УДК 536.2

І.М.Сипа

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У СКЛАДОВИХ ОБОЛОНКАХ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для отримання двовимірних рівнянь теплопровідності оболонок звичайно використовується гіпотеза про лінійний розподіл температури по товщині оболонки /1/. З точки зору алгоритмізації задачі теплопровідності зручніше використовувати тривимірні рівняння і знаходити їх розв"язок методом скінченних елементів з представленням шуканої функції по товщині у вигляді відрізка ряду по поліномах Міхліна. Особливо актуальним такий метод є при дослідженні задач теплопровідності, які характеризуються великим градієнтом температури по товщині оболонки.

У системі ортогональних криволінійних координат, яка характеризується коефіцієнтами Ламе H_1, H_2, H_3, розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності /1/. Температура $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\tau)$ у довільній точці області $\Omega = \{\alpha_1,\alpha_2 \in \omega, -\frac{h}{2} < \alpha_3 < \frac{h}{2}\}$ задовольняє рівняння

$$div(\lambda\, grad\, T) + w = c\frac{\partial T}{\partial \tau}, \qquad /1/$$

де $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau)$ – коефіцієнт теплопровідності, $w = w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – потужність джерел тепла, $C = C(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ – коефіцієнт теплоємності

$$div(\lambda\, grad\, T) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\Big(\lambda\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial T}{\partial\alpha_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\Big(\lambda\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial T}{\partial\alpha_2}\Big) + \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\Big(\lambda\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial T}{\partial\alpha_3}\Big)\Big]. \qquad /2/$$

Вирази для коефіцієнтів Ламе для широкого класу оболонок з різними серединними поверхнями наведено у праці [2].

Нехай граничні і початкові умови мають вигляд

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha^+(T - T_c^+) \qquad \text{при } \alpha_3 = h,$$
$$\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha^-(T - T_c^-) \qquad \text{при } \alpha_3 = -h; \qquad /3/$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha \left(T - T_c \right) \qquad \text{на } \Gamma,$$

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) = T_0 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad /4/$$

де n – зовнішня нормаль до границі;
T_c^+, T_c^-, T_c – значення температури навколишнього середовища; α^+, α^-, α – значення коефіцієнтів теплопровідності; $T_0 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – початкова температура оболонки.

Запишемо шукану функцію температури в області Ω у вигляді

$$T_m (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_i (\beta) \psi_i (\alpha_1, \alpha_2, \tau), \qquad /5/$$

де $\beta = \frac{\alpha_3}{h}$, h – товщина оболонки; $\varphi_i (\beta)$ – поліноми Міхліна, що утворюють систему базисних функцій. Функції $\varphi_i (\beta)$ можна виразити через нормовані поліноми Лежандра P_i :

$$\varphi_0 = P_0 ; \quad \varphi_i (\beta) = \int_1^{\beta} P_{i-1} (x) dx, \quad i = 1, 2. \qquad /6/$$

Для побудови функцій ψ серединну поверхню ω представимо у вигляді об"єднання чотирикутників, що взаємно не перетинаються, тобто $\omega = \bigcup_{e=1}^{M} \omega_e$. На кожному елементі ω_e запишемо

$$\psi_i^e (\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \Phi^e (\alpha_1, \alpha_2) q_{i}^e (\tau), \qquad /7/$$

де $\Phi^e (\alpha_1, \alpha_2)$ – матриця функцій форми скінченного елемента; $q_i^e (\tau)$ – невідомі вузлові значення температури в момент часу τ .

Для оптимального вибору базисного елемента було проведено числові експерименти з чотирикутними сумісними елементами сирендипового сімейства з чотирма, вісьмома і дванадцятьма вузлами. Використання кубічних апроксимацій на елементі не має суттєвих переваг над квадратичними, тому у програмному комплексі для складових оболонок використовуються чотирикутники з вісьмома вузлами.

Застосування методу Бубнова-Гальоркіна приводить до розв"язування системи звичайних диференціальних рівнянь, що має вигляд

$$\sum_{e=1}^{M} \left[M^e \dot{q}_e (\tau) + G^e q_e (\tau) \right] = \sum_{e=1}^{M} F^e (\tau), \qquad /8/$$

де

$$M_{ij}^{e} = \int\limits_{\Omega_e} c\,\Phi^{e^T} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi_i \varphi_j \, d\alpha_3 \, \Phi^e \, d\Omega \qquad /9/$$

– матриця мас;

$$G_{ij}^{e} = \int\limits_{\Omega_e} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda \, \mathrm{grad}^T (\varphi_i \Phi^e) \, \mathrm{grad} (\varphi_j \Phi^e) \, d\alpha_3 \, d\Omega \qquad /10/$$

– матриця теплопровідності;

$$F_j^{e} = \int\limits_{\Omega_e} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi^{e^T} \varphi_j \, w \, d\alpha_3 \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma + \Omega_e} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha \, T_c \, d\alpha_3 \, d\Gamma \qquad /11/$$

– вектор правої частини. Початкові умови, необхідні для розв"язку цієї системи, отримаємо з умови /4/, підставляючи вираз для T у вигляді /5/. Ця система диференціальних рівнянь розв"язується на основі двоточкових рекурентних схем.

