимо

$$\lambda_1^0 = \sqrt{\theta_2^2 - (2\theta_3)^2}\ \frac{\theta_э\lambda_э\theta_1}{2\varepsilon\theta_2^2\theta_3} \qquad /20/$$

З першої формули /12/, беручи до уваги /17/ і /19/, маємо

$$\lambda_3^0 = \frac{2\varepsilon\,\theta_э\lambda_э\theta_3}{\theta_1\sqrt{\theta_2^2-(2\theta_3)^2}} . \qquad /21/$$

Знаючи коефіцієнти теплопровідності λ_i^0 / $i = 1, 2, 3$/, визначимо коефіцієнти об"ємної теплоємності C_v^0 і температуропровідності a_i. Згідно з формулою /10/ для нетермочутливого тіла / $\lambda_i = \lambda_i^0$ / у момент часу τ_0 при $x=0, y=\frac{d}{2}, z=0$ з врахуванням другої формули /12/ одержуємо, що надлишкова температура має вигляд

$$\theta^*(F_0) = \theta\Big|_{\substack{x=0\\ y=\frac{d}{2},\\ z=0}} = \theta_2\,erfc\,\frac{1}{4\sqrt{F_0}} , \qquad /22/$$

де $F_0 = \frac{a_2\tau}{d^2}$ – критерій Фур"є.

Тоді коефіцієнт температуропровідності в напрямку y визначається за формулою

$$a_2 = \frac{F_0\,d^2}{\tau_0} , \qquad /23/$$

а коефіцієнт об"ємної теплоємності

$$C_v^0 = \frac{\lambda_2}{a_2} = \frac{\sqrt{\theta_2^2-(2\theta_3)^2}\,\theta_э\lambda_э\tau_0}{2\delta d\,\theta_1\theta_3 F_0} . \qquad /24/$$

Маючи вирази C_v^0, λ_1^0, λ_3^0 знаходимо коефіцієнти температуропровідності в напрямках x і z за формулами

$$a_1 = \left(\frac{\theta_1 d}{\theta_2}\right)^2 \frac{F_0}{\tau_0} , \qquad a_3 = \frac{4\delta^2\theta_3^2 F_0}{(\theta_2^2-\theta_3^2)\tau_0} . \qquad /25/$$

Для термочутливих ортотропних тіл з незалежними від температури коефіцієнтами температуропровідності пропонується наступний метод визначення теплофізичних характеристик. Оскільки a_i не залежить від температури на всьому діапазоні зміни температур, то їх можна визначити за формулами /23/, /25/ відповідно до інтервалу температур, в якому всі теплофізичні характеристики не змінюються залежно від температури.

Продиференціювавши змінну Кіргофа /5/ при $x=0$, $y=\frac{d}{2}$, $z=0$ та її вираз

$$\vartheta\Big|_{\substack{x=0\\ y=\frac{d}{2}\\ z=0}} = \frac{q\,\mathrm{erfc}\,\frac{1}{4\sqrt{F_o}}}{\pi\sqrt{\lambda_1^o\lambda_3^o}\;d} \qquad /26/$$

по τ і прирівнявши результати, одержимо

$$\lambda_3(t_1)=\sqrt{\frac{\lambda_3^o}{\lambda_1^o}}\;\frac{q e^{-\frac{1}{16F_o}}}{4\pi^{3/2}F_o^{3/2}\frac{\partial t_1}{\partial F_o}d^2}, \qquad /27/$$

де $t_1=t(0,\frac{d}{2},0,\tau)$.

У виразі /27/ температура t_1 вимірюється протягом всього процесу нагрівання.

Коефіцієнт об"ємної теплоємності

$$C_v(t_1)=\frac{\lambda_3(t_1)}{a_3}. \qquad /28/$$

Всі інші коефіцієнти теплопровідності шукаємо за формулами

$$\lambda_j(t_1)=a_j\,C_v(t_1) \qquad /j=2,3/. \qquad /29/$$

Запропонований спосіб визначення комплексу теплофізичних характеристик ортотропних тіл вимагає заглиблення датчика температури у внутрішній об"єм досліджуючого тіла.

1. Б о р е н Ван. Дефекты в кристаллах. М., 1962.
2. Б е р м а н Р. Теплопроводность твердых тел. М., 1979.
3. К о л я н о Ю.М. Нестационарное температурное поле в термочувствительном теле при разрывном граничном условии второго рода // Инж.-физ. журн. 1987. Т.53. № 3. С.459-467.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.564.3:530.145

П.І.Тацуняк

МНОЖЕННЯ ДОДАТНОЧАСТОТНИХ ФУНКЦІЙ ГРІНА ДВОВИМІРНОЇ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Як відомо [1], одним із розв"язків неоднорідного рівняння Клейна-Гордона $(\Box - m^2)G(x) = -\delta(x)$ є функція Гріна $G(x)$ у вигляді сингулярної функції Паулі-Йордана

$$\Delta^c(x;m^2) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dk\cdot e^{ikx}}{k^2+m^2-i\varepsilon}, \qquad /1/$$

що відіграє важливу роль причинної функції квантової теорії поля. Тут вибрано метрику типу $x^2 = x_1^2 - x_0^2$. Причинна функція $\Delta^c(x;m^2)$ є сумою додатно- і від"ємно-частотних сингулярних функцій

$$\Delta^c(x;m^2) = \Delta^+(x;m^2) + \Delta^-(x;m^2), \qquad /2/$$

де

$$\Delta^{\pm}(x;m^2) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int dk\,\theta(\pm k_0)\delta(k^2+m^2)e^{ikx} \qquad /2a/$$

$\theta(k_0)$ - функція одиничного стрибка.

Нижче обчислюються вирази $\Delta^+(x;a^2)\Delta^+(x;b^2)$ та $[\Delta^+(x;a^2)]^n$, що використовуються у розв"язках рівнянь моделей теорії поля [2].

Згідно /2a/ записуємо

$$\Delta^+(x;a^2)\Delta^+(x;b^2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int dk\,dq\,\theta(k_0)\theta(q_0)\delta(k^2+a^2)\delta(q^2+b^2)e^{i(k+q)x} \qquad /3/$$

Помножимо /3/ на вираз, тотожний одиниці

$$\int dp\,\delta(p-k-q)\int dc^2\delta(p^2+c^2) \equiv 1,$$

$$\Delta^+(x;a^2)\Delta^+(x;b^2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int dc^2\int dp\,e^{ipx}\delta(p^2+c^2)\int dq\,\theta(p_0-q_0)\theta(q_0)\delta[(p-q)^2+a^2]\times$$
$$\times\delta(q^2+b^2). \qquad /4/$$

За допомогою властивості δ -функції

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-\alpha_i)}{|\varphi'(\alpha_i)|}, \qquad /5/$$

у даному випадку

$$\delta(q^2+b^2) = \frac{1}{2\bar{q}_0}[\delta(q_0-\bar{q}_0)+\delta(q_0+\bar{q}_0)], \quad \bar{q}_0 = \sqrt{q_1^2+b^2} \qquad /5a/$$

виконаємо в /4/ інтеграцію по q_0

$$J=\int dq\,\theta(p_0-q_0)\,\theta(q_0)\,\delta[(p-q)^2+a^2]\,\delta(q^2+b^2)=$$

$$=\int\frac{dq_1}{2\bar{q}_0}\,\theta(p_0-\bar{q}_0)\,\delta(-2pq+a^2-b^2-c^2). \qquad /6/$$

Введемо систему координат, в якій $p_1=0,\ p_0=c$. Тоді

$$J=\theta(p_0)\int\frac{dq_1}{2\bar{q}_0}\,\delta(2c\bar{q}_0+a^2-b^2-c^2).$$

Виконуючи заміну $\bar{q}_0=\sqrt{q_1^2+b^2}=t$, одержуємо

$$J=\theta(p_0)\int\frac{dt\,\delta(2ct-a^2+b^2+c^2)}{2\sqrt{t^2-b^2}}=\theta(p_0)\int\frac{dt\,\delta\left[2c\left(t-\frac{c^2-a^2+b^2}{2c}\right)\right]}{2\sqrt{t^2-b^2}}=$$

$$=\frac{\theta(p_0)}{4c}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{(c^2-a^2+b^2)^2}{4c^2}-b^2}}=\frac{\theta(p_0)}{2\sqrt{(c^2-a^2+b^2)^2-4b^2c^2}}=$$

$$=\frac{\theta(p_0)}{2\sqrt{[c^2-(a+b)^2][c^2-(a-b)^2]}}=\frac{\theta(p_0)\,\theta[c^2-(a+b)^2]}{2\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}.$$

Повертаючись до /4/, записуємо

$$\overset{+}{\Delta}(x;a^2)\overset{+}{\Delta}(x;b^2)=\frac{1}{2(2\pi)^2}\int\frac{dc^2\,\theta[c^2-(a+b)^2]}{\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}\int dp\,\theta(p_0)\,\delta(p^2+c^2)\,e^{ipx},$$

звідки, беручи до уваги /2а/, маємо

$$\overset{+}{\Delta}(x;a^2)\overset{+}{\Delta}(x;b^2)=\int dc^2 f(a,b,c)\,\overset{+}{\Delta}(x;c^2), \qquad /7/$$

де

$$f(a,b,c)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{\theta[c^2-(a+b)^2]}{\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}. \qquad /7а/$$

У випадку $a=b=m$ одержуємо

$$[\overset{+}{\Delta}(x;m^2)]^2=\int dc^2 f_1(m,m,c)\,\overset{+}{\Delta}(x;c^2), \qquad /8/$$

де

$$f_1(m,m,c)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{\theta(c^2-4m^2)}{\sqrt{c^2(c^2-4m^2)}}. \qquad /8а/$$

Враховуючи явний вид додатно-частотної функції [3]

$$\Delta^{+}(x;c^2)=\frac{1}{2\pi i}K_0(\sqrt{c^2x^2}), \qquad /9/$$

$$\left[\Delta^{+}(x;m^2)\right]^2=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dc^2K_0(\sqrt{c^2x^2})}{\sqrt{c^2(c^2-4m^2)}} \qquad /9a/$$

дістаємо для $\left[\Delta^{+}(x;m^2)\right]^2$ представлення у вигляді інтеграла, сингулярного у нижній границі. Зауважимо, що строгого змісту /9a/ можна надати, розглядаючи $\Delta^{+}(x;m^2)$ як узагальнену функцію, визначену на просторі основних функцій Шварца. Тут $K_0(x)$ – функція Макдональда.

За допомогою /7/ обчислюємо вираз

$$\left[\Delta^{+}(x;m^2)\right]^3=\int dc_1 f_1(m;c_1;c_2)\,\Delta^{+}(x;c_1^2)\,\Delta^{+}(x;m^2)=$$

$$=\int dc_1 dc_2 f_1(m,m,c_1)\Delta^{+}(x;c_1^2)\Delta^{+}(x;m^2)=\int dc_1 dc_2 f_1(m,m,c_1)f_1(m,c_1,c_2)\Delta^{+}(x;c_2^2),$$

де

$$f_1(m,c_1,c_2)=\frac{1}{4\pi i}\frac{\theta[c_2^2-(c_1+m)^2]}{\sqrt{(c_2^2-c_1^2-m^2)^2-4c_1^2m^2}},$$

або

$$\left[\Delta^{+}(x;m^2)\right]^3=\int dc_1^2dc_2^2 f_2(m;c_1;c_2)\Delta^{+}(x;c_2^2). \qquad /10/$$

Тут

$$f_2(m;c_1;c_2)=\frac{1}{(4\pi i)^2}\frac{\theta(c_1^2-4m^2)\theta[c_2^2-(c_1+m)^2]}{\sqrt{c_1^2(c_1^2-4m^2)[(c_2^2-c_1^2-m^2)^2-4c_1^2m^2]}}. \qquad /10a/$$

Аналогічно шукаємо $\left[\Delta^{+}(x;m^2)\right]^4$ і за індукцією $\left[\Delta^{+}(x;m^2)\right]^{n+1}$

$$\left[\Delta^{+}(x;m^2)\right]^{n+1}=\int dc_1^2\dots dc_n^2 f_n(m;c_1;\dots c_n)\Delta^{+}(x;c_n^2), \qquad /11/$$

де

$$f_n(m;c_1;\dots c_n)=\frac{1}{(4\pi i)^n}\frac{\theta(c_1^2-4m^2)\prod_{i=2}^{n}\theta[c_i^2-(c_{i-1}+m)^2]}{\sqrt{c_1^2(c_1^2-4m^2)\prod_{i=2}^{n}[(c_i^2-c_{i-1}^2-m^2)^2-4c_{i-1}^2m^2]}}. \qquad /11a/$$

Маючи на увазі, що $c_i>0$, із нерівностей $\theta(c_1^2-4m^2)\prod\theta[c_i^2-(c_{i-1}+m)^2]$ одержуємо нерівності $c_1>2m$, $c_2-c_1>m, \dots, c_n-c_{n-1}>m$, які дають нижню границю інтеграції в /11/

$$\left[\overset{+}{\Delta}(x;m^2)\right]^{n+1}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{2m}^{\infty}dc_1\int\limits_{3m}^{\infty}dc_2\ldots\int\limits_{nm}^{\infty}dc_n\,\frac{c_1c_2\ldots c_n\,\overset{+}{\Delta}(x,c_n^2)}{\sqrt{c_1^2(c_1^2-4m^2)\prod\limits_{i=2}^{n}\left[(c_i^2-c_{i-1}^2-m^2)^2-4c_{i-1}^2m^2\right]}} \qquad /12/$$

Вираз типу /12/ трапляється у розв"язках рівнянь моделей квантової теорії поля.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М., 1980. 2. Тацуняк П.І. Про одну модель в квантовій теорії поля, що має точний розв"язок // Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970. № 2. С.133-137. 3. Тацуняк П.И. Доказательство асимптотического условия Хаага для двумерной квантовой теории поля // Укр. мат. журн. 1961. Т.13. С.63-71.

