Приклад 2. Трійникове з"єднання трубопроводів досліджується як складова оболонки. Оболонка знаходиться в умовах конвективного теплообміну по внутрішній і зовнішній поверхнях, на торцях задано умови теплоізоляції. Теплофізичні параметри такі: температура зовнішнього середовища T_2 = 50 °C, температура внутрішнього середовища T_1 = 350 °C, коефіцієнт теплопровідності λ = 0,1319 Вт/см·град, коефіцієнт теплоємності C = 3,54 Дж/см^3·град, коефіцієнт тепловіддачі α = 1,04·10^{-3} Вт/см^2. На рис. 1 зображена сітка скінченних елементів, на рис. 2 - переріз трійникового з"єднання і його геометричні розміри, на рис. 3 - розподіл температури по товщині оболонки для вказаного перерізу. Криві 1, 2 і 3 /рис. 3/ відповідають квадратичному, кубічному і четвертого порядку наближенням по товщині оболонки поліномами Міхліна. Наведена методика реалізована в комплексі Фортран-програм "ПРОЕКТ" [4].

1. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978. 2. Савула Я.Г. Представление срединных поверхностей оболочек резными поверхностями // Прикл. механика. 1984. Т.20. № 12. С.70-74. 3. Коваленко А.Д. Избранные труды. К., 1976. 4. Муха И.С., Савула Я.Г., Щербатый М.В. Комплекс программ "ПРОЕКТ" для расчетов и проектирования тонкостенных элементов конструкций энергетического машиностроения // Математическое моделирование процессов и конструкций энергетических и транспортных турбинных установок в системах их автоматизированного проектирования: Тез. докл. респ. конф. Готвальд, 1988. С.86.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.89

УДК 539.3

І.С.Муха

ЧИСЕЛЬНА СХЕМА РОЗВ"ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ ПОЧАТКОВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Нехай під дією масових сил $\overset{0}{Q}$ і поверхневих сил $\overset{0}{\Sigma}$ в тілі виникли переміщення $\overset{0}{u}$. Будемо вважати, що ці переміщення виникли до початку розвитку деформації, яка нас цікавить, і задовольняють рівняння рівноваги і відповідні крайові умови.

Нехай тепер на тіло діють додаткові масові сили Q і поверхневі сили Σ, які викликають у тілі додаткові переміщення u. Запишемо задачу для знаходження цих переміщень. Введемо позначення

$$\overset{1}{u} = \overset{0}{u} + u, \quad \overset{1}{Q} = \overset{0}{Q} + Q, \quad \overset{1}{\Sigma} = \overset{0}{\Sigma} + \Sigma. \qquad /1/$$

Оскільки в результаті додаткової деформації ми знову отримали рівноважну конфігурацію, то переміщення $\overset{1}{u}$ задовольняють рівняння рівноваги тіла, що перебуває під дією масових сил $\overset{1}{Q}$, а також крайові умови для тіла з поверхневим навантаженням $\overset{1}{\Sigma}$. Це означає, що переміщення $\overset{1}{u}$ надають мінімум функціоналу Лагранжа [5]:

$$\overset{1}{L}(\overset{1}{u})=\frac{1}{2}\int\limits_V \varepsilon(\overset{1}{u}):B:\varepsilon(\overset{1}{u})dv-\int\limits_V \overset{1}{Q}\cdot\overset{1}{u}dv-\int\limits_{S_\Sigma}\overset{1}{\Sigma}\cdot\overset{1}{u}ds, \qquad /2/$$

де B - матриця фізичного закону четвертого рангу; $\varepsilon(u)$ - матриця деформації Гріна; знаком ":" позначено операцію згортки двох матриць.

Необхідно записати функціонал, мінімум якому буде надавати функція u. Для цього матрицю деформації Гріна зобразимо у вигляді [5]

$$\varepsilon(u)=e(u)+\frac{1}{2}\omega(u,u), \qquad /3/$$

де $e(u)$ - матриця лінійних деформацій /лінійний оператор відносно u /; $\omega(u,u)$ - деякий симетричний білінійний оператор.

Підставляючи вираз для $\overset{1}{u}$ з /1/ в /3/, отримуємо

$$\varepsilon(\overset{1}{u})=\varepsilon(\overset{0}{u}+u)=e(\overset{0}{u}+u)+\frac{1}{2}\omega(\overset{0}{u}+u,\overset{0}{u}+u)=$$
$$=e(\overset{0}{u})+e(u)+\frac{1}{2}\omega(\overset{0}{u},\overset{0}{u})+\omega(\overset{0}{u},u)+\frac{1}{2}\omega(u,u)=$$
$$=\varepsilon(\overset{0}{u})+\omega(\overset{0}{u},u)+\varepsilon(u).$$

