УДК 531/534.01:517.958

Г.А.Шинкаренко

ПОСТАНОВКА ТА РОЗВ"ЯЗУВАНІСТЬ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОВ"ЯЗКОПРУЖНОСТІ

У сучасних електроакустичних пристроях широкого вжитку набули п"єзоелектричні перетворювачі енергії. Незважаючи на значні здобутки у розробці математичних моделей та методів розв"язування задач електропружності, багато запитів практики проектування таких приладів залишаються відкритими внаслідок зв"язності електричного та механічного полів, анізотропії матеріалу, складності форми п"єзоперетворювачів та умов їх контакту з зовнішніми фізико-механічними полями. Найменш вивченими моделями до цього часу є початково-крайові задачі електропружності.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай п"єзоелектрик займає обмежену зв"язну область Ω точок $x=(x_1,\ldots,x_n)$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем границею Γ і $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі Γ. Будемо припускати, що процеси в п"єзоелектрику задовольняють наступні гіпотези.

/1/ Електричне поле п"єзоелектрика безвихрове, тобто $rot E=0$, де $E=(E_1,\ldots,E_n)$ – напруженість електричного поля. Таке припущення дозволяє, по-перше, ввести електричний потенціал за правилом

$$E_k=-\varphi_{,k} \quad \text{в } \Omega\times(0,T] \qquad /1.1/$$

і, по-друге, розділити систему рівнянь Максвелла на незалежні групи рівнянь для визначення електричної та магнітної складових поля. Нехтуючи останніми, що цілком припустимо в акустичному діапазоні коливань [2, 3, 4], запишемо рівняння для знаходження електричного поля п"єзоелектрика

$$D'_{k,k}+J_{k,k}=0, \qquad \text{в } \Omega\times(0,T]; \qquad /1.2/$$

$$D_{k,k}=\rho_e \qquad \text{в } \Omega\times(0,T], \qquad /1.3/$$

де $D=(D_1,\ldots,D_n)$, $J=(J_1,\ldots,J_n)$, ρ_e – електрична індукція, струм провідності та густина зарядів відповідно. Тут і нижче по індексах, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до n, $f'=\partial f/\partial t$, $f''=\partial^2 f/\partial t^2$, $f_{,k}=\partial f/\partial x_k$.

/II/ Пружні властивості п"езоелектрика описуються рівняннями

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \rho u_i'' - \sigma_{ji,j} = \rho f_i \end{cases} \quad в \ \Omega \times (0,T], \qquad /I.4/$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $\{\varepsilon_{ij}\}$ та $\{\sigma_{ij}\}$ – вектор змішень, симетричні тензори деформацій та напружень відповідно, ρ – густина маси, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – вектор масових сил.

/III/ Процеси в п"езоелектрику ізотермічні, причому характеризуються такими рівняннями стану:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km} - e_{kij}E_k + a_{ijkm}\varepsilon'_{km} \\ D_k = e_{kij}\varepsilon_{ij} + \vartheta_{km}E_m \quad в \ \Omega \times [0,T] \\ J_k = z_{km}E_m \end{cases} \qquad /I.5/$$

Тут $\{c_{ijkm}\}$, $\{e_{kij}\}$, $\{a_{ijkm}\}$, $\{\vartheta_{km}\}$ та $\{z_{km}\}$ – тензори модулів пружності, п"езоефекту, внутрішньої в"язкості, діелектричних проникливостей та провідності з наступними властивостями симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}, \quad a_{ijkm} = a_{jikm} = a_{kmij} \\ e_{kij} = e_{kji}, \quad \vartheta_{km} = \vartheta_{mk}, \quad z_{km} = z_{mk} \\ c_{ijkm}\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq c_0\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad c_0 = const > 0 \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in R \\ a_{ijkm}\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geq a_0\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad a_0 = const > 0 \\ \vartheta_{km}v_k v_m \geq \vartheta_0 v_i v_i \quad \vartheta_0 = const > 0 \quad \forall v_i \in R \\ z_{km}v_k v_m \geq z_0 v_i v_i \quad z_0 = const > 0 \end{cases} \qquad /I.6/$$

/IУ/ На поверхні п"езоелектрика задано умови виду

$$\begin{cases} u = 0 \ на \ \Gamma_u \times [0,T], \quad \sigma_{ij}\nu_j = g_i \ на \ \Gamma_\sigma \times [0,T] \\ \varphi = 0 \ на \ \Gamma_\varphi \times [0,T], \quad \{D'_k + J_k\}\nu_k = 0 \ на \ \Gamma_D \times [0,T] \end{cases} \qquad /I.7/$$

та умови на електроді, до якого підводиться струм

$$\begin{cases} \varphi = \Phi \quad на \ \Gamma_j \times [0,T] \\ \int_{\Gamma_j} \{D'_k + J_k\}\nu_k \, d\gamma = I \quad на \ [0,T]. \end{cases} \qquad /I.8/$$