Стаття надійшла до редколегії 30.06.88

УДК 539.014

О.І.Васюник

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГОФРОВАНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ

Розглянемо задачу про визначення напружено-деформованого стану тонкої, товщини $2h$, пружної однорідної поперечно-гофрованої по синусоїдальному закону циліндричної оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього постійного тиску q_n . Умови закріплення моделюємо пружно та жорстко закріпленими краями.

Серединну поверхню оболонки задаємо рівнянням

$$r = r_0 + \varepsilon f(s), \qquad /1/$$

де r_0 – радіус поперечного перетину поверхні базової колової циліндричної оболонки; ε – малий параметр, що характеризує амплітуду відхилення гофрованої поверхні від відповідної колової циліндричної поверхні; $f(s)=r_0 \sin\lambda_k s$ – функція, яка характеризує форму гофрованої поверхні; $\lambda_k=\frac{k\pi}{s^*}$, k – натуральне число, що характеризує частоту гофрованої поверхні; $s\in[0,s^*]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ – канонічні координати.

Виходячи з лінійної теорії тонких оболонок, що грунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява, для розв"язання задачі використаємо ключові рівняння оболонок обертання, які в канонічних координатах мають вигляд [1, 4]

$$\ddot{V}+\frac{\dot{r}}{r}\dot{V}-\left(\frac{\dot{r}^2}{r^2}-\nu K_1 K_2\right)V+bK_2\theta=\frac{1}{D_1 K_2}\left[\dot{q}_n-\frac{2\dot{K}_2}{K_2}q_n-K_2\rho_n\frac{d}{dS}\left(\frac{K_1-K_2}{K_2^2 r^2}\right)\right],$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}-\left(\frac{\dot{r}^2}{r^2}+\nu K_1 K_2\right)\theta-K_2 V=0, \qquad /2/$$

де $\rho_n=\int_{S_0}^{S} q_n r\dot{r}\,du;\ b=\frac{D_0}{D_1},\ q_n=const;\ K_1=-\ddot{r},\ K_2=\frac{1}{r},\ D_0=2Eh;\ D_1=\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2},$

E – модуль Юнга; ν –коефіцієнт Пуассона.

Граничні умови при $S=0,S^*$ для конкретних умов закріплення мають вигляд:

а/ у випадку пружного закріплення

$$\theta=\mu\left(\dot{\theta}+\nu\frac{1}{r}\dot{r}\theta\right), \qquad /3/$$

$$\dddot{\theta}+(2-\nu)\dot{r}r^{-1}\ddot{\theta}+\dot{\theta}\left[(1+\nu)r^{-1}\ddot{r}-(1+\nu)\dot{r}^2 r^{-2}\right]+\theta\left[\nu r^{-1}\dddot{r}+\right.$$

$$\left.+r^{-3}\dot{r}^3(1+\nu)-\dot{r}\ddot{r}r^{-2}(2-\nu)^2\right]-\frac{q_n}{D_1}+\frac{q_n}{2D_1}\left(\nu-\ddot{r}r+r_0^2 r^{-1}\ddot{r}-\nu r^{-2}r_0^{-2}\right)=0; \qquad /4/$$

б/ у випадку жорсткого закріплення

$$\theta=0, \qquad /5/$$

а також умова /4/.

Для розв"язання задач /2/–/4/; /2/, /4/, /5/ використовуємо метод збурення форми границі [2]. Наявність у задачах /2/–/4/; /2/, /4/, /5/ малого параметра ε дає змогу шукати розв"язки задач у вигляді рядів по додатних степенях ε :

$$(\theta,V)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\left(\theta^{(n)},V^{(n)}\right) \qquad /6/$$

Підставляючи ці розклади в задачі /2/–/4/; /2/, /4/, /5/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , знаходимо сукупність крайових задач для гофрованої циліндричної оболонки, з яких можна отримати розв"язок вихідних задач у потрібному наближенні.

Розв"язавши вихідні задачі /2/-/4/; /2/, /4/, /5/ у нульовому і першому наближенні, осьові σ_1 і кільцеві σ_2 напруження з точністю до ε визначаємо так:

$$\sigma_1^{\pm} = \sigma_1^{\pm(0)} + \varepsilon \sigma_1^{\pm(1)}, \qquad \sigma_2^{\pm} = \sigma_2^{(0)} + \varepsilon \sigma_2^{\pm(1)}, \tag{7}$$

$$\sigma_1^{\pm(0)} = -\frac{D_1}{2h}\left(\pm\frac{3}{h}\dot{\theta}^{(0)}\right), \quad \sigma_2^{\pm(0)} = -\frac{D_1}{2h}\left[\dot{V}^{(0)} - \frac{q_n}{D_1} r_0 \pm \frac{3}{h}\left(\nu\dot{\theta}^{(0)}\right)\right], \tag{8}$$

$$\sigma_1^{\pm(1)} = -\frac{D_1}{2h}\left[\frac{j}{r_0}V^{(0)} - \frac{q_n j}{D_1} \pm \frac{3}{h}\left(\dot{\theta}^{(1)} + \frac{\nu j \theta^{(0)}}{r_0}\right)\right], \tag{9}$$

$$\sigma_2^{\pm(1)} = -\frac{D_1}{2h}\left[\dot{V}^{(1)} - j\frac{q_n}{D_1} \pm \frac{3}{h}\left(\nu\dot{\theta}^{(1)} + \frac{j\theta^{(0)}}{r_0}\right)\right].$$

У випадку пружного закріплення кут повороту θ і функція напружень V в нульовому і першому наближенні з точністю до ε визначаються так:

$$\theta^{(0)} = d_{10} e^{ps}\cos ps + d_{20} e^{ps}\sin ps + d_{30} e^{-ps}\cos ps + d_{40} e^{-ps}\sin ps, \tag{10}$$
$$V^{(0)} = r_0 \ddot{\theta}^{(0)};$$

$$\begin{aligned}\theta^{(1)} &= d_{11} e^{ps}\cos ps + d_{21} e^{ps}\sin ps + d_{31} e^{-ps}\cos ps + d_{41} e^{-ps}\sin ps + \\ &+ R_{11}^{*} e^{ps}\sin(\lambda_k + p)s + W_{11}^{*} e^{ps}\cos(\lambda_k + p)s + R_{12}^{*} e^{ps}\sin(\lambda_k - p)s + \\ &+ W_{12}^{*} e^{ps}\cos(\lambda_k - p)s + R_{12}^{*} e^{-ps}\sin(\lambda_k + p)s + W_{13}^{*} e^{-ps}\cos(\lambda_k + p)s + \\ &+ R_{14}^{*} e^{-ps}\sin(\lambda_k - p)s + W_{14}^{*} e^{-ps}\cos(\lambda_k - p)s + q_n Q_1 \cos\lambda_k s,\end{aligned} \tag{11}$$

$$V^{(1)} = r_0 \ddot{\theta}^{(1)} + j\ddot{\theta}^{(0)} + j\dot{\theta}^{(0)} + \nu \ddot{j}\theta^{(0)},$$

$$Q_1 = \frac{2\lambda_k}{D_1\left(\lambda_k^4 + \frac{b}{r_0^2}\right)}, \qquad p = \sqrt[4]{b r_0^{-2}}\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Константи $d_{10}, d_{20}, d_{30}, d_{40}$ знаходимо з граничних умов /3/, /4/, записаних у нульовому наближенні, а константи $d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{41}$ визначаємо з цих же умов, записаних у першому наближенні.

У випадку жорсткого закріплення кут повороту θ і функція напружень V в нульовому наближенні і першому наближенні з точністю до ε шукають з допомогою формул /10/, /11/. Константи $d_{10}, d_{20}, d_{30}, d_{40}$ знаходять з граничних умов

/5/, /4/, записаних у нульовому наближенні, а константи $d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{41}$ визначають з граничних умов, записаних у першому наближенні.

Для проведення числових досліджень розв"язку /7/ складені Фортран-програми. Для дослідження брали стальну гофровану трубу /довжина l = 1325 мм, товщина $2h$ = 8 мм, радіус серединної поверхні r_0 = 265 мм/. Параметри гофрування K = 2; 10; 25; 50; ε = 0,1; 0,15; 0,25. Тиск $0{,}6 \frac{кГ}{мм^2}$, коефіцієнт пропорційності μ = 0,5; 0,9.

Аналіз напруженого стану поперечно-гофрованої труби, що знаходиться під дією внутрішнього постійного тиску, свідчить, що розглядувані крайові задачі для вказаних оболонок мають швидкозатухаючі у міру віддалення від країв розв"язки. Розподіл напружень по поверхні поперечно-гофрованої оболонки носить нелінійний характер, а величина їх суттєво залежить від частоти і глибини гофрування. Осьові напруження σ_1 з ростом частоти гофрування значно збільшуються в околі країв. Розподіл кільцевих напружень має коливний характер, що відповідає зміні геометрії поверхні оболонки. Зокрема, для зміни параметра гофрування ε = 0,1 ÷ 0,15 кільцеві напруження σ_2 зростають на 23÷35 % порівняно з канонічною формою оболонки. Це узгоджується з результатами досліджень із [3] на основі тривимірної постановки задачі.

1. Григолюк Е.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.Й. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К., 1978. 2. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. К., 1982. 3. Немиш Ю.Н., Чернопиский Д.И. Упругое равновесие гофрированных тел. К., 1983. 4. Підстригач Я.С., Ярема С.Я. Температурні напруження в оболонках. К., 1961.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 536.12

І.М.Махоркін, А.П.Сеник

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПІВБЕЗМЕЖНОЇ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ

Нехай півбезмежна пластина товщиною 2δ, що складається з двох пластин, кожна з яких в плані має форму безмежного прямокутного клина, нагрівається по торцевій поверхні $x=0$ рівномірно розподіленим тепловим потоком потужності q. Через бічні поверхні $z=\pm\delta$ пластин відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем нульової температури, а на поверхні їх спряження $y=0$ мають місце умови ідеального теплового контакту, коефіцієнти тепловіддачі з бокових поверхонь $z=\delta$, $z=-\delta$ однакові, але різні для кожної з пластин. Коефіцієнти теплопровідності матеріалів постійні у межах кожної пластини.

Для визначення усталеного температурного поля неоднорідної системи маємо рівняння

$$\lambda(y)\Delta T+\frac{\partial\lambda(y)}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\alpha(y)}{\delta}T=0 \qquad /1/$$

при таких граничних умовах

$$T\Big|_{|y|\to\infty}\neq\infty, \qquad T\Big|_{x\to\infty}=\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x\to\infty}=0, \qquad /2/$$

$$\lambda(y)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=-q, \qquad /3/$$

де $\lambda(y)$ – коефіцієнт теплопровідності; $\alpha(y)$ – коефіцієнт тепловіддачі з бокових поверхонь $z=\pm\delta$.

Для нашої кусково-однорідної системи зміну $\lambda(y)$ і $\alpha(y)$ залежно від координати y з використанням узагальнених функцій запишемо у вигляді [2]

$$p(y)=p_2+(p_1-p_2)\,S_{+}(y), \qquad /4/$$

де p_i $(i=1,2)$ – відповідні характеристики першої та другої пластини;

$$S_{+}(\eta)=\begin{cases}1, & \eta>0\\ 0{,}5\pm0{,}25, & \eta=0\\ 0, & \eta<0\end{cases}$$

– осесиметрична одинична функція.

Підставляючи в /1/ – /3/ вирази характеристик у вигляді /4/ та враховуючи при цьому властивості імпульсних узагальнених функцій [2], записуємо

$$\Delta T-\left[\varkappa_2^2+(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)\,S_-(y)\right]T=(1-K)\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}\delta(y)\,, \qquad /5/$$

$$T\Big|_{|y|\to\infty}\neq\infty\,,\quad T\Big|_{x\to\infty}=\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x\to\infty}=0, \qquad /6/$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=-q\left[\frac{1}{\lambda_2}+\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)S_-(y)\right], \qquad /7/$$

де $K=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$; $\varkappa_i^2=\dfrac{\alpha_i}{\lambda_i\delta}$ $(i=1,2)$.

