1. В а с и д з у К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., 1987. 2. М о и с е е в Н.Н., И в а н и л о в Ю.П., С т о л я р о в а Е.М. Методы оптимизации. М., 1978. 3. О д е н Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., 1976. 4. Р и к а р д с Р.Б. Метод конечных элементов и пластин. Рига, 1988. 5. Ч е р н ы х К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л., 1986.

Стаття надійшла до редколегії 18.05.89

УДК 539.3

В.О.Ліхачов, Н.П.Флейшман

ТИСК ЖОРСТКОГО ШТАМПУ НА ПРУЖНИЙ ШАР

Розглядається пружний шар товщиною h_1 $(0 \leq \zeta \leq h_1)$, який лежить на гладкій жорсткій основі. В крайову площину шару / $\zeta = 0$ / втискується гладкий жорсткий штамп під дією осьової нормальної до площини сили P.

1. Осесиметрична контактна задача

Граничні умови задачі в циліндричних координатах / ρ, ζ / мають вигляд

$$u_\zeta(\rho,\theta) = f_0(\rho) \quad \text{при} \quad \rho < a; \qquad /1.1/$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}(\rho,0) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > a; \qquad /1.2/$$

$$\sigma_{\zeta\rho}(\rho,0) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0; \qquad /1.3/$$

$$u_\zeta(\rho,h_1) = \tau_{\rho\zeta}(\rho,h_1) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0_0. \qquad /1.4/$$

Залежність радіуса " a " області контакту від сили P знаходимо з умови рівноваги

$$P = -2\pi \int_0^a \rho\sigma_{\zeta\zeta}(\rho,0)\,d\rho. \qquad /1.5/$$

Як показано в [1, 2], компоненти вектора зміщення і тензора напружень можуть бути виражені через дві гармонійні функції $\psi(r,z)$, $\psi_1(r,z)$, які вибираємо такими:

$$\psi_1 = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\frac{ch\lambda(h-z)}{ch\lambda h} + A_1(\lambda)\frac{sh\lambda(h-z)}{ch\lambda h}\right]\frac{J_0(\lambda r)}{\lambda}\,d\lambda; \qquad /1.6/$$

$$\psi = \int_0^\infty B(\lambda) \frac{ch\lambda(h-z)}{sh\lambda h} \cdot \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda} d\lambda. \qquad /1.7/$$

Тут $r = \frac{\rho}{a}$, $z = \frac{\zeta}{a}$, $h = \frac{h_1}{a}$ – безрозмірні величини. Граничні умови /1.3/, /1.4/ приводять до таких залежностей між шуканими функціями $A(\lambda)$, $A_1(\lambda)$, $B(\lambda)$:

$$A_1(\lambda) = \lambda h \, cth \, \lambda h \; B(\lambda); \qquad /1.8/$$

$$A(\lambda) = -cth\,\lambda h(1+\lambda h\, cth \lambda h) B(\lambda); \qquad /1.9/$$

З умов /1.1/, /1.2/ отримаємо парні інтегральні рівняння для визначення $B(\lambda)$:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \lambda B J_0(\lambda r) d\lambda - \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \lambda B F(\lambda h) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r>1; \qquad /1.10/$$

$$\int_0^\infty B J_0(\lambda r) d\lambda = -\frac{a\mu}{1-\nu} f_0(ar) \qquad r<1, \qquad /1.11/$$

де

$$F(\lambda h) = cosech\,\lambda h\,[ch\lambda h - sh\lambda h + \lambda h\; cosech \lambda h]. \qquad /1.12/$$

Парні рівняння /1.10/, /1.11/ відрізняються від аналогічних рівнянь при розв"язуванні такої ж задачі для півпростору присутністю у /1.10/ другого доданку, який швидко спадає зі збільшенням величини h і при $\lambda h \geq 6$ ним можна нехтувати.

Припустимо, що існує така функція $\beta(t,h)$, для якої другий доданок у /1.10/ перетворюється в нуль, якщо прийняти

$$B(\lambda) F(\lambda h) = \int_0^1 \beta(t,h) \sin\lambda t\, dt. \qquad /1.13/$$

Для цього випадку розв"язок рівнянь /1.10/, /1.11/ наведено, наприклад, у працях [3, 4]. Згідно з цими працями приймемо

$$B(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \sin\lambda t\, \varphi(t)\, dt. \qquad /1.14/$$

Тут функцію $\varphi(t)$ знаходимо з інтегрального рівняння

$$\int_0^r \varphi(t) \arcsin\frac{t}{r} dt + \frac{\pi}{2}\int_r^1 \varphi(t) dt = -\frac{a\mu}{1-\nu} f_0(ar). \qquad /1.15/$$

Тоді умова /1.13/ приводить до рівняння щодо функції $\beta(t,h)$.

$$\int_0^1 \beta(t,h)\sin\lambda t\,dt = F(\lambda h)\int_0^1 \varphi(t)\sin\lambda t\,dt, \qquad /1.16/$$

де $\varphi(t)$ є розв"язок /1.15/.