Використавши отриману тотожність, перепишемо /2/ у вигляді

$$\overset{1}{L}(\overset{1}{u})=\frac{1}{2}\int\limits_V[\varepsilon(\overset{0}{u})+\omega(\overset{0}{u},u)+\varepsilon(u)]:B:[\varepsilon(\overset{0}{u})+\omega(\overset{0}{u},u)+\varepsilon(u)]dv-$$
$$-\int\limits_V(\overset{0}{Q}+Q)\cdot(\overset{0}{u}+u)dv-\int\limits_{S_\Sigma}(\overset{0}{\Sigma}+\Sigma)\cdot(\overset{0}{u}+u)dS=$$
$$=\overset{0}{L}(\overset{0}{u})+\underline{\int\limits_V\varepsilon(\overset{0}{u}):B:[e(u)+\omega(\overset{0}{u},u)]dv-\int\limits_V\overset{0}{Q}udv-\int\limits_{S_\Sigma}\overset{0}{\Sigma}udS}+$$
$$+\Big\{\frac{1}{2}\int\limits_V\varepsilon(\overset{0}{u}):B:\omega(u,u)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_V[\varepsilon(u)+\omega(\overset{0}{u},u)]:B:[\varepsilon(u)+\omega(\overset{0}{u},u)]dv-$$
$$-\int\limits_V Q\cdot(\overset{0}{u}+u)dv-\int\limits_{S_\Sigma}\Sigma\,(\overset{0}{u}+u)dS\Big\}. \qquad /4/$$

Підкреслений вираз рівний нулю згідно з принципом віртуальних робіт [1] для початкових переміщень.

Оскільки переміщення $\overset{\circ}{u}$ надає мінімального значення функціоналу $\overset{\circ}{L}$, то для того, щоб функціонал $L'(\overset{\circ}{u})$ досягав мінімуму, необхідно, щоб досягав мінімуму вираз у фігурних дужках. Врахувавши той факт, що $\int_V Q\cdot\overset{\circ}{u}dV$ і $\int_{S_\Sigma}\Sigma\cdot\overset{\circ}{u}dS$ є константи, отримаємо, що переміщення u повинно надавати мінімум функціоналу

$$L(u)=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon(\overset{\circ}{u}):B:\omega(u,u)dV+$$

$$+\frac{1}{2}\int_V[\varepsilon(u)+\omega(\overset{\circ}{u},u)]:B:[\varepsilon(u)+\omega(\overset{\circ}{u},u)]dV-$$

$$-\int_V Q\cdot u dV-\int_{S_\Sigma}\Sigma\cdot u dS. \qquad /5/$$

Взявши в /5/ початкову конфігурацію за відлікову /тобто $\overset{\circ}{u}=0$/, отримаємо функціонал для задачі з початковими напруженнями $\overset{\circ}{\sigma}$ [1]

$$L(u)=\frac{1}{2}\int_V\overset{\circ}{\sigma}:\omega(u,u)dV+$$

$$+\frac{1}{2}\int_V\varepsilon(u):B:\varepsilon(u)dV-\int_V Q\cdot u dV-\int_{S_\Sigma}\Sigma\cdot u dS. \qquad /6/$$

Нехай тепер у тілі є початкові деформації $\overset{\circ}{\varepsilon}$. Щоб їх утримати в тілі, необхідно, щоб у ньому були присутні початкові напруження $\overset{\circ}{\sigma}=-B:\overset{\circ}{\varepsilon}$. Знову взявши початкову конфігурацію за відлікову /тобто $\overset{\circ}{u}=0$/, отримаємо функціонал для задачі з початковими деформаціями $\overset{\circ}{\varepsilon}$ [1]:

$$L(u)=\frac{1}{2}\int_V[\varepsilon(u)-\overset{\circ}{\varepsilon}]:B:[\varepsilon(u)-\overset{\circ}{\varepsilon}]dV-$$

$$-\int_V Q\cdot u dV-\int_{S_\Sigma}\Sigma\cdot u dS. \qquad /7/$$

Слід врахувати, що у випадку задачі з початковими деформаціями підкреслений в /4/ вираз вже не є рівний нулю. Крім цього, для такої задачі $\overset{\circ}{Q}=0$ і $\overset{\circ}{\Sigma}=0$. Зазначимо також, що в цьому випадку матриця B є функцією $\overset{\circ}{\varepsilon}$.