Застосувавши до /5/ і /6/ з врахуванням /7/ $\cos$ -перетворення Фур"є по x, дістанемо

$$\frac{d^2\bar T}{dy^2}-\left[\gamma_2^2+(\gamma_1^2-\gamma_2^2)S_-(y)\right]\bar T=$$
$$=(1-K)\frac{d\bar T}{dy}\Big|_{y=0}\delta(y)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,q\left[\frac{1}{\lambda_2}+\right. \qquad /8/$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)S_-(y)\right];$$

$$\bar T\Big|_{|y|\to\infty}\neq\infty\,, \qquad /9/$$

де $\gamma_i^2=\varkappa_i^2+\xi^2$, $(i=1,2)$.

Розв"язок задачі /8/–/9/, знайдений методом варіації сталих [1], має вигляд

$$\bar T=q\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{F_1(\xi)}{\lambda_1(\varkappa_1^2+\xi^2)}\,S_-(y)+\frac{F_2(\xi)}{\lambda_2(\varkappa_2^2+\xi^2)}\,S_+(-y)\right\}, \qquad /10/$$

де $F_1(\xi)=1+\dfrac{L(\xi)}{\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}}\,e^{-y\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}}$;

$$F_2(\xi)=1-\frac{L(\xi)}{\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}}\, e^{y\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}},$$

$$L(\xi)=\frac{\lambda_1(\varkappa_1^2+\xi^2)-\lambda_2(\varkappa_2^2+\xi^2)}{\lambda_1\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}+\lambda_2\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}}$$

Переходячи в /10/ до оригіналів, знаходимо шуканий розв"язок задачі у вигляді

$$T=\frac{2q}{\pi}\left\{\frac{1}{\lambda_1}\left[\int_0^\infty\frac{\cos\xi x}{\varkappa_1^2+\xi^2}\cdot\frac{e^{-y\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}}}{\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}}\cdot L(\xi)d\xi+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2\varkappa_1}e^{-x\varkappa_1}\right]S_-(y)-\frac{1}{\lambda_2}\left[\int_0^\infty\frac{\cos\xi x}{\varkappa_2^2+\xi^2}\cdot\frac{e^{y\sqrt{\varkappa_2^2+\xi^2}}}{\sqrt{\varkappa_1^2+\xi^2}}\times\right.$$

$$\left.\left.\times L(\xi)d\xi-\frac{\pi}{2\varkappa_2}e^{-x\varkappa_2}\right]S_+(-y)\right\}. \qquad /11/$$

Підставивши у вираз /11/ $\lambda_1=\lambda_2$, $\alpha_1=\alpha_2$, отримаємо як частковий випадок вираз для визначення усталеного температурного поля в однорідній пластині

$$T=q\,\frac{e^{-x\varkappa}}{\lambda\varkappa}.$$

1. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М., 1973. 2. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 539.3

Д.Г.Хлебніков, Л.В.Гошко

РОЗРАХУНОК ЗУСИЛЛЯ, ЩО КОМПЕНСУЄ ВІДХИЛЕННЯ ФОРМИ УЩІЛЬНЮЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА У ВИГЛЯДІ ТОНКОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Розглянемо клапан ущільнюючого з'єднання у формі тонкої кільцевої пластинки радіально-змінної товщини. Пластинка розташована на жорсткій опорі, що має вигляд кола радіуса b, і притискається до опори осьовим зусиллям P, яке передається на пластинку через центральне жорстке ядро радіуса c. Крім цього, на верхню поверхню пластинки діє рівномірно розподілений по кільцю $c \leq r \leq R$ тиск q_1, а на нижню – тиск q_2, розподілений по кругу радіуса b /рис. 1/.

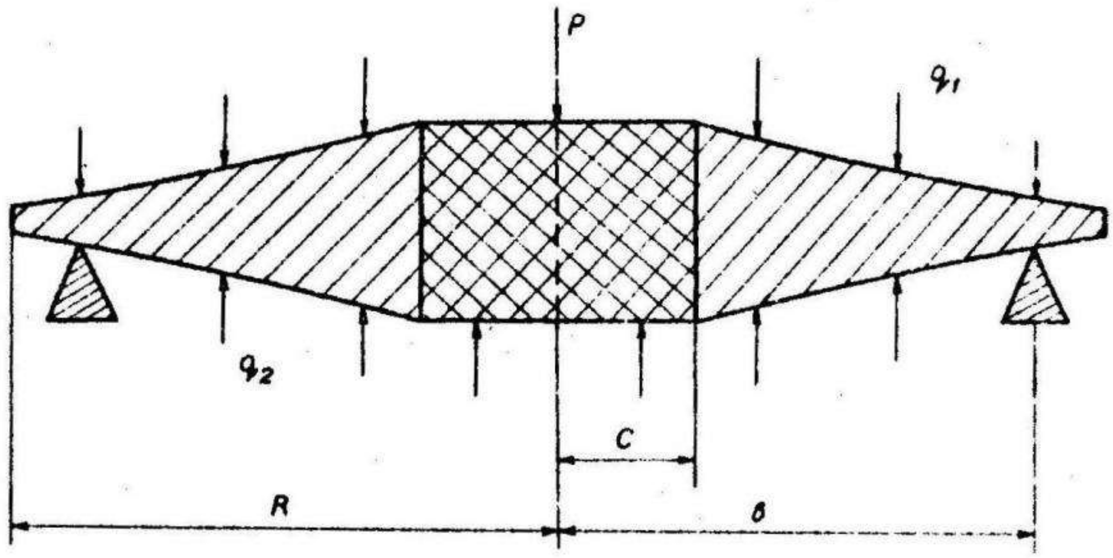


Рис. 1.

Вважається, що опора не є ідеально плоскою. Її відхилення має характер циклічної симетрії і описується функцією

$$f(\varphi) = \frac{d}{2}(1 + \cos n\varphi), \qquad /1/$$

де φ – полярний кут; d – максимальна величина зазору.

Розглянемо задачу визначення мінімальної величини зусилля P, яке необхідне для забезпечення безвідривного контакту між пластинкою й опорою за рахунок деформації пластинчастого елемента.

Диференціальне рівняння згину тонкої пластинки радіально-змінної товщини має вигляд [2]

$$D\Delta\Delta W+\frac{dD}{dr}\left(2\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}+\frac{2+\nu}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3 W}{\partial r\partial\varphi^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{r^3}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{d^2D}{dr^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)-q=0, \qquad /2/$$

де W - прогин пластинки; $E;\ \nu$ - модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$; $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$; $h(r)$ - змінна товщина пластинки.

Зовнішнє навантаження на пластинку $q=q(r,\varphi)$ можна записати у вигляді

$$q(r,\varphi)=q_1-q_2\chi(b-r)-q_0(\varphi)\delta(r-b), \qquad /3/$$

де $\delta(u)$ - дельта-функція Дірака; $\chi(u)$ - одинична функція Хевісайда.

Для визначення прогину $W(r,\varphi)$ рівняння /2/ слід розв"язати при граничних умовах жорсткого защемлення при $r=C$:

$$W=0;\quad \frac{\partial W}{\partial r}=0 \qquad /4/$$

та вільного краю при $r=R$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta W+\frac{1-\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right)=0. \qquad /5/$$

Якщо зусилля P, що притискає пластинку до опори таке, що контакт відбувається по всій довжині опорного кола, то умова контакту має вигляд

$$W(b,\varphi)=f(\varphi). \qquad /6/$$

Згідно з /1/ та /6/ прогин $W(r,\varphi)$, а також невідомий контактний тиск $q_0(\varphi)$ шукаємо у вигляді

$$W(r,\varphi)=W_0(r)+W_n(r)\cos n\varphi, \qquad /7/$$

$$q_0(\varphi)=p_0+p_n\cos n\varphi. \qquad /8/$$

З умов рівноваги пластинки та знакосталості контактного тиску знаходимо

$$p_0 = p_n = \frac{P}{2\pi b} + \frac{q_1 (R^2 - c^2)}{2b} - \frac{q_2 b}{2} \qquad /9/$$

Після підстановки виразів /7/, /8/ у рівняння /2/ для визначення $W_n(r)$ одержимо звичайне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке у випадку зміни товщини за степеневим законом

$$h(r) = h_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{3}} \qquad /10/$$

має вигляд [4]

$$\frac{d^4 W_n}{dr^4} + \frac{2(1+m)}{r}\frac{d^3 W_n}{dr^3} - \frac{1+2n^2-m(1+\nu+m)}{r^2}\frac{d^2 W_n}{dr^2} + \\ + \frac{(1-m)(1+2n^2-\nu m)}{r^3}\frac{dW_n}{dr} + \frac{n^2(n^2-4+3m-\nu m(m-1))}{r^4} W_n = \frac{p_n}{D}. \qquad /11/$$

З /4/, /5/, /7/ отримуємо крайові умови для функції $W_n(r)$

$$W_n(C) = W_n'(C) = 0, \qquad /12/$$

$$W_n''(R) + \frac{\nu}{R} W_n'(R) - \frac{\nu r^2}{R^2} W_n(R) = 0,$$

$$W_n'''(R) + \frac{1}{R} W_n''(R) - \frac{1+(2-\nu)n^2}{R^2} W_n'(R) + \frac{(3-\nu)n^2}{R^3} W_n(R) = 0. \qquad /13/$$

Загальний розв"язок рівняння /11/ записується як

$$W_n(r) = C_1\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_1} + C_2\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_2} + C_3\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_3} + C_4\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_4} + W_n^*(r), \qquad /14/$$

де

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2};$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2}; \quad \lambda_4 = -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} - 1 + \frac{m}{2};$$

$$\alpha = 1 + n^2 - \frac{m}{2}(1+\nu) + \frac{m^2}{4};$$

$$\beta = \frac{(2-m)^4}{16} + \frac{(2-m)^2}{4}\left(2n^2 + m(1-\nu)\right) + n^2\left(n^2 - 2 + m - (1-m)(2-m\nu)\right). \qquad /15/$$

Частинний розв"язок $W_n^*(r)$, знайдений символічним способом [3], має вигляд

$$W_n^*(r)=\begin{cases} 0 & \text{при } b \le r \le R \\ -\dfrac{P_n b^3}{D_0}\left(\dfrac{R}{b}\right)^m \sum\limits_{i=1}^{4} A_i\left(\dfrac{b}{r}\right)^{\lambda_i} & \text{при } c \le r < b \end{cases} \qquad /16/$$

де

$$D_0=\frac{E h_0^3}{12(1-\nu)};\quad A_1=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)};\quad A_2=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)};$$

$$A_3=\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)};\quad A_4=\frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}. \qquad /17/$$

З умов /12/, /13/ маємо систему

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, C_j^* = b_j;\quad (i=1;2;3;4) \qquad /18/$$

для визначення сталих

$$C_j^*=\frac{D_0 b^m}{P_n b^3 R^m} C_j,\quad (j=1;2;3;4), \qquad /19/$$

де

$$a_{1j}=\left(\frac{R}{c}\right)^{\lambda_j};\ a_{2j}=\lambda_j\left(\frac{R}{c}\right)^{\lambda_j};\ a_{3j}=\lambda_j^2+(1-\nu)\lambda_j-n^2\nu;$$

$$a_{4j}=\lambda_j^3+2\lambda_j^2-n^2\lambda_j(2-\nu)-n^2(3-\nu);$$

$$b_1=\sum_{j=1}^{4} A_j\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_j};\ b_2=\sum_{j=1}^{4} A_j\lambda_j\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda_j};\ b_3=b_4=0. \qquad /20/$$

Зусилля P визначаємо з умови /6/. Використовуючи /1/ та /8/, дістаємо

$$W_n(b)=\frac{d}{2}. \qquad /21/$$

Звідси на основі /7/, /14/ та /19/ одержуємо формулу для визначення мінімального зусилля P

$$P=\frac{\pi d D_0}{b^2 S_n(b)}-q_1\pi(R^2-c^2)+q_2\pi b^2, \qquad /22/$$

де

$$S_n(b)=\sum_{i=1}^{4} C_i^*\left(\frac{R}{b}\right)^{\lambda_i+m},$$

а сталі C_i^* визначаємо з системи /18/.
Випадок для клапана сталої товщини $(m=0)$ досліджено у праці [1].

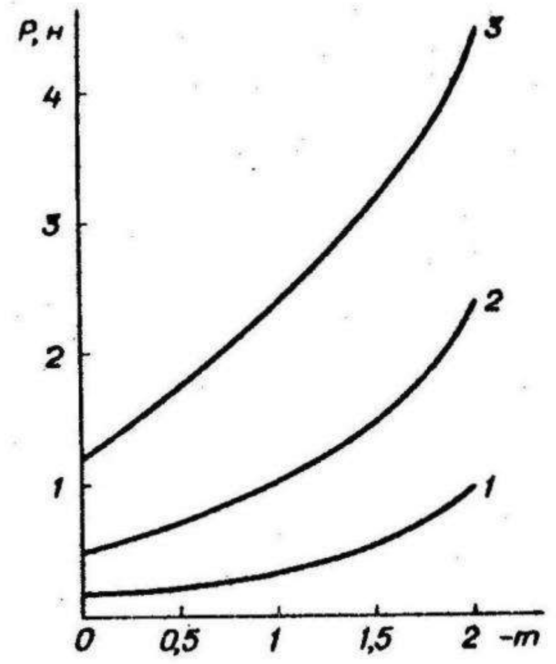


Рис. 2.