Оскільки $\beta(t,h)$ не визначена на $]1,\infty[$, то приймемо, що $\beta(t,h)\equiv 0$ при $t>1$ і застосуємо до /1.16/ формулу для сінус-перетворення Фур"є.

$$\beta(t,h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda h)\Big[\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\Big]\sin\lambda t\,d\lambda. \qquad /1.17/$$

Розв"язок /1.17/ будемо шукати у вигляді ряду

$$\beta(t,h) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \beta_{2k+1}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad 0\leq t\leq 1. \qquad /1.18/$$

Тоді із /1.17/ та /1.18/ отримаємо вирази для коефіцієнтів ряду /1.18/

$$\beta_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{6/h}\lambda^{2k+1}F(\lambda h)\Big[\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\Big]d\lambda. \qquad /1.19/$$

Після визначення функції $\varphi(t)$ з /1.15/ та $\beta(t,h)$ з /1.18/ і /1.19/ можна знайти контактні напруження σ_{zz} за формулою /1.10/ при $r<1$ і знайти радіус області контакту з умови /1.5/.

<u>Приклад 1.</u> Нехай функція $f_0(ar)$ має вигляд

$$f_0(ar) = \delta_n - \varepsilon_n a^n r^n \quad (n\in N). \qquad /1.20/$$

Тут δ_n – осьове переміщення штампу, другий доданок визначає форму його підошви.

Із /1.15/ отримуємо

$$\varphi(t) = \alpha_{n-1}t^{n-1},\quad \delta_n = \frac{\pi\varepsilon_n a^n}{2z_n},\quad z_0 = \frac{\pi}{2},\quad z_1 = 1,$$

$$z_n = \frac{n-1}{n}z_{n-2}\ (n\geq 2),\quad \alpha_{n-1} = \frac{\mu n\varepsilon_n}{(1-\nu)z_n}a^{n+1}, \qquad /1.21/$$

а з /1.10/ при $r<1$ знаходимо контактні напруження

$$\sigma_{zz} = \sigma^*_{zz} + \frac{1}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\beta^{(n)}_{2k+1}}{(2k+3)!}r^{2k+1}K_{2k+1}(r), \qquad /1.22/$$

де $\sigma^*_{zz} = \frac{\alpha_{n-1}}{a^2} r^{n-1} K_{n-1}(r)$ — відповідні контактні напруження для півпростору. $K_0(r) = \ln(1+\sqrt{1-r^2}) - \ln r$,
$K_1 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$, $K_n(r) = \frac{1}{n^2}[1+n(n-1)K_{n-2}(r)]$ $(n>2)$.

На границі області контакту $r = 1$ $(\rho = a)$ $\sigma_{zz}(1,0) = 0$, тобто виконується умова неперервності нормальних напружень при переході через границю розподілу крайових умов.

Згідно з /1.5/ знаходимо значення радіуса області контакту

$$a^{n+1} = \frac{P(1-\nu)\, z_n}{2\mu n\, \delta_n \left[B_n + \frac{2}{\alpha_{n-1}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, \beta^{(n)}_{2k+1}\right]}, \qquad /1.23/$$

де

$$B_n = \int_0^1 r^n K_{n-1}(r)\, dr.$$

2. Неосесиметрична контактна задача

На крайових площинах задаються такі умови:

$$u_\zeta(\rho,0,\theta) = f_0(\rho) + f_1(\rho)\cos\theta \quad \text{при } \rho < a; \qquad /2.1/$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}(\rho,0,\theta) = 0 \quad \text{при } \rho > a; \qquad /2.2/$$

$$\tau_{\zeta\rho}(\rho,0,\theta) = \tau_{\zeta\theta}(\rho,0,\theta) = 0 \quad \text{при } \rho > 0; \qquad /2.3/$$

$$u_\zeta(\rho,h_1,\theta) = \tau_{\zeta\rho}(\rho,h_1,\theta) = \tau_{\zeta\theta}(\rho,h_1,\theta) = 0 \quad \text{при } \rho > 0. \qquad /2.4/$$

Лінійність крайової задачі дає змогу представити напружений стан у шарі як суму двох напружених станів, що визначаються двома типами крайових умов із /2.1/–/2.4/. Перший тип отримуємо при $f_1(\rho) \equiv 0$. Контактна задача з відповідними умовами розглянута вище. Другий тип умов отримуємо при $f_0 \equiv 0$.

Схематично змішана з другим типом умов задача розв"язується так. Гармонійні функції приймаємо у вигляді /1.6/, /1.7/, якщо в них замінити $J_0(\lambda r)$ на $J_1(\lambda r)$ і помножити на $\cos\theta$ [5].