Тут $g=(g_1,\dots,g_n)$ та $I(t)$ – задані значення поверхневого навантаження та струму відповідно; $\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_\sigma$, $\Gamma_u\cap\Gamma_\sigma=\emptyset$,

$$\Gamma=\Gamma_p\cup\Gamma_D\cup\Gamma_j,\ \Gamma_p\cap\Gamma_D=\emptyset,\ \Gamma_p\cap\Gamma_j=\emptyset,\ \Gamma_D\cap\Gamma_j=\emptyset,$$

$$mes(\Gamma_u)>0,\ mes(\Gamma_p)>0. \qquad /1.9/$$

/У/ Початковий стан п"єзоелектрика характеризується рівняннями

$$u\big|_{t=0}=u_0,\ u'\big|_{t=0}=v_0,\ p\big|_{t=0}=p_0 \ в\ \Omega. \qquad /1.10/$$

Зауваження 1.1. Припущення щодо ненульового струму провідності J в п"єзоелектриках цілком виправдане – фізичні експерименти реєструють слабкі струми /зумовлені наявністю вільних іонів/ у всіх діелектриках. Внаслідок цього необхідно припустити, що густина зарядів $\rho_e\neq0$ і, отже, рівняння /1.3/ слід розглядати як визначення густини зарядів.

Зауваження 1.2. Умови /1.8/ записуються на одному з електродів п"єзоперетворювача, який є еквіпотенціальною поверхнею з невідомим значенням потенціалу $p(t)$. При $J=0$ ці умови наведені у праці [7]. Якщо цей електрод підключено до електричного кола, що характеризується провідністю z та рушійною силою, яка розвиває напругу $U(t)$, то

$$I(t)=z\,[\,p(t)-U(t)\,]. \qquad /1.11/$$

Зауваження 1.3. Порівняно з моделями п"єзоефекту, що вивчались у працях [2-4], ми розглядаємо в"язкопружні матеріали з короткочасною пам"яттю.

Отже, сформулюємо задачу так:

знайти електричний потенціал $p(x,t)$ та вектор зміщень $u(x,t)$ такі, що задовольняють рівняння /1.1/, /1.2/, /1.4/, /1.5/, /1.7/, /1.8/ та /1.10/ /1.12/

2. Варіаційна постановка задачі. Введемо простори

$$V=\{v\in H^1(\Omega)^n \mid v=0 \text{ на } \Gamma_u\},\ G=L^2(\Omega),\ H=G^n;$$
$$Q=\{q\in H^1(\Omega) \mid q=0 \text{ на } \Gamma_p;\ q=const \text{ на } \Gamma_j\}$$

і визначимо на них наступні білінійні та лінійні форми:

$$m(u,v)=\int_\Omega \rho u_i v_i\,dx,\quad a(u,v)=\int_\Omega a_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v)\,dx,$$

$$c(u,v)=\int_{\Omega} c_{ijkm}\,\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{km}(v)\,dx,\quad e(v,q)=\int_{\Omega} e_{kji}\,\varepsilon_{ji}(v)\,E_k(q)\,dx,$$

$$Э(p,q)=\int_{\Omega} Э_{km}\,E_k(p)\,E_m(q)\,dx,\quad z(p,q)=\int_{\Omega} z_{km}\,E_k(p)\,E_m(q)\,dx,$$

$$\langle \ell, v\rangle = m(f,v)+\int_{\Gamma_G} g_i v_i\,d\gamma,\quad \langle r,q\rangle = I q\,\big|_{\Gamma}. \qquad /2.1/$$

Далі будемо вважати дані задачі /1.12/ такими, що

$$\begin{cases} f\in L^2(0,T;H),\ g\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_G)^n),\ u_0\in V,\ v_0\in H,\\ I\in L^2(0,T;\mathbb{R}),\ p_0\in Q. \end{cases} \qquad /2.2/$$

Зокрема, останні умови роблять справедливими включення

$$\ell\in L^2(0,T;V'),\qquad r\in L^2(0,T;Q'), \qquad /2.3/$$

де V' та Q' –спряжені простори до просторів V та Q відповідно.

