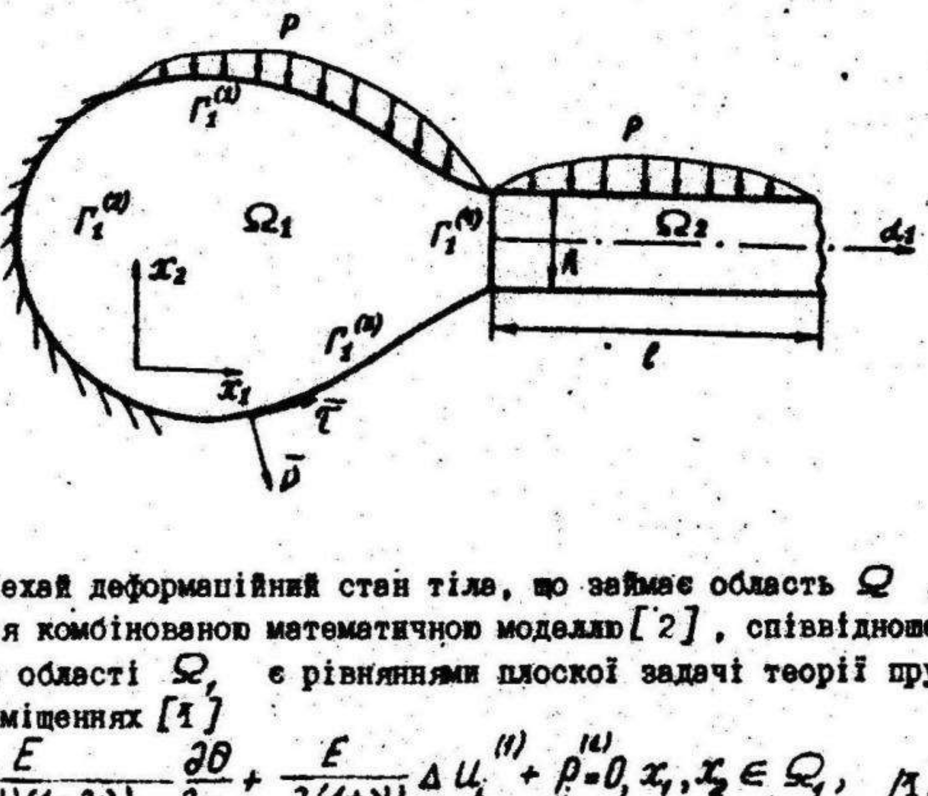
УДК 539.3:519.6

Я.Г.Савула, А.В.Дубовик, Н.М.Паук

КРАЙОВА І ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧІ ЗІ ШТРАФОМ КОМБІНОВАНОЇ МОДЕЛІ ПЛОСКОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про плоску деформацію пружного однорідного тіла, поперечний переріз якого займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ /див. рисунок/. Припустимо, що $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 – двовимірна область з ліпшицевою границею [5] $\Gamma_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Gamma_1^{(i)}$; Ω_2 – область прямокутної форми $\Omega_2 = \{\alpha_1, \alpha_2 : 0 \le \alpha_1 \le \ell, -\frac{h}{2} \le \alpha_2 \le \frac{h}{2}\}$. Припустимо також, що ділянка границі $\Gamma_1^{(4)}$ є прямолінійною і перпендикулярною до лінії $\alpha_2 = const$.



Нехай деформаційний стан тіла, що займає область Ω, описується комбінованою математичною моделлю [2], співвідношення якої в області Ω_1 є рівняннями плоскої задачі теорії пружності в переміщеннях [1]

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{E}{2(1+\nu)}\Delta u_i^{(1)} + p_i^{(1)} = 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega_1, \qquad /1.1/$$

а в області Ω_2 – рівняннями теорії пластин Тимошенка [4]

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{d^2 u_1^{(2)}}{d\alpha_1^2} + p_1^{(2)} = 0, \quad 0 < \alpha_1 < \ell,$$

$$\frac{Ek'h}{2(1+\nu)}\frac{d}{d\alpha_1}\left(\gamma_1^{(2)} + \frac{dW^{(2)}}{d\alpha_1}\right) + p_n^{(2)} = 0,$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{d^2\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1^2}-\frac{EK'h}{2(1+\nu)}\left(\gamma_1^{(2)}+\frac{dW^{(2)}}{d\alpha_1}\right)+m_1^{(2)}=0. \qquad /1.2/$$