Із результуючих систем алгебраїчних рівнянь отримуємо значення коефіцієнтів $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ у кожному вузлі дискретизації, тобто по координаті α_3 отримуємо аналітичний розв"язок у вигляді відрізка ряду. Цей факт зручно використовувати при розв"язуванні задач термопружності оболонок, оскільки аналогом зусиль і моментів у теорії теплопровідності є

$$T_1 = \frac{1}{2h} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T \, d\alpha_3 , \quad T_2 = \frac{3}{2h^2} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T \alpha_3 \, d\alpha_3 , \qquad /12/$$

отримання числових значень яких у даному випадку не викликає жодних труднощів.

Для складових оболонок умову контактного спряження двох тіл можна записати у вигляді

$$T^{(1)}\left(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}(\alpha_3)\right) = T^{(2)}\left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}(\alpha_3)\right), \qquad /13/$$

де $-\frac{h^{(1)}}{2} \leq \alpha_3^{(1)}(\alpha_3) \leq \frac{h^{(1)}}{2}, \ -\frac{h^{(2)}}{2} \leq \alpha_3^{(2)}(\alpha_3) \leq \frac{h^{(2)}}{2},$

а α_3 – параметр, що вираховується в напрямку $\alpha_3^{(1)}$ і $\alpha_3^{(2)}$, що є колінеарні між собою.

Апробація викладеної методики проведена на тестових задачах.

Розподіл температурного поля по товщині необмеженої стальної пластинки /порівняння аналітичного і числового розв"язків/

τ	h	$T_{ан}$	$T_{числ}$ $N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
	-0,5	292	285	299	291	293
	-0,3	293	290	291	295	293
0,25	-0,1	293	290	290	292	294
	0,1	294	300	294	291	294
	0,3	302	305	306	302	300
	0,5	327	311	325	333	336
	-0,5	321	307	321	321	321
	-0,3	324	324	324	324	325
3	-0,1	334	341	334	334	336
	0,1	351	359	352	351	351
	0,3	375	376	376	375	375
	0,5	406	394	407	406	406
	-0,5	440	430	441	441	441
	-0,3	443	446	445	444	444
10	-0,1	452	462	454	454	454
	0,1	468	477	469	469	469
	0,3	489	493	491	490	490
	0,5	517	508	518	518	518

Приклад 1. Досліджмо розподіл температури по товщині необмеженої стальної пластини при нестаціонарному конвективному теплообміні між її поверхнею $\alpha_3 = \frac{h}{2}$ і навколишнім середовищем, при ідеально теплоізольованій поверхні $\alpha_3 = -\frac{h}{2}$. Нехай початкова температура пластини $T_0 = 293$ К, температура зовнішнього середовища $T = 1273$ К, коефіцієнт температуропровідності $a_T = 0\ 66 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, товщина пластини $h = 0{,}08$ м, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 800$ Вт/м$^2 \cdot$град. і коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 32$ Вт/м$\cdot$град. В таблиці наведено результати, отримані для аналітичного розв"язку, і числові результати з використанням вищевикладеної методики. У першій колонці наведено значення температури, отримані на основі формул [3], а в наступних – значення

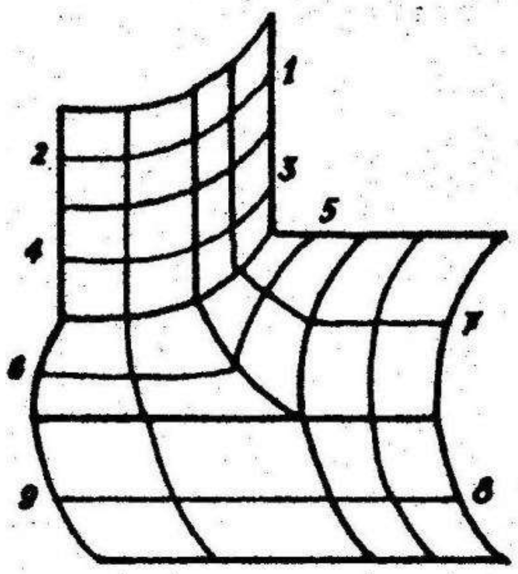

Рис. I.