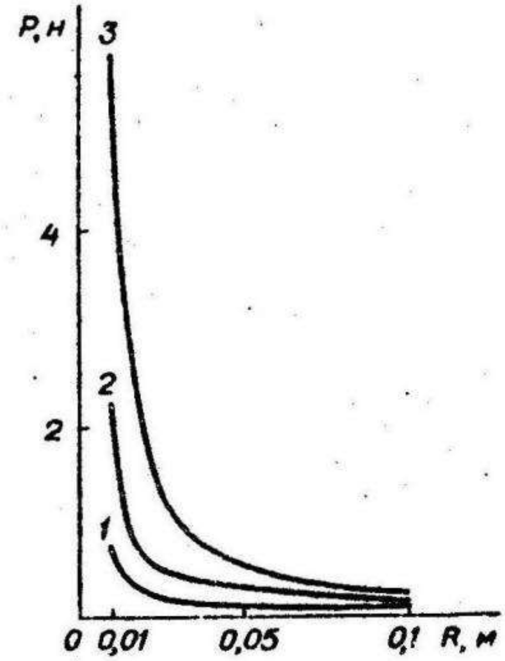


Рис. 3.

На рис. 2, 3 показані графіки залежності зусилля P від показника m /формула 10/ при $R = 0{,}02$ м і від радіуса R при $m = -0{,}5$ для випадку $q_1 = q_2 = 0$. Криві 1–3 відповідають значенням $h_0 = 0{,}001$ м; 0,0015 м; 0,002 м.

Одержані результати легко перенести на випадок, коли функція відхилення форми f задається рядом Фур"є загального вигляду.

1. Г у р н я к Л.И., Х л е б н и к о в Д.Г. Неосесимметричная задача формирования герметичного контакта путем деформации элементов в виде тонких кольцевых пластин // Сб. некоторых задач расчета элементов конструкций. – Львов, 1988. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 05.01.1988. № 102 – Ук88. 2. К о в а л е н к о А.Д. Круглые пластины переменной толщины. М., 1969. 3. К р ы л о в А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л., 1950. 4. Л е в и н А.В. Расчет на статический изгиб и на вибрацию дисков гиперболического профиля // Журн. техн. физ. 1937. № 17. С.1754-1767.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.53

С.Д.Величко, О.Б.Скасків

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Нехай $\{G_\alpha\}$ – сім"я множин на комплексній площині, $\alpha \geq 0$ – параметр, що неперервно змінюється. Вважаємо, що $G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$ для кожних $\alpha_1 < \alpha_2$. Розглянемо послідовність цілих функцій $(\varphi_n(z))$ таких, що $f_n(\alpha) = \sup\{|\varphi_n(z)| : z \in G_\alpha\} < +\infty$ для кожних $n \in N$ та $\alpha \geq 0$. Послідовність $(\varphi_n(z))$ називаємо G_α – правильною [1], якщо при $\alpha \to +\infty$ рівномірно по $n \in N$ виконується

$$f_n(\alpha) = (1 + o(1))(\ell(\alpha))^{\beta_n} e^{\lambda_n h(\alpha)},$$

де $\ell(\alpha)$ – додатна неспадна на $[0, +\infty[$ функція, $h(\alpha)$ – додатна диференційована зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty[$ функція; (λ_n) і (β_n) – неспадні послідовності невід"ємних чисел, при цьому $\lambda_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Зауважимо, що [1] G_α – правильними є послідовності (z^n), $(e^{z\lambda_n})$ при $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, $(E_\rho(\mu_n z))$ при $\rho > \frac{1}{2}$ і $0 \leq \mu_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, де $E_\rho(z)$ – функція Міттаг-Лефлера, а також деякі інші функціональні послідовності.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ називаємо регулярно збіжним, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(\alpha)$ збіжний для всіх $\alpha \geq 0$. Для цілої функції F, представленої регулярно збіжним рядом виду

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \qquad /1/$$

позначимо $M(\alpha) = \sup\{|F(z)| : z \in G_\alpha\}$, а через $\mu(\alpha) = \max\{|a_n| f_n(\alpha) : n \in N\}$ максимальний член і $\nu(\alpha) = \max\{n : |a_n| f_n(\alpha) = \mu(\alpha)\}$ – центральний індекс ряду.

Величину $h\text{-}mes\, E = \int_{E \cap [0,+\infty[} dh(x)$ називаємо h -мірою множини $E \subset [0, +\infty[$.

<u>Теорема.</u> Якщо для цілої функції F виду /1/ виконується умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty, \qquad /2/$$

то

$$F(z) = a_\nu \varphi_\nu(z) + o(\mu(\alpha))$$

при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної h -міри, рівномірно по $z \in G_\alpha$, де $\nu = \nu(\alpha)$ – центральний індекс ряду /1/.

Наслідок. Якщо для цілої функції виду /1/ виконується умова /2/, то $M(\alpha) \leq (1+o(1))\ \mu(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$ зовні множини скінченної h -міри.

Зауважимо, що асимптотична рівність $M(\alpha)=(1+o(1))\mu(\alpha)$ у загальному випадку неможлива, оскільки існують функціональні ряди, для яких нерівність Коші $M(\alpha) \geqslant \mu(\alpha)$ не виконується.

Метод доведення теореми є модифікацією методу, який застосовувався в [2, 3] до цілих рядів Діріхле, і базується на використанні властивостей G_α -правильної послідовності функцій.

1. О с к о л к о в В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Мат. сб. 1976. Т.100, № 2. С.312–334. 2. С к а с к и в О.Б. Максимум модуля и максимальный член целого ряда Дирихле // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 11. С.22–24. 3. С к а с к и в О.Б., Ш е р е м е т а М.Н. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Мат. сб. 1986. Т.131. № 3. С.386–402.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.531.2

В.М.Сороківський

ПРО ПОВЕДІНКУ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ РЯДОМ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

У ряді праць [1 – 5] досліджувався зв"язок між поведінкою функції $f(z)$, заданої рядом Діріхле

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n} \qquad /1/$$

на дійсній осі, і її зростанням у всій площині, коли $0<\lambda_n \uparrow +\infty$ $(n\to\infty)$. Зокрема [5], якщо послідовність (λ_n) додатних чисел задовольняє умовам $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqslant h>0$ і $n/\lambda_n \to 0\ (n\to\infty)$, то для кожної цілої функції f вигляду /1/ скінченного порядку $\rho<\infty$ виконується рівність $\rho=\rho^*$, де

$$\rho=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln\ln M(x,f)}{x},\ \rho^*=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\ln\ln|f(x)|}{x},\ M(x,f)=\sup\{|f(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}.$$

Аналог цього результату у випадку комплексних показників є наступне твердження.

Теорема. Нехай послідовність різних комплексних чисел λ_n задовольняє умови $|\lambda_1| \geqslant h > 0, -\frac{\pi}{2} + \varphi_0 \leqslant \arg\lambda_n \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi_0, 0 < \varphi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|1/L'(\lambda_n)|}{\ln|\lambda_n|} = 0, \quad L(z) = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \qquad /2/$$

і ряд /1/ рівномірно збігається у кожному крузі $|z| \leqslant r, 0 < r < \infty$. Тоді $\varkappa^* \geqslant \varkappa \sin\varphi_0$, де

$$\varkappa = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{r}, \quad \varkappa^* = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln\ln|f(x)|}{x}, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

Метод Вімана-Валірона, який використовується в [5], для рядів /1/ з комплексними показниками не розроблений. Тому доведення сформульованої вище теореми дещо інше, ніж в [5], і базується на наступних лемах.

Приймемо

$$\Delta t = \frac{2}{\sin\varphi_0} \sum_{|\lambda_n| \leqslant t} \frac{1}{|\lambda_n|}, \quad Q_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{t\lambda_k}, \quad I(r, Q_n) = \left\{\int_{-\infty}^{r} |Q_n(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Зауважимо, що для будь-якої цілої функції /1/ з показниками з кута $-\frac{\pi}{2} + \varphi_0 \leqslant \arg\lambda_n \leqslant \frac{\pi}{2} + \varphi_0$ виконується $I(r, f) < \infty$ тому що $|f(t)| \leqslant \mathcal{K} e^{|\lambda_1|\sin\varphi_0 t}$ при $t \to -\infty, \mathcal{K} = const, \mathcal{K} > 0$.

Лема 1. При виконанні умов /2/ для коефіцієнтів квазіполінома $Q_n(t)$ має місце оцінка

$$|a_m| \leqslant 2|\lambda_m| \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{\infty} \frac{|\lambda_m| + |\lambda_i|}{|\lambda_m| - |\lambda_i|} e^{-\frac{2|\lambda_m|}{|\lambda_i|}} \right) I(s(\lambda_n), Q_n) \left\{ \int_0^{-\infty} |B_m(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Лема 2. Нехай $(n/\lambda_n) \to 0$ при $n \to \infty$ і $\varkappa < \infty$. Тоді $h(r) \overset{def}{=} \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| e^{|\lambda_n| r} \leqslant \mathcal{K}_1 < \infty$.

Лема 3. Нехай виконуються умови теореми. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ при $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ справедлива нерівність

$$M(r) \overset{def}{=} \sum_1^{N} |a_n| e^{r|\lambda_n|} \leqslant (1+\varepsilon)\exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{\sin\varphi_0}\right)\right).$$

Доведення лем 1 – 3 аналогічне доведенню відповідних лем із [4].

Доведення теореми. З лем 2 і 3 випливає, що

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \max_{|z|=r} \left\{ \left|\sum_1^{N} a_n e^{\lambda_n z}\right| + \left|\sum_{N+1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}\right| \right\} \leqslant \hat{M}(r) + h(r) \leqslant$$

$$\leq K_2 \exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{\sin\varphi_0}\right)\right) + K_1 \leq K_3 \exp\left(\exp\left(\frac{\varkappa^* r}{5\sin\varphi_0}\right)\right),$$

тобто $\varkappa \sin\varphi_0 \leq \varkappa^*$.

Нерівність $\varkappa^* \geq \varkappa \sin\varphi_0$ поліпшити не можна. Подібно як і в [4, 5], можна показати істотність другої умови /2/.

1. Винницкий Б.В., Сорокивский В.М. О росте целых функций, представленных рядами Дирихле. Львов, 1982. Рук. деп. в ВИНИТИ, № 176-82 Деп. 2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976. 3. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980. 4. Сорокивский В.М. О поведении на действительной оси целой функции медленного роста, представленной рядом Дирихле // Изв. вузов. Матем. 1985. № 6. С.40-45. 5. Шеремета М.Н. О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат. заметки. 1983. Т.33. Вып. 2. С.235-245.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 517.43

О.Н.Фрідман

ОЦІНКА ЗНИЗУ ФУНКЦІЇ, СУБГАРМОНІЧНОЇ У ПІВПЛОЩИНІ

Оцінки знизу функції, субгармонічної у площині та крузі, розглядались у багатьох роботах /бібліографію див. в [4]. Оцінки в півплощині вивчались менше, типовим є результат Хеймана [8].

Введемо такі позначення: $H_+ = \{z : |z|,$ $H(R) = \{z : |z| < R\} \cap H_+$, $C(z_0, \rho) = \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$.

Має місце теорема:

Теорема. Нехай u – субгармонічна в H_+ функція і Γ – деяка крива

$$\Gamma \subset \{z : \varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon\},\ \varepsilon > 0, \qquad /1/$$

що прямує до ∞, на якій $u(z) \geq 0$.

Тоді для довільної додатної функції $A(t)$, $A(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ існує C^0-множина [2], с.119-120], зовні якої виконується нерівність $/ |z| = r\ /$

$$u(z) > -A(r) \sup_{z \in H(r+o(r))} u(z), \quad r \to \infty. \qquad /2/$$

Теорема поліпшує один результат Шкаліков /[7], лема 2.2/. Всі умови в формулюванні теореми суттєві. Приклад функції $u(x,y)=1-y$ свідчить, що умову /1/ послабити не можна. Як показує приклад функції $f(z)$ з [9] у теоремі УШ, якщо $u(z)=\ln|f(z)|$ при $z\in H_+$, то у нерівності /2/ не можна позбутися величини $o(r)$. Дійсно, якщо $A(r)=\ln\ln\ln\ln r$, то з /2/ і нерівності /7.1/ [9] одержуємо

$$-A\ln\ln\ln\ln r\cdot\sup_{z\in H(r)}u(z)>u(z)>-\ln\ln\ln\ln r\sup_{z\in H(r)}u(z),$$

що приводить до протиріччя. Те, що функцію $A(r)$ не можна замінити на як завгодно велику сталу, свідчить приклад функції

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),\quad z\in H_+,$$

/аналіз прикладу та необхідні посилання див. в [5], с.7-8 /.