Розглянемо далі функціонал /5/. Оскільки це функціонал четвертого порядку стосовно невідомої функції u, то застосувати для його мінімізації метод Рітца неможливо. Тому побудуємо числову схему методу Ньютона [2-4] для функціоналу /5/. Нехай у нас є деяке наближення $\tilde{u}$ для переміщення u. Надамо $\tilde{u}$

приросту Δu . Тоді

$$L(\tilde{u}+\Delta u)=L(\tilde{u})+\int_V \varepsilon(\mathring{u}):B:\omega(\tilde{u},\Delta u)dV+\frac{1}{2}\int_V \varepsilon(\mathring{u}):B:\omega(\Delta u,\Delta u)dV+$$
$$+\int_V [\varepsilon(\tilde{u})+\omega(\mathring{u},\tilde{u})]:B:[\varepsilon(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]dV+$$
$$+\frac{1}{2}\int_V [\varepsilon(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]:B:[\varepsilon(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]dV-$$
$$-\int_V Q\cdot\Delta u dV-\int_{S_\Sigma}\Sigma\cdot\Delta u dS=$$
$$=L(\tilde{u})+\int_V \varepsilon(\mathring{u}+\tilde{u}):B:[e(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]dV+$$
$$+\frac{1}{2}\int_V \varepsilon(\mathring{u}+\tilde{u}):B:\omega(\Delta u,\Delta u)dV+$$
$$+\frac{1}{2}\int_V [\varepsilon(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]:B:[\varepsilon(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]dV-$$
$$-\int_V (\mathring{Q}+Q)\cdot\Delta u dV-\int_{S_\Sigma}(\mathring{\Sigma}+\Sigma)\cdot\Delta u dS. \qquad /8/$$

З /8/ випливає, що для досягнення мінімуму функціоналу /5/ необхідно, щоб Δu надавала мінімум функціоналу

$$\hat{L}(\Delta u)=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon(\mathring{u}+\tilde{u}):B:\omega(\Delta u,\Delta u)dV+$$
$$+\frac{1}{2}\int_V [\varepsilon(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]:B:[\varepsilon(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)dV+$$
$$+\int_V \varepsilon(\mathring{u}+\tilde{u}):B:[e(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]dV-$$
$$-\int_V (\mathring{Q}+Q)\cdot\Delta u dV-\int_{S_\Sigma}(\mathring{\Sigma}+\Sigma)\cdot\Delta u dS.$$

Припустимо тепер, що Δu є величина мала, тобто членами порядку $(\Delta u)^3$ і $(\Delta u)^4$ можна знехтувати. Тоді для знаходження Δu отримаємо квадратичний функціонал

$$L^{*}(\Delta u)=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon(\mathring{u}+\tilde{u}):B:\omega(\Delta u,\Delta u)dV+$$
$$+\frac{1}{2}\int_V [e(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]:B:[e(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]dV+$$
$$+\int_V \varepsilon(\mathring{u}+\tilde{u}):B:[e(\Delta u)+\omega(\mathring{u}+\tilde{u},\Delta u)]dV-$$
$$-\int_V (\mathring{Q}+Q)\cdot\Delta u dV-\int_{S_\Sigma}(\mathring{\Sigma}+\Sigma)\cdot\Delta u dS.$$

Виберемо початкове наближення $\tilde{u}^0 \equiv 0$. Побудуємо ітераційний процес

$$\tilde{u}^{i+1}=\tilde{u}^{i}+\Delta u^{i}$$

до тих пір, поки $\|\Delta u^i\| > \varepsilon\|\tilde{u}^i\|$. При цьому $u=\lim\limits_{i\to\infty}\tilde{u}^i$.

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., 1987. 2. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М., 1978. 3. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., 1976. 4. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов и пластин. Рига, 1988. 5. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л., 1986.

Стаття надійшла до редколегії 18.05.89

УДК 539.3

В.О.Ліхачов, Н.П.Флейшман

ТИСК ЖОРСТКОГО ШТАМПУ НА ПРУЖНИЙ ШАР

Розглядається пружний шар товщиною h_1 $(0 \leq \zeta \leq h_1)$, який лежить на гладкій жорсткій основі. В крайову площину шару $/ \zeta = 0$ / втискується гладкий жорсткий штамп під дією осьової нормальної до площини сили P.

1. Осесиметрична контактна задача

Граничні умови задачі в циліндричних координатах $/ \rho$, ζ / мають вигляд

$$u_\zeta(\rho,\theta) = f_0(\rho) \quad \text{при} \quad \rho < a; \qquad /1.1/$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}(\rho,0) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > a; \qquad /1.2/$$

$$\sigma_{\zeta\rho}(\rho,0) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0; \qquad /1.3/$$

$$u_\zeta(\rho,h_1) = \tau_{\rho\zeta}(\rho,h_1) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0_0. \qquad /1.4/$$

Залежність радіуса " a " області контакту від сили P знаходимо з умови рівноваги

$$P = -2\pi \int_0^a \rho\,\sigma_{\zeta\zeta}(\rho,0)\,d\rho. \qquad /1.5/$$

Як показано в [1, 2], компоненти вектора зміщення і тензора напружень можуть бути виражені через дві гармонійні функції $\psi(r,z)$, $\psi_1(r,z)$, які вибираємо такими:

$$\psi_1 = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\frac{ch\lambda(h-z)}{ch\lambda h} + A_1(\lambda)\frac{sh\lambda(h-z)}{ch\lambda h} \right] \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda}\,d\lambda, \qquad /1.6/$$