Тут $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$ – переміщення точок тіла в декартовій системі координат x_1, x_2 ; $u_1^{(2)}, W^{(2)}$ – переміщення точок серединної площини $\alpha_2 = 0$ в напрямку осей α_1 та α_2 відповідно; $\gamma_1^{(2)}$ – кут повороту нормалі до серединної площини; $\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}$ – густини масових сил, прикладених до частини тіла, що займає область Ω_1 ; $\rho_1^{(2)}$, $\rho_n^{(2)}$, $m_1^{(2)}$ – густини приведених зовнішніх сил і моменту, які виражаються через густину масових та поверхневих сил [4]; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; K' – коефіцієнт зсуву $(K'=5/6)$; $\theta = \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i}$ /по індексах, що повторюються, відбувається підсумовування/, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$.

Вважатимемо заданими граничні умови.

На межі області Ω_1 :

$$\sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\nu_j=p_\nu^{(1)},\quad \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\tau_j=p_\tau^{(1)},\quad x_1,x_2\in\Gamma_1^{(1)},$$

$$u_i^{(1)}\nu_i=0,\quad u_i^{(1)}\tau_i=0,\quad x_1,x_2\in\Gamma_1^{(2)},$$

$$u_i^{(1)}\nu_i=0,\quad \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\tau_j=0,\quad x_1,x_2\in\Gamma_1^{(3)}, \qquad /1.3/$$

де ν_i , τ_i – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ та дотичної $\vec{\tau}$ /див. рисунок/ / $\tau_1=-\nu_2$, $\tau_2=\nu_1$ /;

$$\sigma_{ij}^{(1)}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta\delta_{ij}+\frac{E}{1+\nu}e_{ij}^{(1)},$$

$$e_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i}\right);$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

При $\alpha_1=l$ /умови одного з типів/:

жорстке защемлення $u_1^{(2)}=W^{(2)}=\gamma_1^{(2)}=0$;

шарнірно спертий край $u_1^{(2)}=W^{(2)}=0$, $M_1^{(2)}=0$;

вільний край $Q_1^{(2)}=M_1^{(2)}=T_1^{(2)}=0$, $\qquad$ /1.4/

де $Q_1^{(2)}=\eta\left(\gamma_1^{(2)}+\frac{dW^{(2)}}{d\alpha_1}\right)$, $M_1^{(2)}=\xi\frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1}$, $T_1^{(2)}=\beta\frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1}$, $\eta=\frac{K'hE}{2(1+\nu)}$,

$\xi=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\beta=\frac{Eh}{1-\nu^2}$.

На ділянці границі $\Gamma_1^{(4)}=\left\{\alpha_1=0,\ -\frac{h}{2}\le\alpha_2\le\frac{h}{2}\right\}$:

$$u_i^{(1)}\tau_i=W^{(2)}(0),\quad u_i^{(1)}\nu_i=u_1^{(2)}(0)+\gamma_1^{(2)}(0)\alpha_2, \qquad /1.5/$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \nu_j \, d\alpha_2 = T_1^{(2)}(0), \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \nu_j \alpha_2 \, d\alpha_2 = M_1^{(2)}(0),$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}^{(1)} \nu_i \tau_j \, d\alpha_2 = Q_1^{(2)}(0). \qquad /1.6/$$

Отже, комбінована математична модель плоскої задачі теорії пружності є крайовою задачею для системи рівнянь /1.1/, /1.2/ з граничними умовами /1.3/–/1.6/.