Доведення теореми базується на твердженні, яке узагальнює одну лему Говорова /[1], лема 5.4/.

Лема. Нехай u - субгармонічна в області $B=\{z: R<|z|<\beta R\}\cap H_+$, $\beta>1$, функція і z_0 - точка з B така, що $|z_0|=R(1+\beta)/2$ і $u(z_0)\geq 0$. Тоді для довільного $N>1$ існує множина $C=\bigcup_n c(z_n,\rho_n)$, $z_n\in B$, така, що $\sum_n\rho_n<R\beta N^{-1/2}$ і в $B\setminus C$ виконується нерівність

$$u(z)>-KN\sup_{z\in B}u(z),$$

де K - додатна стала, яка залежить тільки від β.

Ідея доведення леми запозичена з [1].

Доведення теореми. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $A(t)$ - монотонно зростаюча функція і $A(t)>K$ для всіх $t>0$.

Нехай $R_n=(1+\alpha)^n$, $0<\alpha<1$; $N_n=A(R_n)/K$.

$$B_n=\{z: R_{n-1}\leq|z|<R_{n+1}\}\cap H_+$$

Оскільки при будь-якому натуральному $n>n_0$ існує точка $z_n\in\Gamma$, $|z_n|=(R_{n+1}-R_{n-1})/2$, то, застосовуючи до функції u в B_n лему, одержуємо, що оцінка

$$u(z)>-KN_n\sup_{z\in B_n}u(z)\qquad /3/$$

виконується в $B_n \setminus C_n$, де $C_n = \bigcup_k C(z_k^{(n)}, \rho_k^{(n)})$,
$\sum_k \rho_k^{(n)} < R_{n+1} N_n^{-1/2}$.

Вилучимо з кожної множини C_n, $n > n_0$, множину тих кружків, для яких $z_k^{(n)} \in \{z : R_n \leq |z| < R_{n+1}\} \cap \bar{H}_+$ і позначимо її через C_n^*. Тоді, якщо

$$C = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} C_n^* \cup \{z : |z| < R_{n_0}\} = \bigcup_j C(z_j, \rho_j),$$

то суму радіусів виняткових кружків можна оцінити так $/R_n \leq r = |z| < R_{n+1}/$:

$$\frac{1}{r}\Big(\sum_{\substack{|z_j|<r \\ z_j \in \bar{H}_+}} \rho_j + R_{n_0}\Big) < \frac{R_{n_0}}{R_n} + \frac{1}{R_n}\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{R_j \leq |z_k^{(j)}| < R_{j+1} \\ z_k^{(j)} \in \bar{H}_+}} \rho_k^{(j)} < \qquad /4/$$

$$< \frac{R_{n_0}}{R_n} + \frac{1}{R_n}\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{j+1}}{\sqrt{N_j}} = \frac{R_{n_0}}{R_n} + (1+\alpha)^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{N_j}} \frac{1}{(1+\alpha)^{n-j+1}} .$$

Застосовуючи до другого додатну в правій частині /4/ теорему Тепліца [3], с.326/, одержимо, що C є C^0 - множиною. Таким чином, з /4/ маємо, що при $R_n \leq r = |z| < R_{n+1}$ і $z \bar{\in} C$ виконується нерівність

$$u(z) > -A(R_n) \sup_{z \in H(R_{n+1})} u(z) > -A(r) \sup_{z \in H((1+\alpha)r)} u(z) .$$

Виберемо дві числові послідовності (ε_ν), $\varepsilon_\nu = 2^{-\nu}$; (α_ν) - монотонно прямуюча до нуля, $0 < \alpha_\nu < 1$, $\nu \in N$. З останньої нерівності одержимо, що для кожного $\nu \in N$ існує C^0-множина /позначимо її C'_ν/, зовні якої в $H(r)$, $r \geq R_\nu^*$ виконується нерівність

$$u(z) > -A(r) \sup_{z \in H((1+\alpha_\nu) r)} u(z) . \qquad /5/$$

Послідовність R'_ν вибираємо так, щоб $R'_{\nu+1} > (\nu+1) R'_\nu$ і при $r \geq R_\nu$ виконувалась нерівність

$$\sum_{z_j^{(\nu)} \in H(r)} \rho_j^{(\nu)} < \varepsilon_\nu r , \quad C(z_j^{(\nu)}, \rho_j^{(\nu)}) \subset C'_\nu .$$

Вилучимо з кожної множини C'_ν ті кружки, для яких виконується умова

$$C(z_j^{(\nu)}, \rho_j^{(\nu)}) \cap \{z : R'_\nu \leq |z| < R'_{\nu+1}\} \cap H_+ \neq \emptyset .$$

Сукупність таких кружків позначимо C'. Тоді C' – C^0-множиною. Справді, якщо $C' = \bigcup_j c(z_j, \rho_j)$ і $R'_\nu \le r < R'_{\nu+1}$, то

$$\frac{1}{r} \sum_{z_j \in A(r)} \rho_j < \frac{1}{r} \left(R'_\nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} \varepsilon_j R'_{j+1} \right) + \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} <$$

$$< \frac{1}{R'_\nu} \left(R'_1 + R'_{\nu-1} \sum_{j=1}^{\nu-2} \varepsilon_j \right) + \varepsilon_{\nu-1} + \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} <$$

$$< \frac{R'_1}{R'_\nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{7}{2^{\nu+1}} .$$

Таким чином, при $|z| > R'_\nu$ в $H_+ \setminus C'$ виконується нерівність /5/. Звідки, спрямувавши ν до ∞, одержимо /2/.

1. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М., 1956. 3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М., 1969. 4. Фридман А.Н. Оценки снизу субгармонических функций // Укр. мат. журн. 1980. Т.32. № 5. С.701-706. 5. Фридман А.Н. Оценки снизу субгармонических функций. Львов, 1979. Рукопись деп. в ВИНИТИ. № 2439. 6. Эйдерман В.Я. Оценки вне исключительных множеств для δ-субгармонических функций в шаре. М., 1981. 7. Шкаликов А.А. Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций // Мат. сб. 1984. Т.123/165, № 3. С.317-347. 8. Hayman W.K. Questions of regularity connected with Phragmen-Lindelöf principle // J. Math. pures et app. 1956. Vol. 35. № 2. P. 38-45. 9. Hayman W.K. The minimum modulus of large integral functions // Proc. London Math. Soc. 1952. Vol. (3) 2. P. 469-512.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 511

Я.М.Холявка

ОЦІНКА СТЕПЕНЯ ТА ДОВЖИНИ АЛГЕБРАЇЧНОГО ЧИСЛА СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Нехай $\mathbb{A}$ - поле алгебраїчних чисел, $\alpha_i \in \mathbb{A}$, $n_i = \deg \alpha_i$, $l_i = L(\alpha_i)$ - степінь і довжина α_i, $\wp(z)$ - еліптична функція Вейєрштрасса. Відомо, що $\wp(z)$ задовольняє рівняння

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 .$$

При вивченні арифметичних властивостей $\wp(z)$ виникає завдання оцінити степінь і довжину числа α_4 ,

$$\alpha_4^2 = 4\alpha_1^3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3 , \qquad /1/$$

якщо степінь та довжина α_i , i = 1, 2,3 відомі.

<u>Теорема.</u> Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{A}/\{0\}$,

$$n_{i,j} = \deg \mathbb{Q}(\alpha_i, \alpha_j), \quad m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Тоді

$$L(\alpha_4) < \exp\left(4m\left(\frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3} + 1\right)\right), \qquad /2/$$

$$\deg \alpha_4 \geq m\left(\min\left(3n_{1,2}, n_{1,3}, n_{2,3}\right)\right)^{-1}. \qquad /3/$$

<u>Доведення.</u> Нехай $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbb{Q}(\theta)$, $\alpha_j^{(i)}$ і $\theta^{(i)}$ - спряжені відповідно чисел α_j і θ ; $\alpha_j = \varphi_j(\theta)$, $\varphi_j(z) \in \mathbb{Q}[z]$, j = 1, 2, 3. З /1/ випливає, що α_4 буде коренем многочлена

$$\mathcal{P}(z) = \left(a_1^{4n_1^{-1}} a_2^{n_2^{-1}} a_3^{n_3^{-1}}\right)^m \prod_{i=1}^{m} \left(z^2 - \left(4\varphi_1^3(\theta^{(i)}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_1(\theta^{(i)}) \cdot \varphi_2(\theta^{(i)}) + \varphi_3(\theta^{(i)})\right)\right), \qquad /4/$$

де a_j - старші коефіцієнти основних многочленів чисел α_j . З теореми 10.2 праці Н.І.Фельдмана * дістаємо $\mathcal{P}(z) \in \mathbb{Z}[z]$. Виконавши множення в /4/, запишемо $\mathcal{P}(z)$ у вигляді суми 7^m до-

* Ф е л ь д м а н Н.И. Приближение алгебраических чисел. М., 1981.

данків. З означення довжини многочлена і теореми 1.3 отримуємо

$$L(\mathcal{P})\leq\left(7a_1^{4n_1^{-1}}a_2^{n_2^{-1}}a_3^{n_3^{-1}}\right)^m\prod_{i=1}^{n_1}\max(1,|\alpha_1^{(i)}|)^{\frac{4m}{n_1}}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_2}\max(1,|\alpha_2^{(i)}|)^{\frac{m}{n_2}}\prod_{i=1}^{n_3}\max(1,|\alpha_3^{(i)}|)^{\frac{m}{n_3}}\leq$$

$$\leq\exp\left(m\left(\frac{4\ln L_1}{n_1}+\frac{\ln L_2}{n_2}+\frac{\ln L_3}{n_3}+\ln 7\right)\right). \qquad /5/$$

Нехай $\mathcal{P}_0$ - основний многочлен числа α_4. Тоді з теореми 4.2 випливає, що $\mathcal{P}=\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1$, де $\mathcal{P}_1\in\mathbb{Z}[z]$. З теореми 3.3 маємо $L(\alpha_4)\leq 4^m L(\mathcal{P})$, що разом з /5/ дає /2/.

Оскільки $\alpha_2=(\alpha_4^2-4\alpha_1^3-\alpha_3)\alpha_1^{-1}$, то

$$\deg_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_3)}\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\leq$$

$$\leq\deg_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_3)}\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\leq\deg\alpha_4.$$

З останньої нерівності дістаємо $\deg\alpha_4\geq mn_{1,3}^{-1}$. Аналогічно доводиться, що $\deg\alpha_4\geq m\,n_{1,2}^{-1}$ і $\deg\alpha_4\geq m(3n_{1,3})^{-1}$, звідки й випливає /3/.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 512.544

О.Д.Артемович

ГІПОЦЕНТРАЛЬНІ p -ГРУПИ З ДОПОВНЮВАНИМИ НЕАБЕЛЕВИМИ НОРМАЛЬНИМИ ДІЛЬНИКАМИ

Нехай p -просте число, $Z(G)$ - центр групи G, $G' = \gamma_2 G$ - її комутант. Група G називається гіпоцентральною /класу δ /, коли вона володіє /нижнім центральним/ рядом $G = \gamma_1 G \geqslant \gamma_2 G \geqslant \ldots \geqslant \gamma_\beta G \geqslant \ldots$, де $\gamma_{\alpha+1} G = [G, \gamma_\alpha G]$, якщо α - неграничне, і $\gamma_\beta G = \bigcap_{\lambda < \beta} \gamma_\lambda G$, коли β - граничне, причому $\gamma_\delta G = 1$ для деякого порядкового числа δ. Зауважимо також, що нільпотентно апроксимовані групи - це гіпоцентральні групи класу $\leqslant \omega$ і тільки вони. Всі інші означення можна знайти [4, 5].

<u>Твердження 1.</u> Якщо у ненільпотентній групі G доповнювані неабелеві нормальні дільники, то правильне одне із тверджень:
а/ підгрупа $\gamma_2 G$ абелева /тобто G - двоступенево розв"язна/;
б/ підгрупа $\gamma_2 G$ неабелева і $\gamma_2 G = \gamma_3 G$.

<u>Доведення.</u> Справді, якщо підгрупа $\gamma_2 G$ неабелева і $\gamma_2 G \neq \gamma_3 G$, то $G/\gamma_3 G$ - нільпотентна група з доповнюваним комутантом, що неможливо.