Сформулюємо варіаційну задачу електров"язкопружності:

$$\begin{cases} \text{задано } u_0\in V,\ v_0\in H,\ p_0\in Q,\ \ell\in L^2(0,T;V'),\ r\in L^2(0,T;Q');\\ \text{знайти пару } \varphi=(u,p)\in L^2(0,T;V)\times L^2(0,T;Q) \text{ таку, що}\\ m(u''(t),v)+a(u'(t),v)+c(u(t),v)-e(v,p(t))=\langle \ell(t),v\rangle,\\ \qquad Э(p'(t),q)+z(p(t),q)+e(u'(t),q)=\langle r(t),q\rangle,\\ c(u(0)-u_0,v)=0,\ m(u'(0)-v_0,v)=0\quad \forall v\in V,\\ \qquad Э(p(0)-p_0,q)=0\quad \forall q\in Q. \end{cases} \qquad /2.4/$$

Рівняння задачі /2.4/ виражають добре відомий принцип віртуальних робіт, а вибір початкових умов у цій задачі теж зумовлений енергетичними міркуваннями, смисл яких буде пояснено нижче.

3. <u>Існування та єдиність розв"язку</u>. З огляду на вирази /1.6/ та /1.9/ введемо норми

$\|u\|_H = m^{1/2}(u,u)$

$\|u\|_V = c^{1/2}(u,u)$ /еквівалентна $\|u\|_A = a^{1/2}(u,u)$ /

$\|p\|_Q = Э^{1/2}(p,p)$ /еквівалентна $\|p\|_z = z^{1/2}(p,p)$ /

на просторах H , V та Q відповідно, і зазначимо, що формули

$$|\varphi(t)|^2 = \|u'(t)\|_H^2,\quad \|\varphi(t)\|^2 = \|u(t)\|_V^2+\|p(t)\|_Q^2,$$

$$|||\varphi(t)||| = \|u'(t)\|_A^2 + \|p(t)\|_z^2$$

виражають собою подвоєні значення кінетичної енергії, потенціальної енергії та дисипації енергії розв"язку $\varphi=(u,p)$ задачі /2.4/ /якщо останній існує/.

Теорема. Існує єдиний розв"язок $\varphi=(u,p)\in L^2(0,T;V)\times L^2(0,T;Q)$ варіаційної задачі /2.4/ і при цьому справедливі включення

$$u'\in L^{\infty}(0,T;H)\cap L^2(0,T;V),\ u''\in L^{\infty}(0,T;V'),\ p'\in L^{\infty}(0,T;Q') \quad /3.1/$$

Доведення цієї теореми проведемо на основі напівдискретизації Гальоркіна [1]. Нехай V_h /відповідно Q_h/ скінченновимірний підпростір у просторі V /відп. Q/ такий, що V_h /відп. Q_h/ щільно вкладений у V /відп. Q/. Пару $\varphi_h = (u_h,p_h)\in L^2(0,T;V_h\times Q_h)$ таку, що задовольняє рівняння задачі /2.4/ для будь-яких $v\in V_h$ та $q\in Q_h$, назвемо апроксимацією Гальоркіна розв"язку задачі /2.4/ у просторі $V_h\times Q_h$.
Неважко пересвідчитися, що апроксимація Гальоркіна $\varphi_h(t)=(u_h(t),p_h(t))$ однозначно визначається на інтервалі $[0,T]$ для кожного фіксованого $h>0$. Більше цього, справедливі рівняння /балансу енергії дискретизованої задачі/

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\varphi_h(t)|^2+\|\varphi_h(t)\|^2\right\}+|||\varphi_h(t)|||^2 =$$
$$= \langle \ell(t),\, u_h'(t)\rangle + \langle r(t), p_h'(t)\rangle \quad \forall t\in(0,T]\ \forall h>0. \quad /3.2/$$

Беручи до уваги оцінки вигляду

$$|\langle \ell(t), u'(t)\rangle| \le \mathcal{K}\|\ell(t)\|_{V'}\|u'(t)\|_A \le \tfrac{1}{2}\|u'(t)\|_A^2+\mathcal{K}\|\ell(t)\|_{V'}^2,$$

/тут і нижче одним символом $\mathcal{K}$ позначаються різні додатні константи, значення яких не залежить від величин, що нас цікавлять/, за допомогою енергетичного рівняння /3.2/ приходимо до нерівності

$$|\varphi_h(t)|^2+\|\varphi_h(t)\|^2+\int_0^t|||\varphi_h(\tau)|||^2 d\tau \le \|v_0\|_H^2+\|u_0\|_V^2+\|p_0\|_Q^2+$$
$$+\mathcal{K}\int_0^t\left\{\|\ell(\tau)\|_{V'}^2+\|r(\tau)\|_{Q'}^2\right\}d\tau \quad \forall t\in[0,T]\ \forall h>0. \quad /3.3/$$

Звідси випливає, що при $h\to 0$

послідовність u_h обмежена в $L^{\infty}(0,T;V)$,
послідовність p_h обмежена в $L^{\infty}(0,T;Q)$,
послідовність u_h' обмежена в $L^{\infty}(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$ /3.4/