2. Варіаційна постановка зі штрафом. Для задачі /1.1/–/1.6/ запишемо варіаційну постановку зі штрафом

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \to \min, \quad u_\varepsilon \in V, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon > 0, \qquad /2.1/$$

або поки що формально еквівалентну їй постановку

$$a_1(u_\varepsilon^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}) + a_2(u_\varepsilon^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}) + \frac{1}{\varepsilon} a_3(u_\varepsilon, \tilde{u}) = (p, \tilde{u}),$$

$$u_\varepsilon \in V, \quad \forall \tilde{u} \in V, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon > 0. \qquad /2.2/$$

Тут

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} a_1(u_\varepsilon^{(1)}, u_\varepsilon^{(1)}) + \frac{1}{2} a_2(u_\varepsilon^{(2)}, u_\varepsilon^{(2)}) + \frac{1}{2\varepsilon} a_3(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - (p, u_\varepsilon); \qquad /2.3/$$

$$a_1(u^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}) = \int_{\Omega_1} [\lambda \theta(u^{(1)}) \theta(\tilde{u}^{(1)}) + 2\mu e_{ij}(u^{(1)}) e_{ij}(\tilde{u}^{(1)})] \, d\Omega_1; \qquad /2.4/$$

$$a_2(u^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}) = \int_0^{\ell} \Big[\beta \frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1} \frac{d\tilde{u}_1^{(2)}}{d\alpha_1} + \eta \Big(\frac{dW^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)} \Big) \Big(\frac{d\tilde{W}^{(2)}}{d\alpha_1} + \tilde{\gamma}_1^{(2)} \Big) + \qquad /2.5/$$
$$+ \xi \frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1} \frac{d\tilde{\gamma}_1^{(2)}}{d\alpha_1} \Big] \, d\alpha_1;$$

$$a_3(u, \tilde{u}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Big\{ (u_i^{(1)} \tau_i - W^{(2)}(0))(\tilde{u}_i^{(1)} \tau_i - \tilde{W}^{(2)}(0)) +$$
$$+ (u_i^{(1)} \nu_i - u_1^{(2)}(0) - \gamma_1^{(2)}(0) \alpha_2)(\tilde{u}_i^{(1)} \nu_i - \tilde{u}_1^{(2)}(0) - \tilde{\gamma}_1^{(2)}(0) \alpha_2) \Big\} \, d\alpha_2; \qquad /2.6/$$

$$(p, u) = \int_{\Omega_1} (u_1^{(1)} p_1^{(1)} + u_2^{(1)} p_2^{(1)}) \, d\Omega_1 + \int (u_1^{(2)} p_1^{(2)} + W^{(2)} p_n^{(2)} + \gamma_1^{(2)} m_1^{(2)}) \, d\alpha_2; \qquad /2.7/$$

$$V = \{ u = (u^{(1)}, u^{(2)}) : u^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}), \ u^{(2)} = (u_1^{(2)}, W^{(2)}, \gamma_1^{(2)}),$$
$$u^{(1)} \in [W_2^{(1)}(\Omega)]^2, \ u^{(2)} \in [W_2^{(1)}(]0, \ell[)]^3,$$
$$u_i^{(1)} \nu_i = 0, \ u_i^{(1)} \tau_i = 0, \ x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)},$$
$$u_i^{(1)} \nu_i = 0, \ x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(3)}, \ u_1^{(2)}(\ell) = W^{(2)}(\ell) = \gamma_1^{(2)}(\ell) = 0 \}. \qquad /2.8/$$

Зауважимо, що в формулі /2.8/ крайова умова в точці $\alpha_1 = \ell$ відповідає умові жорсткого защемлення. У випадку іншого виду закріплення краю $\alpha_2 = l$ цю умову слід замінити відповідною головною крайовою умовою.

Варіаційні задачі /2.1/, /2.2/ вільні від необхідності задоволення граничних умов спряження /1.5/. Їх потрібно задовольняти при відсутності у формулі /2.1/ штрафного доданку з множником $\frac{1}{\varepsilon}$.