<u>Твердження 2.</u> Нехай G - p -група, причому $G' \leqslant Z(G)$. Тоді рівносильні наступні твердження: а/ в групі G - доповнювані неабелеві нормальні дільники; б/ в групі G доповнювані неабелеві підгрупи; в/ $G = A \times B$, де B - абелева група експоненти p, A - прямо нерозкладна p -група одного з типів:

С1/ $A = D\langle y \rangle$, де D - нормальна абелева підгрупа експоненти p, $y^p \in Z(A)$;

С2/ A - група Міллера-Морено;

С3/ $A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, $a^4 = b^2 = c^2 = 1$, $[b,c] = b^2$, $[a,c] = 1$,

С4/ $A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, $a^4 = b^4 = c^2 = 1$, $[a,c] = a^2$, $[b,c] = b^2$;

С5/ $A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle$, $a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$, $[a,d] = a^2$, $[b,d] = c$, $[c,d] = 1$;

В1/ $A = ((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, $a_i^p = b^p = c^p = 1$, $[a,b] = a_1$, $[a,c] = a_2$, $[b,c] = a_3$, $[a_i,b] = [a_i,c] = 1$, $i = 1,2,3$;

В2/ A - прямий добуток з об"єднаним центром двох груп дієдра порядку 8;

В3/ A – прямий добуток з об"єднаним центром двох неабелевих груп порядку p^3 і експоненти p, $p>2$;

В4/ $A=(\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle)\lambda(\langle d\rangle\times\langle f\rangle), \exp A=p, [b,d]=a_1,$ $[c,d]=a_2, [b,f]=1, [c,f]=a_1^{\alpha}, \alpha\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p), a_i\in Z(A), p>2, i=1,2;$

В5/ $A=(\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle)\lambda(\langle d\rangle\times\langle f\rangle), \exp A=p, [b,d]=a_1,$ $[c,d]=a_2, [b,f]=a_2, [c,f]=a_1^{\alpha}a_2^{\beta}, \alpha\not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p), a_i\in Z(A),$ $\beta\in\mathbb{Z}, i=1,2, p>2$.

Доведення проводиться аналогічно, як і в [1]. Використано той факт, що комутант двоступенево нільпотентної групи з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками – елементарний абелів.

Твердження 3. Нехай p-група G, в якій доповнювані неабелеві нормальні дільники і $\gamma_2 G\neq\gamma_3 G$ не містить абелевих максимальних підгруп. Тоді:

а/ при $G'\leqslant Z(G)$ існує така абелева підгрупа Z експоненти p, для якої $G'\cap Z=1$ і $G'\times Z$ – нормальна абелева підгрупа індексу p^2 групи G;

б/ при $G'\nleqslant Z(G)$ комутант G' містить нормальну в G підгрупу Q індексу p і прообраз центра $Z(G/Q)$ фактор-групи G/Q – нормальна в G абелева підгрупа індекса p^2.

Доведення. Якщо $G'\leqslant Z(G)$, то це безпосередньо випливає з твердження 2. Тому нехай $G'\nleqslant Z(G)$. Тоді /див., наприклад, доведення леми 2.5 [1]/ $G=G'\langle b\rangle\lambda S$, де S – абелева підгрупа експоненти p, $|b|=p$. Далі, комутант фактор-групи $\hat{G}=G/\gamma_3 G$ містить нормальну в $\hat{G}$ підгрупу $\hat{Q}$ індексу p. Тому повний прообраз Q підгрупи $\hat{Q}$ нормальний в G і $|G':Q|=p$. Нехай $\bar{G}=G/Q$. Тоді $|\bar{G}'|=p$, $\bar{G}'\leqslant Z(\bar{G}), \bar{G}=\bar{G}'\langle\bar{b}\rangle\lambda\bar{S}$, причому $[\langle\bar{b}\rangle,\bar{S}]\neq\bar{1}$. Оскільки $\bar{S}$ – абелева підгрупа експоненти p, то $\bar{S}=(\bar{S}\cap Z(\bar{G}))\times\bar{Y}$, а отже, $\bar{Y}\cap Z(\bar{G})=\bar{1}$. Таким чином, $\bar{G}=\bar{K}\times\bar{F}$, де $\bar{F}=\bar{S}\cap Z(\bar{G})$, $\bar{K}=(\bar{G}'\times\langle\bar{b}\rangle)\lambda\bar{Y}$. Крім того, $|\bar{K}|=p^3$, підгрупа $\bar{N}=\bar{G}'\times\bar{F}$ збігається з центром $Z(\bar{G})$ фактор-групи $\bar{G}$, а отже, $\bar{N}$ недоповнювана в $\bar{G}$. Звідси випливає, що її повний прообраз N у групі G теж абелева підгрупа і $|G:N|=|\bar{G}:\bar{N}|=p^2$. Твердження доведено.

Наслідок 1: p -група G з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками і $\gamma_2 G \neq \gamma_3 G$ містить таку абелеву нормальну підгрупу N індексу p^2, що фактор-група G/N елементарна абелева і, як наслідок, підгрупа G' абелева і $|G:C_G(G')| \leq p^2$.

Теорема 1. Якщо G – гіпоцентральна p -група з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками, то $|G'| < \infty$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що група G прямо нерозкладна і нільпотентно апроксимована. Для двоступенево нільпотентної групи G лема випливає з твердження 2. Тому надалі приймаємо, що $G' \nleq Z(G)$, а отже, $p \leq |G: C_G(G')| \leq p^2$ /див.наслідок 1/.

Нехай $A = C_G(G')$. Тоді $G = G'\langle s\rangle \leftthreetimes F$, де F – деяка абелева група експоненти p. Якщо $F \nleq A$, то $G = FA$, $F \cap A \leq Z(G)$, і оскільки G прямо нерозкладна, то $|F| = p$. Тоді $G = G'\langle s, F\rangle$. Легко зауважити, що $|\langle s,F\rangle| < \infty$, $G = \gamma_k G \cdot \langle s,F\rangle (k \in \mathbb{N})$, $\gamma_2 G = \langle s,F\rangle'$, а тому $|\gamma_2 G| < \infty$. Коли ж $F \leq A$, то внаслідок прямої нерозкладності групи G $F \nleq Z(G)$ і $G = \langle G', s, F\rangle = G'\Omega(A)\langle s\rangle$. Оскільки комутант кожної фактор-групи $G/\gamma_k G$, де $k \in \mathbb{N}$, група експоненти p і $\gamma_\omega G = 1$, то $G' \leq \Omega(A)$, а отже, $|G'| < \infty$.

Припустимо тепер, що $C_G(G')$ – неабелева підгрупа індексу p групи G. Оскільки $G' \nleq Z(G)$, то $G = G'\langle d\rangle \leftthreetimes B$, де $|d| = p$, а B – абелева підгрупа експоненти p, причому $[G,B] \neq 1$. Крім того, $G = C_G(G') \cdot B$. Приймемо $B_1 = B \cap C_G(G')$. Тоді $B/B_1 \simeq G/C_G(G')$, а тому $|B : B_1| = p$. Нехай $B = B_1 \times \langle b\rangle$, де b – деякий елемент порядку p. Тоді $G/G'B_1 \simeq G'B_1\langle b,d\rangle/G'B_1$ – елементарна абелева група порядку p^2 і, як у [2, лема 2.1], $C_G(G') = G'B_1\langle c\rangle$ для деякого елемента c, причому підгрупа $A = G'\langle c\rangle$ абелева, $|A:G'| = p$ і $A \cap B = 1$. Далі, $|B_1| = p$, $(A\langle b\rangle)' = G'$, а отже, $|A| < \infty$ і $|G'| < \infty$.

Розглянемо врешті випадок, коли $C_G(G')$ – абелева підгрупа індексу p^2. Тоді в G знайдуться такі елементи a і b порядку p, що $G = (C_G(G') \leftthreetimes \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $G' = \langle G', a, b\rangle'$, $G'\langle a,b\rangle$ – група з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками /див. [2]/, $|G'| < |\langle a,b\rangle| < \infty$. Теорема доведена.

Твердження 4. У гіпоцентральній групі G тоді і лише тоді доповнювані неабелеві нормальні дільники, коли правильне одне із тверджень: E/ якщо група G періодична, то $G = P \times B$, де B – цілком факторизована абелева група, а P – /прямо нерозкладна/ p-група з доповнюваними неабелевими нормальними дільниками; F /якщо G – група без кручення, то G – центральне розширення абелевої групи за допомогою простої групи; H / якщо G – змішана група, то $\tau G \leq Z(G)$ і $G/\tau G$ – група типу F /, де τG періодична частина G.

Доведення нескладне і ми його опускаємо.

Наслідок 2. У гіпоцентральній p-групі G тоді і лише тоді доповнювані неабелеві нормальні дільники, коли $G = A \times B$, де B – абелева група експоненти p, а A – група одного із типів CI/–C5/, BI/–B5/, або типів:

HI/ $A = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle,\ a^{2^n} = b^2 = 1,\ [a, b] = a^{-2},\ n \geq 2;$

H2/ $A = (\langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_{k-1} \rangle \times \ldots \times \langle a_{p-1} \rangle) \lambda \langle x \rangle,\ p > 2,$

$$a_j^{p^{m-1}} = a_i^{p^m} = x^p = 1,\ 2 \leq k \leq p,\ j = \overline{0, k-2},\ i = \overline{k-1, p-1},\ a_0 = 1,\ m_p = 1,$$

$$[a_{\alpha+1}, x] = a_\alpha\ (\alpha = \overline{1, p-2}),\ m \geq 2,\ pm_t + C_p^t \equiv 0 \pmod{p^m},$$

$$[a_1, x] = a_{k-1}^{pm_{p-k+1}} \cdots a_{p-2}^{pm_2} a_{p-1}^{pm_1} \prod_{s=0}^{k-2} a_s^{pm_{p-s}},\ pm_\ell + C_p^\ell \equiv 0 \pmod{p^{m-1}},$$

$$t = \overline{1, p-k+1},\ \ell = \overline{p-k+2, p-1},\ m, m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{Z};$$

H3/ $A = (C_A(A^\nabla) \lambda \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle,\ |a| = |b| = p,$

$$C_A(A^\nabla) = A^\nabla \times R = A^\nabla \times D,\ p > 2,\ [R, \langle a \rangle] = [D, \langle b \rangle] = 1,$$

R, D – абелеві підгрупи експоненти p;

H4/ $A = (\langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_k \rangle) \lambda (\langle b \rangle \times \langle x \rangle),\ |a_1| = |a_i| = |b| =$
$= |x| = p,\ 2 \leq k \leq p-1,\ [a_k, x] = 1,\ [a_i, x] = a_{i-1},\ [a_{i-1}, b] = 1,$
$[a_k, b] = a_1,\ i = \overline{2, k},\ p > 2;$

H5/ $A = C \lambda (\langle b \rangle \times \langle x \rangle),\ |b| = p,\ p > 2,\ C \lambda \langle x \rangle$ – група типу H2/, причому $[a_z, b] = 1,\ z = \overline{1, p-2},$
$[a_{p-1}, b] = a_{k-1}^{p^{m-1}}.$

Доведення. Враховуючи теорему 1, твердження випливає з теореми 2.1 і наслідку з [3].

1. А р т е м о в и ч О.Д. О конечных нильпотентных группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. К., 1984. 2. А р т е м о в и ч О.Д. Строение конечных сверхразрешимых групп с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями. К., 1985. 3. А р т е м о в и ч О.Д. О группах с дополняемыми неабелевыми нормальными делителями // Строение групп и свойства их подгрупп. К., 1986. 4. Ч е р н и к о в С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М., 1980. 5. Robinson D.J.S. A course in the theory of groups.- New York e.a. 1982.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.89

УДК 517:947

О.Л.Горбачук

ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКУ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З НОРМАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Розглядаємо еволюційне рівняння $\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0$, $t \in [0, \infty]$, де A – нормальний оператор в банаховому просторі. Задача Коші поставлена рівномірно коректно, якщо початкові дані $y_n(0) \to 0$, то розв"язок $y_n(t) \to 0$ рівномірно по t на кожному скінченому проміжку $[0T]$ /[2], с.58/. Послідовність функцій $y_n(t)$, $t \in [0, \infty]$ має границю в сенсі Чезаро, якщо існує $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T y_n(\varepsilon)\, d\varepsilon$ /[3], с.519–523/.

Теорема. Обмежений розв"язок рівномірно коректної задачі Коші рівняння $\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0$, де A – нормальний оператор, має границю при $t \to \infty$ в сенсі Чезаро.

Доведення. Оскільки задача Коші поставлена рівномірно коректно, то A – генератор півгрупи $u(t)$ класу C_0 [2]. Враховуючи, що $A_{\lambda t}$ – нормальний оператор, одержуємо представлення $u(t) = \int_c e^{-\lambda t}\, dE_\lambda$ [3] і $y(t) = \int_c e^{-\lambda t} dE_\lambda f$, де $y(0) = f$ і інтегрування відбувається по комплексній площині. Далі потрібна лема.

Лема. Якщо розв"язок $y(t)$ рівняння $\frac{dy}{dt} + Ay(t) = 0$, де A – нормальний оператор, обмежений, то носій спектральної міри $(E_\lambda f, f)$, $f = y(0)$ лежить у правій півплощині $Re\lambda \geq 0$ /тобто міра $E_\lambda f, f$ зосереджена в $Re\lambda \geq 0$/.