і, отже, з послідовності (u_h,p_h) можна вибрати підпослідовність (u_Δ,p_Δ) таку, що

$$u_\Delta \to u \quad в \quad L^\infty(0,T;V) \quad *\text{-слабо},$$
$$p_\Delta \to p \quad в \quad L^\infty(0,T;Q) \quad *\text{-слабо},$$
$$u'_\Delta \to u' \quad в \quad L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)\ *\text{-слабо}. \qquad /3.5/$$

Покажемо, що побудована у виразі /3.5/ пара (u,p) є розв"язком варіаційної задачі /2.4/. При умові, що $V_h \subset V_\Delta$, $Q_h \subset Q_\Delta$, апроксимація Гальоркіна задовольняє рівняння

$$\int_0^t\{-m(u'_\Delta,v')+a(u'_\Delta,v)+c(u_\Delta,v)-e(v,p_\Delta)-\langle l,v\rangle\}d\tau=-m(u'_\Delta(0),v(0))=$$
$$=-m(v_0,v(0))\ \forall v\in W_h=\{v\in C^1(0,t;V_h)\,|\,v(t)=0\}\ \forall t\in(0,T]$$
$$\int_0^t\{-э(p_\Delta,q')+z(p_\Delta,q)+e(u'_\Delta,q)-\langle r,q\rangle\}d\tau=-э(p_\Delta(0),q(0))=$$
$$=-э(p_0,q(0))\quad \forall q\in R_h=\{q\in C^1(0,t;Q_h)\,|\,q(t)=0\}.$$

Переходячи в одержаних рівняннях до границі при $\Delta\to 0$, а пізніше виконуючи інтегрування по частинах, приходимо до висновку, що

$$\int_0^t\{m(u'',v)+a(u',v)+c(u,v)-e(v,p)-\langle l,v\rangle\}d\tau=m(u'(0)-v_0,v(0));$$
$$\int_0^t\{э(p',q)+z(p,q)+e(u',q)-\langle r,q\rangle\}d\tau=э(p(0)-p_0,q(0))\ \forall v\in W_h\ \forall q\in R_h.$$

Звідси внаслідок довільності t та щільності V_h /відп. Q_h / у просторі V /відп. Q / випливає, що пара (u,p) задовольняє всі рівняння задачі /2.4/ за винятком початкової умови

$$c(u(0)-u_0,v)=0 \quad \forall v\in V.$$

Але із /3.5/ безпосередньо випливає
$$c(u_0,v(0))=c(u_\Delta(0),v(0))\to c(u(0),v(0))\quad \forall v\in W_h,$$
що приводить до того, що пара (u,p) є розв"язком варіаційної задачі /2.4/.

Єдиність побудованого нами розв"язку (u,p) задачі /2.4/ є безпосереднім наслідком апріорних оцінок /3.3/, її легко встановити на основі міркувань від супротивного.

4. Висновки та заключні зауваження. Основний результат даної роботи – існування єдиного розв"язку варіаційної задачі електров"язкопружності /2.4/ – одержано при практично вживаних припущеннях відносно даних задачі, див. умови /2.2/. Більше того, фізично виправдане припущення щодо ненульового струму провідності та врахування в"язкості за Фойгтом дало змогу максимально спростити

доведення теореми. Зазначимо, що нехтування ефектами провідності та в"язкості п"єзоелектрика залишає схему доведення справедливою і для цього випадку, однак для одержання ключових оцінок виду /3.3/ необхідно скористатися нерівністю Гронуолла [1].

На додаток зазначимо, що при чисельному розв"язуванні задач електропружності використаний нами метод Гальоркіна може успішно застосовуватися для дискретизації задачі по просторових змінних. Особливості такого підходу з використанням методу скінченних елементів у задачах про усталені коливання п"єзоперетворювачів розглянуто в працях [5, 6].

Для повної дискретизації задачі процедуру Гальоркіна можна доповнити, наприклад, рекурентною схемою інтегрування в часі, що наведена у працях [8, 9].

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М., 1980. 2. Новацкий В. Связанные поля в механике твердых тел // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Междунар. конгресса IUTAM. М., 1979. С.395-416. 3. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М., 1986. 4. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М., 1988. 5. Токарь А.Ю., Шинкаренко Г.А. Исследование краевых задач электроупругости для акустических пьезопреобразователей. Львов, 1987. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 2581-Ук87. 6. Токарь А.Ю., Шинкаренко Г.А. Расчет динамических характеристик осесимметрических пьезопреобразователей // Динамические задачи механики сплошных сред: Тез. докл. регион. конф. Краснодар, 1988. Ч.1. С.147-150. 7. Улитко А.Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1975. С.90-99. 8. Шинкаренко Г.А. Исследование вариационных задач пьезоэлектричества // Механика неоднородных структур: Тез. докл. II Всесоюз. конф. Львов, 1987. Т.1. С.296-297. 9. Шинкаренко Г.А. Про одну модифікацію схеми Ньюмарка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. 46-52.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.89