Можна показати, що задача /2.1/ про мінімум функціоналу на множині V еквівалентна крайовій задачі /1.1/, /1.2/ з умовами /1.3/, /1.4/ та

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(u_i^{(1)}\nu_i - u_1^{(2)}(0) - \gamma_1^{(2)}(0)\alpha_2\right) + \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\nu_j = 0,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(u_i^{(1)}\tau_i - W^{(2)}(0)\right) + \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\tau_j = 0,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-h}^{h}\left(u_i^{(1)}\nu_i - u_1^{(2)}(0)\,\gamma_1^{(2)}(0)\alpha_2\right)d\alpha_2 = T_1^{(2)}(0),$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-h}^{h}\left(u_i^{(1)}\nu_i - u_1^{(2)}(0) - \gamma_1^{(2)}(0)\alpha_2\right)\alpha_2\, d\alpha_2 = M_1^{(2)}(0),$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-h}^{h}\left(u_i^{(1)}\tau_i - W^{(2)}(0)\right)d\alpha_2 = Q_1^{(2)}(0), \quad \text{НА } \Gamma_1^{(4)} \qquad /2.9/$$

З умов /2.9/ випливає, що виконується співвідношення /1.6/ і при $\varepsilon \to 0$

$$u_i^{(1)}\nu_i - u_i^{(2)}(0) - \gamma_1^{(2)}(0)\alpha_2 \to 0,$$

$$u_i^{(1)}\tau_i - W^{(2)}(0) \to 0, \quad \text{НА } \Gamma_1^{(4)} \qquad /2.10/$$

3. <u>Дослідження постановки крайової задачі зі штрафом</u>. Для спрощення викладок припустимо, що $\Gamma_1^{(3)} = \varnothing$, при $\alpha_2 = l$ виконуються умови жорсткого защемлення /1.4/.

Розглянемо білінійну форму

$$a_\varepsilon(u,\tilde{u}) = a_1(u^{(1)},\tilde{u}^{(1)}) + a_2(u^{(2)},\tilde{u}^{(2)}) + \frac{1}{\varepsilon}a_3(u,\tilde{u}),\ \varepsilon > 0,\ u,\tilde{u} \in V. \qquad /3.1/$$

Має місце теорема.

<u>Теорема 3.1.</u> Білінійна форма $a_\varepsilon(u,u)$ задовольняє подвійну нерівність

$$m^2\|u\|^2_{1,\Omega} \le a_\varepsilon(u,u) \le M_\varepsilon^2\|u\|^2_{1,\Omega}, \quad \forall u \in V. \qquad /3.2/$$

Тут

$$\|u\|^2_{1,\Omega} = \int_{\Omega_1}\left[\sum_{i=1}^{2} u_i^{(1)2} + \sum_{ij=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j}\right)^2\right]d\Omega + \int_0^l\left(u_1^{(2)2} + W^{(2)2} + \gamma_1^{(2)2} + (u_1^{\prime(2)})^2 + (W^{\prime(2)})^2 + (\gamma_1^{\prime(2)})^2\right)d\alpha_1$$

Доведення. Для отримання оцінки /3.2/ знизу використаємо той факт, що $a_3(u,u) \geq 0$ і, отже,

$$a_\varepsilon(u,u) \geq a_1(u^{(1)},u^{(1)}) + a_2(u^{(2)},u^{(2)}). \qquad /3.3/$$

Далі на основі властивості додатної визначеності пружного потенціалу, нерівностей Корна та Фрідріхса [3, 5] отримаємо

$$a_1(u^{(1)},u^{(1)}) \geq c_1 \|u^{(1)}\|^2_{1,\Omega_1}, \quad c_1 > 0, \qquad /3.4/$$

де $\|u^{(1)}\|^2_{1,\Omega_1} = \int_{\Omega_1} [\sum_{i=1}^{2} u_i^{(1)2} + \sum_{i,j=1}^{2} (\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j})^2] d\Omega_1$.

Використавши очевидну нерівність

$$2ab \geq -(\lambda a^2 + \frac{1}{\lambda} b^2), \quad \forall \lambda > 0$$

та нерівність Фрідріхса, знайдемо

$$a_2(u^{(2)},u^{(2)}) \geq c_2 \|u^{(2)}\|^2_{1,\Omega_2}, \qquad /3.5/$$

де $c_2 > 0$.

Із /3.3/, /3.4/, /3.5/ отримуємо ліву частину нерівності /3.2/.