Доведення. Для того, щоб показати, що міра відкритої лівої півплощини $Re\lambda < 0$ дорівнює нулю, достатньо встановити, що міра точок $Re\lambda < -\frac{1}{n}$ – це нуль при довільному n. Справді, з огляду на зчисленну адитивність міри ліва відкрита півплощина одержується як зчислення об"єднання $\{Re\lambda < -\frac{1}{n}\}$. Зробивши обчислення і врахувавши, що розв"язок за умовою обмежений, одержимо

$$\|y(t)\| = \int_C e^{(-2Re\lambda)t} d(E_\lambda f, f) \le M, \quad f = y(0).$$

Оскільки підінтегральна функція додатна, то

$$\int_{Re\lambda < -\frac{1}{n}} e^{(-2Re\lambda)t} d(E_\lambda f, f) \le M$$

Функція $e^{-2Re\lambda t} \to \infty$ при $t \to \infty$ у кожній точці області $Re\lambda < -\frac{1}{n}$. Використовуючи лему Фату [1], одержуємо $d(E_\lambda f, f) = 0$. Лема доведена.

При доведенні теореми розглянемо два випадки. У першому нехай $f \in Ker A$, тобто $Af = 0$ і $E_0 f = f$. Оскільки f – власний вектор, то $e^A f = e^0 f = f$

Обчислимо границю в сенсі Чезаро

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\varepsilon)d\varepsilon = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-A\varepsilon} f d\varepsilon = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f d\varepsilon = f$$

Розглянемо другий випадок, коли $Af \ne 0$, тобто $E_0 f \ne f$. Звідси випливає, що міра $(E_\lambda f, f)$ неперервна в нулі по λ. Встановимо, що у другому випадку чезарівська границя розв"язку дорівнює нулю. Враховуючи, що міра зосереджена у замкнутій правій площині, одержуємо

$$y(t) = \int_{Re\lambda \ge 0} e^{-\lambda t} dE_\lambda f, \quad t \in [0\ \infty).$$

Знаходимо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\varepsilon)d\varepsilon = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{Re\lambda\ge 0} e^{-\lambda\varepsilon} dE_\lambda f\Big) d\varepsilon$$

Використовуючи теорему Фубіні, записуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t y(\varepsilon)d\varepsilon = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{Re\lambda\ge 0}\Big(\int_0^t e^{-\lambda\varepsilon}d\varepsilon\Big)dE_\lambda f =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{Re\lambda\ge 0}\Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\varepsilon}\Big]_0^t dE_\lambda f =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_{Re\lambda\ge 0}\Big(-\frac{1}{\lambda t}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda t}\Big)dE_\lambda f$$

Функція $\frac{1}{\lambda t} - \frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t} \to 0$ при $t \to 0$ всюди крім точки 0. Враховуючи, що міра $(dE_\lambda f, f)$ неперервна при $\lambda = 0$, за лемою Фату одержуємо

$$\lim_{t\to\infty} \int_{Re\lambda \geq 0} \left(\frac{1}{\lambda t} - \frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t}\right) dE_\lambda f \to 0,$$

що завершує доведення теореми.

1. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1979. 2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. 3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.89

УДК 515.12

Б.М.Бокало

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДОТИКАННЯ ТОПОЛОГІЙ І $\mathcal{P}$-РОЗРІДЖЕНИХ ПРОСТОРІВ

В [1] визначено відношення дотикання топологій, які задані на одній і тій же множині. Це відношення має більш тонку природу, ніж відношення включення топологій. Його можна розглядати як один з виразників фундаментальної інтуїтивної ідеї апроксимації однієї топології іншою. Ми дослідимо поведінку цього відношення при операції добутку просторів, а також встановимо зв"язок між поняттям дотикання топологій і поняттям $\mathcal{P}$-розрідженості простору. У термінології та позначеннях дотримуємося праці [2]. Усі простори, що розглядаються, вважаються хаусдорфовими.

Нехай $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}'$ – топології на множині X.

Означення 1 [1]. Топологія $\mathcal{T}$ дотикається топології $\mathcal{T}'$, якщо в кожній непорожній множині $Y \subset X$ існує точка y така, що для довільних її околів $U \in \mathcal{T}$ і $U' \in \mathcal{T}'$ існують такі $V \in \mathcal{T}$ і $V' \in \mathcal{T}'$, що $y \in V' \cap Y \subset U \cap Y$ і $y \in V \cap Y \subset U' \cap Y$.

Означення 2. Топологія $\mathcal{T}$ сильно дотикається топології $\mathcal{T}'$, якщо для кожної непорожньої множини $Y \subset X$ існує непорожня множина $U \subset Y$, яка належить як $\mathcal{T}/Y$, так і $\mathcal{T}'/Y$.

Означення 3 [3]. Топологічний простір X називається $\mathcal{P}$-розрідженим, де $\mathcal{P}$ – деяка топологічна властивість, якщо в кожній непорожній замкненій множині $Y \subset X$ існує точка y і такий її окіл O_y в X, що підпростір $\overline{O_y \cap Y}$ має властивість $\mathcal{P}$.

Топологічна властивість $\mathcal{P}$, яка зберігається операцією вільної суми, без обмеження на кількість елементів, домовимось називати адитивною. Скажемо, що властивість $\mathcal{P}$ локально наслідкова по замкнених множинах, якщо для довільного простору X, який має властивість $\mathcal{P}$, кожний замкнений підпростір F простору X локально володіє властивістю $\mathcal{P}$, тобто для кожної точки $x \in F$ існує окіл Ox в X такий, що підпростір $\overline{Ox \cap F}$ має властивість $\mathcal{P}$.

Теорема 1. Регулярні топології $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}'$ на множині X дотикаються тоді і тільки тоді, коли для кожної непорожньої множини $Y \subset X$ існує непорожня множина $V \subset Y$, яка належить як $\mathcal{T}/Y$, так і $\mathcal{T}'/Y$, тобто коли $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}'$ сильно дотикаються.

Теорема 2. Для будь-якого регулярного простору $(X, \mathcal{T})$ і довільної адитивної, локально наслідкової по замкнених множинах, властивості $\mathcal{P}$ рівносильні наступні умови:

а/ на X існує регулярна топологія $\mathcal{T}'$ з властивістю $\mathcal{P}$, яка дотикається топології $\mathcal{T}$;

б/ на X існує регулярна топологія $\mathcal{T}'$ з властивістю $\mathcal{P}$, яка сильно дотикається топології $\mathcal{T}$;

в/ $(X, \mathcal{T})$ – $\mathcal{P}$-розріджений простір.

Нагадаємо, що коли $\mathcal{P}$ – компактність, то $\mathcal{P}$-розріджені простори називаються k-розрідженими, а якщо $\mathcal{P}$ – метризованість, то $\mathcal{P}$-розріджені простори називаються $\mathcal{M}$-розрідженими.

Наслідок 1. Для регулярного простору $(X, \mathcal{T})$ рівносильні наступні умови:

а/ $\mathcal{T}$ дотикається метризованої топології $\mathcal{T}'$;

б/ $(X, \mathcal{T})$ – $\mathcal{M}$-розріджений простір.

Наслідок 2. Для регулярного простору $(X, \mathcal{T})$ рівносильні умови:

а/ топологія $\mathcal{T}$ дотикається локально компактної топології $\mathcal{T}'$;

б/ топологія $\mathcal{T}$ сильно дотикається компактної топології $\mathcal{T}'$;

в/ $(X, \mathcal{T})$ – k -розріджений простір.

Нижче, X і Y – довільні множини, $\mathcal{T}_X$ і $\mathcal{T}'_X$ – топології на X ; $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{T}'_Y$ – топології на Y . Через $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ позначимо топологію тихонівського добутку $(X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.

Теорема 3. Нехай $\mathcal{T}_X$ сильно дотикається $\mathcal{T}'_X$. Тоді:

а/ якщо $\mathcal{T}_Y$ дотикається $\mathcal{T}'_Y$, то $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ дотикається $\mathcal{T}'_X \otimes \mathcal{T}'_Y$;

б/ якщо $\mathcal{T}_Y$ сильно дотикається $\mathcal{T}'_Y$, то $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ сильно дотикається $\mathcal{T}'_X \times \mathcal{T}'_Y$.

Теорема 4. Рівносильні наступні умови:

а/ $\mathcal{T}$ сильно дотикається $\mathcal{T}'$;

б/ $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ сильно дотикається $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}'$;

в/ $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ дотикається $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}'$.

Теорема 5. Нехай властивість $\mathcal{P}$ – адитивна, локально наслідкова по замкнених множинах і скінчено мультиплікативна.

Тоді, якщо X і Y – $\mathcal{P}$ -розріджені простори, то і простір $X \times Y$ $\mathcal{P}$ -розріджений.

Теорема 6. Нехай властивість $\mathcal{P}$ – адитивна, локально наслідкова по замкнених множинах, скінчено мультиплікативна та зберігається досконалими відображеннями /у бік образу/.

Тоді, якщо компакт Y є неперервним образом $\mathcal{G}$ -добутку $\mathcal{P}$ -розріджених компактів, то Y – $\mathcal{P}$ -розріджений компакт.

Автор висловлює щиру подяку проф. А.В. Архангельському за керівництво роботою.

1. Архангельский А.В., Бокало Б.М. Общая концепция касания топологий // Бакинская международная топологическая конференция. 1987. С. 19. 2. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986. 3. Чобан М.М., Додон Н.К. Теория $\mathcal{P}$ -разряженных пространств. Кишинев, 1979.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ПАРЕТО

Випадкова змінна Парето з густиною розподілу ймовірностей

$$p(t;\nu)=\frac{\nu}{(1+t)^{\nu+1}},\quad t>0,\ (\nu>0), \qquad /1/$$

де ν - параметр форми, має ентропію

$$-\int_0^\infty p(t;\nu)\log_2 p(t;\nu)dt=\log_2\frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu},\ (\nu>0) \qquad /2/$$

відбиття

$$\int_0^\infty t^{z-1}p(t;\nu)dt=\Gamma(z)\frac{\Gamma(1-z+\nu)}{\Gamma(\nu)},\ 0<Re\, z<1+\nu,\ (\nu>0) \qquad /3/$$

та інтенсивність відмов

$$h(t;\nu)=p(t;\nu)\Big/\int_t^\infty p(x;\nu)dx=\frac{\nu}{1+t},\ t>0,\ (\nu>0). \qquad /4/$$

<u>Максимальність ентропії</u>. Зі всіх абсолютно неперервних розподілів, заданих на додатній частині дійсної осі, що мають однакові перші логарифмічні моменти, для розподілу Парето характерна найбільша ентропія.

Справді, нехай абсолютно неперервна випадкова змінна з густиною $f(t),\ t>0$ має перший логарифмічний момент

$$\int_0^\infty f(t)\ln(1+t)dt=\int_0^\infty p(t;\nu)\ln(1+t)dt=\frac{1}{\nu},\ (\nu>0). \qquad /5/$$

Тоді

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 p(t;\nu)dt=\log_2\frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu},\quad (\nu>0). \qquad /6/$$

Отже, різницю

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt-\log_2\frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu}, \qquad /7/$$

враховуючи /6/, записуємо у формі

$$\int_0^\infty f(t)\log_2\frac{p(t;\nu)}{f(t)}dt. \qquad /8/$$

За нерівністю Остроградського

$$\log_2 x \leq (x-1)\log_2 e, \quad x>0$$

для виразу /8/ дістаємо нерівність

$$\int_0^\infty f(t)\log_2 \frac{p(t;\nu)}{f(t)}dt \leq \int_0^\infty f(t)\left[\frac{p(t;\nu)}{f(t)}-1\right](\log_2 e)dt=0. \qquad /9/$$

Оскільки вираз зліва у нерівності /9/ дорівнює різниці /7/, то виведено нерівність

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt \leq \log_2 \frac{e^{\frac{1}{\nu}+1}}{\nu}, \qquad /10/$$

що є змістом наведеного твердження.

<u>Приклад.</u> Якщо випадкова змінна Парето має перший логарифмічний момент такий самий, як модуль змінної Коші, то ентропія змінної Парето більша від ентропії модуля змінної Коші.

Справді, модуль змінної Коші з густиною

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, \quad t>0$$

має перший логарифмічний момент

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{2}{\pi}G=0{,}9296953\ldots, \qquad /11/$$

де G = 0,915965594... - стала Каталана, та ентропію

$$-\int_0^\infty f(t)\log_2 f(t)dt=2+\log_2\frac{\pi}{2}=2{,}651495\ldots . \qquad /12/$$

Випадкова змінна Парето з густиною /1/ має перший логарифмічний момент /5/ та ентропію /2/.

За умовою відповідні логарифмічні моменти /5/ і /11/ однакові $\frac{1}{\nu}$ = 0,9296953. Звідки ν = 1,075621.

При цьому значенні параметра форми ентропія /2/ змінної Парето дорівнює 2,678789 і є більшою від ентропії /12/ модуля змінної Коші.