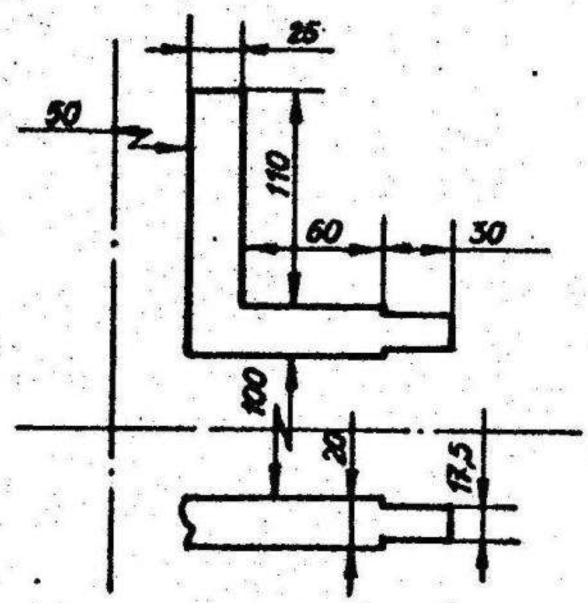

Рис. 2.

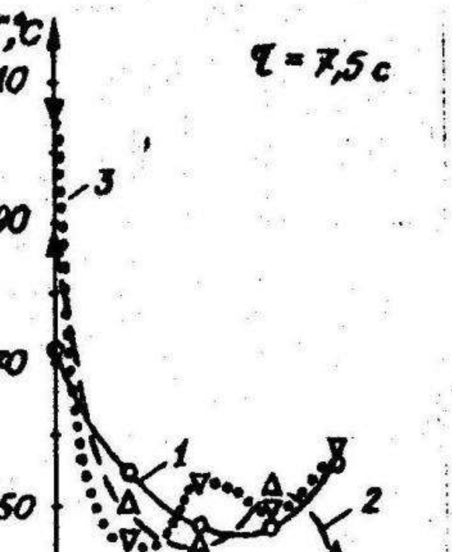

Рис. 3.

температури, отримані за числовою схемою зі збереженням 2,3,4 і 5-го членів ряду. Розрахунки наведено для моментів часу 0,25 с, 3 і I0 с.

Приклад 2. Трійникове з"єднання трубопроводів досліджується як складова оболонки. Оболонка знаходиться в умовах конвективного теплообміну по внутрішній і зовнішній поверхнях, на торцях задано умови теплоізоляції. Теплофізичні параметри такі: температура зовнішнього середовища T_2 = 50 °С, температура внутрішнього середовища T_1 = 350 °С, коефіцієнт теплопровідності λ = 0,1319 Вт/см·град, коефіцієнт теплоємності C = 3,54 Дж/см^3·град, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$ Вт/см^2. На рис. 1 зображена сітка скінченних елементів, на рис. 2 - переріз трійникового з"єднання і його геометричні розміри, на рис. 3 - розподіл температури по товщині оболонки для вказаного перерізу. Криві 1, 2 і 3 /рис. 3/ відповідають квадратичному, кубічному і четвертого порядку наближенням по товщині оболонки поліномами Міхліна. Наведена методика реалізована в комплексі Фортран-програм "ПРОЕКТ" [4].

1. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978. 2. Савула Я.Г. Представление срединных поверхностей оболочек резными поверхностями // Прикл. механика. 1984. Т.20. № 12. С.70-74. 3. Коваленко А.Д. Избранные труды. К., 1976. 4. Муха И.С., Савула Я.Г., Щербатый М.В. Комплекс программ "ПРОЕКТ" для расчетов и проектирования тонкостенных элементов конструкций энергетического машиностроения // Математическое моделирование процессов и конструкций энергетических и транспортных турбинных установок в системах их автоматизированного проектирования: Тез. докл. респ. конф. Готвальд, 1988. С.86.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.89

УДК 539.3

І.С.Муха

ЧИСЕЛЬНА СХЕМА РОЗВ"ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ ПОЧАТКОВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Нехай під дією масових сил $\overset{0}{Q}$ і поверхневих сил $\overset{0}{\Sigma}$ в тілі виникли переміщення $\overset{0}{u}$. Будемо вважати, що ці переміщення виникли до початку розвитку деформації, яка нас цікавить, і задовольняють рівняння рівноваги і відповідні крайові умови.

Нехай тепер на тіло діють додаткові масові сили Q і поверхневі сили Σ, які викликають у тілі додаткові переміщення u. Запишемо задачу для знаходження цих переміщень. Введемо позначення

$$\overset{1}{u} = \overset{0}{u} + u, \quad \overset{1}{Q} = \overset{0}{Q} + Q, \quad \overset{1}{\Sigma} = \overset{0}{\Sigma} + \Sigma . \qquad /1/$$