Оцінимо зверху білінійну форму $a_\varepsilon(u,u)$. Використовуючи очевидну нерівність $2ab \leq a^2 + b^2$, знаходимо

$$a_1(u^{(1)},u^{(1)}) + a_2(u^{(2)},u^{(2)}) \leq c_3 \|u\|^2_{1,\Omega}, \quad c_3 > 0. \qquad /3.6/$$

Розглянемо окремо $a_3(u,u)$. Використавши ту ж очевидну нерівність, теорему про сліди та нерівності, що з неї випливають [5]

$$\int_{\Gamma_1} u_i^{(1)2} d\Gamma \leq c_4 \|u_i^{(1)}\|^2_{1,\Omega_1}, \quad c_4 > 0,$$

$$u_i^{(2)2}(0) \leq c_5 \|u_i^{(2)}\|^2_{1,\Omega_2}, \quad c_5 > 0,$$

отримаємо

$$a_3(u,u) \leq c_6 \|u\|^2_{1\Omega}, \quad c_6 > 0. \qquad /3.7/$$

Ця нерівність разом з /3.6/ приводить до нерівності

$$a_\varepsilon(u,u) \leq (c_3 + \frac{1}{\varepsilon} c_6) \|u\|^2_{1,\Omega}. \qquad /3.8/$$

Отже, $M^2 = c_3 + \frac{1}{\varepsilon} c_6$.

Наслідок. З доведеної теореми /3.1/ випливає, оскільки $\|u\|^2_{1,\Omega} \geq \|u\|^2_{0,\Omega}$, то оператор комбінованої математичної моделі зі штрафом додатно визначений, тобто

$$a_\varepsilon(u,u) \geq m^2 \|u\|^2_{0,\Omega},$$
$$\|u\|^2_{0,\Omega} = \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{2} u_i^{(1)2} d\Omega + \int_0^{\ell} (u_1^{(2)2} + W^{(2)2} + \gamma_1^{(2)2}) d\Gamma.$$

Це означає, що існує єдиний узагальнений розв"язок цієї задачі, а також те, що варіаційні постановки /2.1/, /2.2/ еквівалентні.

Нехай $u^\varepsilon \in V$ - розв"язок задачі /1.1/, /1.2/ зі штрафом, а u^* - розв"язок цієї ж задачі без штрафу, тобто $u^* \in V^*$,
$$V^* = \{u = (u^{(1)}, u^{(2)}): u^{(1)} \in [W_2^{(1)}]^2, u^{(2)} \in [W_2^{(1)}(]0,\ell[)]^3;$$
$$u_i^{(1)}\nu_i = 0,\ u_i^{(1)}\tau_i = 0,\ x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)};\ u_1^{(2)}(\ell) = W^{(2)}(\ell) = \gamma_1^{(2)}(\ell) = 0;$$
$$u_i^{(1)}\tau_i = W^{(2)}(0),\ u_i^{(1)}\nu_i = u_1^{(2)}(0) + \gamma_1(0) d_2 \ \text{на}\ \Gamma_1^{(4)}\}$$

З огляду на /2.2/ маємо
$$a_1(u^{(1)\varepsilon}, \tilde u^{(1)}) + a_2(u^{(2)\varepsilon}, \tilde u^{(2)}) + \frac{1}{\varepsilon} a_3(u^\varepsilon, \tilde u) = (\rho, \tilde u),\ u^\varepsilon, \tilde u \in V; \qquad /3.9/$$
$$a_1(u^{*(1)}, \tilde u^{(1)}) + a_2(u^{*(2)}, \tilde u^{(2)}) = (\rho, \tilde u),\ u^* \in V^*, \tilde u \in V. \qquad /3.10/$$

Доведемо теорему.