<u>Розщеплення на незалежні множники.</u> Оскільки

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=\Gamma(z), \quad 0<\operatorname{Re} z$$

та

$$\int_0^\infty t^{z-1}\frac{1}{\sigma^\nu\Gamma(\nu)}\frac{e^{-\frac{1}{\sigma t}}}{t^{\nu+1}}dt=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{z-1}\frac{\Gamma(1-z+\nu)}{\Gamma(\nu)};\ \operatorname{Re} z<1+\nu,\ (\sigma>0,\ \nu>0),$$

то з огляду на формулу /3/ густина Парето є ампліфікацією густин

$$\frac{\nu}{(1+t)^{\nu+1}}=e^{-t}\boxdot\frac{1}{\Gamma(\nu)}\,\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{\nu+1}}\ .$$

Отже, випадкова змінна Парето – це добуток двох незалежних випадкових змінних: стандартної експонентної та інверсії гама змінної з одиничним параметром масштабу і параметром форми ν .
З формули /3/ бачимо, що початкові моменти

$$m_j=\Gamma(j+1)\,\frac{\Gamma(\nu-j)}{\Gamma(\nu)},\qquad /j=1,2,\ldots/,$$

випадкової змінної Парето існують лише для $j<\nu$. Зокрема, сподівання існує при $\nu>1$, дисперсія при $\nu>2$.

Спадна інтенсивність відмов. З формули /4/ бачимо, що інтенсивність відмов розподілу Парето монотонно спадає. Ця властивість використовується в теорії надійності. Інтенсивність відмов /4/ однозначно визначає густину /1/ за формулою

$$p(t;\nu)=h(t,\nu)\,e^{-\int_0^t h(x;\nu)dx},\quad t>0,\ (\nu>0).$$

Зазначимо, що розподіл Парето використовується в економіці для моделювання розподілів доходу.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.88

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ОДИН НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо таку задачу Коші:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=a(x)f(y)+b(x),\qquad /1/$$

$$y\big|_{x=x_0}=y_0\neq 0,\qquad /2/$$

$$y'\big|_{x=x_0}=y_1\qquad /3/$$

Припускаємо, що всі функції p, p', q, a, b, f — неперервні, $p>0, q\geq 0$. Крім того, функція $f(y)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(y)-f(\tilde{y})|\leq N|y-\tilde{y}|. \qquad /4/$$

Позначимо через $\tilde{y}$ розв"язок такої лінійної задачі:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\tilde{y}}{dx}\right)-\left[q(x)-a(x)K\right]\tilde{y}=b(x),\ K=\frac{f(y_0)}{y_0}, \qquad /5/$$

$$\tilde{y}\Big|_{x=x_0}=y_0\neq 0, \qquad /6/$$

$$\tilde{y}'\Big|_{x=x_0}=y_1. \qquad /7/$$

Оцінимо близькість розв"язків задач /1/–/3/ та /5/–/7/. Звичайними міркуваннями легко отримати таку нерівність

$$\max_{|x-x_0|\leq h}|y(x)-\tilde{y}(x)|\leq\frac{A\left(N+\frac{f(y_0)}{y_0}\right)}{1-NA}\max_{|x-x_0|\leq h}|\tilde{y}(x)-y_0|, \qquad /8/$$

де

$$A=\max_{|x-x_0|\leq h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\left|\frac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)}{\varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi)-\varphi_2(\xi)\varphi_1'(\xi)}\right|d\xi\right|.$$

Тут $\varphi_i(x)$ $(i=1;2)$ — фундаментальна система розв"язків рівняння $(py')'-qy=0$. Нерівність /8/ виведена у припущенні $NA<1$. Вона є додатковим обмеженням на вихідні дані нелінійної задачі /1/–/3/ і обгрунтовує використання задачі /5/–/7/ для розв"язку вихідної нелінійної задачі Коші.

Як приклад розглянемо таку задачу

$$y''+\omega^2 y+ay^3=0, \qquad /9/$$

$$y(0)=y_0\neq 0,\quad y'(0)=0. \qquad /10/$$

Точний розв"язок /9/–/10/ має вигляд

$$y=y_0\,cn\sqrt{\omega^2+ay_0^2}\,x. \qquad /11/$$

Наближений розв"язок цієї ж задачі за вищевказаною схемою дорівнює

$$\tilde{y}=y_0\cos\sqrt{\omega^2+ay_0^2}\,x. \qquad /12/$$

Як випливає з /11/ та /12/, ці два розв"язки даються близькими періодичними функціями, причому періоди T та $\tilde{T}$ точного та наближеного розв"язків пов"язані співвідношенням

$$T = \tilde{T}\left\{1 + \frac{ay_0^2}{4(2\omega^2 + ay_0^2)} + \frac{9}{64}\left[\frac{ay_0^2}{2\omega^2 + ay_0^2}\right]^2 + \dots\right\}.$$

На закінчення відзначимо, що цю ж схему можна поширити на більш загальні задачі Коші для рівнянь типу

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = a(x)f(y) + b(x)\frac{d}{dx}\mathcal{F}(y) + c(x)g(y') + d(x), \qquad /13/$$

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 \neq 0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y_1 \neq 0.$$

Пропонована лінеаризація здійснюється за допомогою замін

$$f(y) \sim \frac{f(y_0)}{y_0}\tilde{y}, \quad \mathcal{F}(y) \sim \frac{\mathcal{F}(y_0)}{y_0}\tilde{y}, \; g(y') \sim \frac{g(y_1)}{y_1}\tilde{y}'.$$

Близькість лінеаризованого за такою схемою розв"язку задачі Коші до точного можна оцінити стандартними міркуваннями [2, 3] у припущенні неперервності та ліпшицевості функцій $f(y)$, $\mathcal{F}(y)$, $g(y')$.

1. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961. 2. М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д. Про модифікований метод еквівалентної лінеаризації для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.40-42. 3. М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для рівнянь Льєнара // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.42-45.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

УДК 513

Я.Г.Притула

ПРО ОДНУ ОЗНАКУ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР"Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Нехай $f(x)$ - рівномірна майже періодична /р.м.п./ функція, спектр якої має єдину точку згущення в нескінченності [2]. Її ряд Фур"є можна записати в симетричній формі

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x}$$

$$|A_j| + |A_{-j}| > 0,\ j \neq 0;\ \lambda_{-j} = -\lambda_j;\ \lambda_j > 0,\ \lambda_{j+1} > \lambda_j$$

при $j > 0$.

Нехай

$$\omega(\delta, f) = \sup_{x, |h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)|$$

і

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \left[M\{|f(x+h) - f(x)|^p\} \right]^{1/p},$$

де

$$M\{g(x)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(x)\,dx.$$

Розглянемо функцію $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Нехай τ $/a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b/$ розбиття $[a, b]$.

Позначимо

$$V^{(\tau)}(f, [a, b]) = \sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^2.$$

Будемо говорити, що р.м.п. функція $f(x)$ має обмежену τ -варіацію, якщо існують числа $A > 0$ і $\ell > 0$, для яких

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad V^{(\tau)}(f, [a, a+\ell]) \leq A.$$

Теорема. Нехай $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < \beta < 2$, $\gamma > 0$ і $1 \leq \tau < 2p$

Якщо р.м.п. функція $f(x)$ має обмежену τ - варіацію і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\beta/2p} n^{\gamma-\beta/2} \omega_{r+(2-r)q}^{\beta-\beta r/2p} (\pi/\lambda_n, f) \qquad /1/$$

збігається, то і ряд

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^{\beta} |j|^{\gamma} \qquad /2/$$

збігається.

__Доведення.__ Нехай

$$\bar{\omega}_2^2(h,f) = M\{|f(x+h)-f(x)|^2\}.$$

Проводячи міркування як і в [4] для цілого числа S, яке задовольняє нерівності $sh \le \ell < (s+1)h$, одержуємо

$$s\bar{\omega}_2^{2p}(h,f) \le A\,\omega_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h,f).$$

Тому

$$\omega_2^{2p}(h,f) \le \frac{A}{\ell}\frac{(s+1)h}{s}\,\omega_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h,f) \le \frac{2A}{\ell}\,h\,\omega_{r+(2-r)q}^{2p-r}(h,f). \qquad /3/$$

З рівності Парсеваля для р.м.п. функцій маємо

$$M\{|f(x+h)-f(x)|^2\} = 4\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^2 \sin^2\frac{h\lambda_j}{2}.$$

Звідси

$$\omega_2^2(\pi/\lambda_n, f) = \sup_{|h|\le\pi/\lambda_n} \bar{\omega}_2^2(h,f) \ge$$

$$\ge \sup_{|h|\le\pi/\lambda_n}\Big[4\sum_{|\lambda_j|\ge\lambda_n}{}' |A_j|^2 \sin^2\frac{h\lambda_j}{2}\Big] =$$

$$= 2\sum_{|j|\ge n} |A_j|^2 - \inf_{|h|\le\pi/\lambda_n} 2\sum_{|j|\ge n} |A_j|^2 \cos\lambda_j h.$$

Враховуючи, що [5]

$$\inf_{|h|\le\pi/\lambda_n} \sum_{|j|\ge n}{}' |A_j|^2 \cos\lambda_j h \le 0,$$

одержуємо

$$\sum_{|j|\ge n} |A_j|^2 \le \omega_2^2 (\pi/\lambda_n, f). \qquad /4/$$

З нерівностей /3/ і /4/ маємо

$$\sum_{n\le |j|<2n} |A_j|^2 \le C_1 \lambda_n^{-1/p} \omega_{\tau+(2-\tau)q}^{2-\tau/p} (\pi/\lambda_n, f),$$

де $C_1 = \left(\frac{2A\pi}{\ell}\right)^{1/p}$.

Тоді

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_j|^\beta |j|^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{2^n\le|j|<2^{n+1}} |A_j|^\beta |j|^\gamma\Big) \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{2^n\le|j|<2^{n+1}} |A_j|^2\Big)^{\beta/2}\Big(\sum_{2^n\le|j|<2^{n+1}} |j|^{\frac{2\gamma}{2-\beta}}\Big)^{\frac{2-\beta}{2}} \le$$

$$\le C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2^n}^{-\beta/2p}\, 2^{n(\gamma-\beta/2+1)}\, \omega_{\tau+(2-\tau)p}^{\beta-\frac{\beta\tau}{2p}} (\pi/\lambda_{2^n}, f),$$

де $C_2 = C_1^{\beta/2}$.

Збіжність останнього ряду рівносильна збіжності ряду /1/. Звідси випливає справедливість теореми.

Для періодичної функції $f(x)$ у випадку $\beta=1$, $\gamma=0$ теорема доведена в [7], загальний випадок розглянутий у [3].

Умови доведеної теореми в деякому розумінні проміжні між умовами відомих ознак збіжностей ряду /2/, які є узагальненнями на р.м.п. функції ознак Зігмунда і Саса.

Наприклад, при $p\to 1$, $q\to\infty$ умови теореми переходять в умови, які розглядались у [1], а при $p\to\infty$, $q\to 1$ - в умови збіжності ряду /2/, які наведені в [6].

1. К у п ц о в Н.П. Прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах Банаха и разложения Фурье. Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1969. 2. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., 1959. 3. О с м а н о в Г.И. О сходимости рядов Фурье и преобразований Фурье функций из классов $L_2(0,2\pi)$, $L_2^{(\alpha)}[0,2\pi]$ и $L_2^{(\alpha)}(-\infty,\infty)$ // Тр. Азерб. ин-та нефти и химии. Сер. мат., 1970. Вып. 28. С.132-140. 4. П р и -

т у л а Я.Г. Признаки абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций ограниченной вариации // Укр. мат. журн. 1981. Т.33. № 1. С.28–32. 5. П р и т у л а Я.Г. О неравенстве Джексона для B^2 -почти периодических функций // Изв. вузов. Сер. мат. 1972. № 8/123/. С.9–13. 6. П р и т у л а Я.Г. Про збіжність рядів з коефіцієнтів Фур"є майже періодичних функцій Безіковича // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1971. № 2. С.48–52.
7. Izumi M. Izumi S. On absolute convergence of Fourier series // Arkiv för Mat. 1967, vol. 7, N 12. p. 152–160.

Стаття надійшла до редколегії 17.03.89

З М І С Т

Министерство высшего и среднего
специального образования УССР

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая

Издается с 1965 г.

Выпуск 32

ВОПРОСЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И
КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Львов. Издательство при Львовском государственном университете

Адрес редакционной коллегии:
290000 Львов-центр, ул.Университетская, 1. Университет,
кафедра прикладной математики.

Львовская областная книжная типография
290000 Львов, ул.Стефаника, 11.
/На украинском языке/

Редактор В.В.Войтович
Технічний редактор С.Д.Довба
Коректор М.Т.Ломеха

ОИБ № 13753

Підп. до друку 09.08.89. БГ 01911. Формат 60x84/16.
Папір друк. № 3. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 4,65.
Умовн. фарб-відб. 4,88. Обл.-вид. арк. 3,47. Тираж 600 прим.
Вид. № 1883. Зам. № 3003. Ціна 70 коп. Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня. 290000
Львів, вул. Стефаника, 11.

70 к.

ISSN 0201-758X. 0320-6572.
Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1989, вип. 32, 1—80.