З крайових умов одержуємо співвідношення /1.8/, /1.9/ та парні інтегральні рівняння типу /1.10/, /1.11/, якщо в останніх замінити $J_0(\lambda r)$ на $J_1(\lambda r)$. Розв"язок останніх інтегральних рівнянь дано в праці [4]. Цим і завершується розв"язок мішаної задачі з умовами /2.1/–/2.4/ при $f_0(\rho)\equiv 0$.

Контактні напруження задачі з умовами /2.1/–/2.4/ зобразимо у вигляді суми напружень, що відповідають осесиметричній та неосесиметричній частинам зміщення u_z, яке дається умовами /2.1/.

Для визначення області контакту припускаємо, що вона обмежена кривою, рівняння якої є

$$\rho_1 = a + b\cos\theta, \qquad /2.5/$$

де a визначається з /1.23/, а b – з умови рівноваги

$$P = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a+b\cos\theta} \sigma_{zz}(\rho,0,\theta)\rho\, d\rho. \qquad /2.6/$$

Нерівності $u_z(r,z,\theta)\geq 0,\ \sigma_{zz}(r,0,\theta)\leq 0$ накладають обмеження на форму підошви штампу, для якої має місце побудований розв"язок.

<u>Приклад 2.</u> Нехай гранична умова /2.1/

$$u_z = \delta_2 - \varepsilon_2 a^2 r^2 + (b_0 a r + b_2 a^3 r^3)\cos\theta.$$

Тоді $$\sigma_{zz} = -\frac{8a\mu\varepsilon_2}{\pi(1-\nu)}\left[\sqrt{1-r^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+1}^{(2)} r^{2k+1} K_{2k+1}^{(2)}\right] +$$
$$+ \frac{32a^2\mu b_2}{3\pi(1-\nu)}\left[r\sqrt{1-r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{\beta}_{2k+1} r^{2k} K_{2k-1}(r)\right]\cos\theta,$$

де $\tilde{\beta}_{2k+1}^{(2)}$, як і $\beta_{2k+1}^{(2)}$, визначаються з /1.19/, але в цьому випадку

$$\varphi(t) = \frac{32 b\mu a^4}{3\pi(1-\nu)}(t-t^3).$$

З /2.6/ знаходимо значення b, а з /2.5/ – рівняння кривої

$$\rho_1 = a + \frac{\pi b_2 a^2 c^2}{2\varepsilon_2 c_1}\cos\theta,$$

де

$$c_1 = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}\tilde{\beta}_{2k+1}^{(2)};\quad c_2 = 1+3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta_{2k+1}^{(2)}}{2k+3},\quad b_2 < \frac{2\varepsilon_2 c_1}{\pi a c_2}.$$

<u>Висновки</u>. На підставі розв"язків контактних задач можна стверджувати:

1. З ростом h контактні напруження для шару зменшуються. При h = 1 вони на 40 % більші, ніж для півпростору.

2. Площа області контакту /радіус для осесиметричної задачі/ для шару менша, ніж площа області контакту для півпростору.

3. У ряді /1.18/ можна обмежитися п"ятьма членами при $h>1$ і будь-яких значеннях n у виразі /1.20/.

4. При $h>10$ контактні задачі для шару можна розраховувати за формулами відповідних контактних задач для півпростору.

1. Л и х а ч е в В.А., Ф л е й ш м а н Н.П. Об одной из форм решений уравнений теории упругости // Динамика и прочность машин. 1973. Вып. 17. С.37-42. 2. Л и х а ч е в В.А., Ф л е й ш м а н Н.П. Общее представление решений уравнений теории упругости в цилиндрических координатах // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1975. Вып.26. С.121-123. 3. Л и х а ч е в В.А., Ф л е й ш м а н Н.П. Решение одного класса парных интегральных уравнений. К., 1984. Рукопись деп в УкрНИИНТИ, № 1361. 4. Л и х а ч е в В.А., Ф л е й ш м а н Н.П. Давление неосесимметричного штампа на упругое полупространство // Динамика и прочность машин. 1988. Вып. 48. С.45-49. 5. У ф л я н д Я.С. Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.89

УДК 539.3

О.С.Коссак

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ УМОВ СПРЯЖЕННЯ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКІНЧЕННОЮ ЗСУВНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Питанням побудови граничних умов пружного спряження податливих на зсув оболонок присвячено ряд праць [1, 4, 6]. Для встановлення адекватності граничних умов спряження оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю проведено обчислювальний експеримент [1], в ході якого для осесиметричного випадку порівнювалися чисельні результати, одержані на основі математичної моделі теорії пружності і теорії оболонок.

Розглянемо питання адекватності граничних умов у випадку циліндричної оболонки, спряженої з пластиною радіуса r /див. рисунок/. Порівняємо результати, одержані напіваналітичним методом скінченних елементів /НМСЕ/ [2, 3], з аналітичним розв"язком.