<u>Теорема 3.2</u>. Нехай $e^\varepsilon = u^\varepsilon - u^*$. Послідовність u^ε збігається при $\varepsilon \to 0$ до узагальненого розв"язку u^*, тобто
$$\|e^\varepsilon\|_{1,\Omega} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \qquad /3.11/$$

<u>Доведення.</u> Обчислимо $a_\varepsilon(e^\varepsilon, \tilde u),\ \forall \tilde u \in V$. Врахувавши /3.9/, /3.10/, знайдемо
$$a_\varepsilon(e^\varepsilon, \tilde u) = (\rho, \tilde u) - a_1(u^{(1)*}, \tilde u^{(1)}) - a_2(u^{(2)*}, \tilde u^{(2)}). \qquad /3.12/$$
Приймемо у /3.12/ $\tilde u = e^\varepsilon$. Отримаємо
$$a_\varepsilon(e^\varepsilon, e^\varepsilon) = (\rho, e^\varepsilon). \qquad /3.13/$$

Замінимо в /3.13/ функцію ρ через переміщення з рівнянь /1.1/, /1.2/. Використавши формули Остроградського та інтегрування по частинах і враховуючи граничні умови /1.3/, /1.4/, представимо праву частину співвідношення /3.12/ у вигляді
$$(\rho, e^\varepsilon) = -\int_{\Gamma_1^{(4)}} [\sigma_{ij}^* \nu_i \nu_j (u_i^{(1)\varepsilon}\nu_i - u_1^{(2)\varepsilon}(0) - d_2 \gamma_1^\varepsilon(0)) +$$
$$+ \sigma_{ij}^* \nu_i \tau_j (u_i^{(1)\varepsilon}\tau_i - W^{(2)\varepsilon}(0))] d\Gamma, \qquad /3.14/$$

де через σ_{ij}^* позначені компоненти тензора напружень, що відповідають розв"язку u^*. Скористаємося далі нерівністю

$$-ab \le 2\varepsilon a^2+\frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon>0$$

для перетворення правої частини рівності /3.14/. Знайдемо

$$(\rho, e^{\varepsilon}) \le 2\varepsilon \int_{\Gamma_1^{(4)}} [(\sigma_{ij}^{*} \nu_i \nu_j)^2 + (\sigma_{ij}^{*} \nu_i \tau_j)^2] d\Gamma +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Gamma_1^{(4)}} [(u_i^{(1)\varepsilon} \nu_i - u_1^{(2)\varepsilon} - \alpha_2 \gamma_1^{(2)\varepsilon}(0))^2 + (u_i \tau_i - W^{(2)\varepsilon}(0))^2] d\Gamma. \qquad /3.15/$$

Зауважимо, що для останнього доданку у формулі /3.15/ має місце рівність $\frac{1}{2\varepsilon} a_3 (u^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) = \frac{1}{2\varepsilon} a_3 (e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon})$. Врахувавши, крім цього, формулу /3.13/, отримаємо

$$a_1(e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon}) + a_2 (e^{\varepsilon} e^{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} a_3 (e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon}) \le \frac{1}{2\varepsilon} a_3 (e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon}) +$$
$$+ 2\varepsilon (\sigma_{ij}^{*}, \sigma_{ij}^{*})_{0,\Gamma_1^{(4)}} ,$$

де $(\sigma_{ij}^{*}, \sigma_{ij}^{*})_{0,\Gamma_1^{(4)}} = \int_{\Gamma_1^{(4)}} [(\sigma_{ij}^{*} \nu_i \nu_j)^2 + (\sigma_{ij}^{*} \nu_i \tau_j)^2] d\Gamma$.

Звідси випливає, що

$$a_{\varepsilon} (e^{\varepsilon} e^{\varepsilon}) \le \varepsilon (\sigma_{ij}^{*}, \sigma_{ij}^{*})_{0,\Gamma_1^{(4)}} . \qquad /3.16/$$

З /3.?/ та /3.16/ приходимо до оцінки

$$\| e^{\varepsilon} \|_{1,\Omega}^2 \le \frac{\varepsilon}{m^e} (\sigma_{ij}^{*}, \sigma_{ij}^{*})_{0,\Gamma_1^{(4)}} , \qquad /3.17/$$

яка безпосередньо приводить до /3.11/.

1. А м е н з а д е Ю.А. Теория упругости. М., 1976. 2. Д у б о в и к А.В., Д ы я к И.И., П а у к Н.М., С ав у л а Я.Г. Численное исследование комбинированной математической модели плоской задачи теории упругости. Львов, 1988. 4? с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 2573-Ук88. 3. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 4. П е л е х Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 5. Р е к т о р и с К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.89