1. З ростом h контактні напруження для шару зменшуються. При h = 1 вони на 40 % більші, ніж для півпростору.

2. Площа області контакту /радіус для осесиметричної задачі/ для шару менша, ніж площа області контакту для півпростору.

3. У ряді /1.18/ можна обмежитися п"ятьма членами при $h>1$ і будь-яких значеннях n у виразі /1.20/.

4. При $h>10$ контактні задачі для шару можна розраховувати за формулами відповідних контактних задач для півпростору.

1. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Об одной из форм решений уравнений теории упругости // Динамика и прочность машин. 1973. Вып. 17. С.37-42. 2. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Общее представление решений уравнений теории упругости в цилиндрических координатах // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1975. Вып.26. С.121-123. 3. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Решение одного класса парных интегральных уравнений. К., 1984. Рукопись деп в УкрНИИНТИ, № 1361. 4. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Давление неосесимметричного штампа на упругое полупространство // Динамика и прочность машин. 1988. Вып. 48. С.45-49. 5. Уфлянд Я.С. Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.89

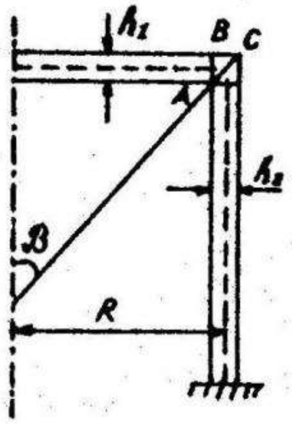
УДК 539.3

О.С.Коссак

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ УМОВ СПРЯЖЕННЯ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКІНЧЕННОЮ ЗСУВНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Питанням побудови граничних умов пружного спряження податливих на зсув оболонок присвячено ряд праць [1, 4, 6]. Для встановлення адекватності граничних умов спряження оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю проведено обчислювальний експеримент [1], в ході якого для осесиметричного випадку порівнювалися чисельні результати, одержані на основі математичної моделі теорії пружності і теорії оболонок.

Розглянемо питання адекватності граничних умов у випадку циліндричної оболонки, спряженої з пластиною радіуса r /див. рисунок/. Порівняємо результати, одержані напіваналітичним методом скінченних елементів /НМСЕ/ [2, 3], з аналітичним розв"язком.



Системи рівнянь з теорії оболонок типу Тимошенка для пластини /з індексом /1/ / та для циліндра /з індексом /2/ / мають вигляд [5]

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r^2 S^{(1)} + r p_2^{(1)} = 0, \\ \frac{d}{dr}(r H^{(1)}) + H^{(1)} - r Q_2 + r m_2^{(1)} = 0; \end{cases} \qquad /1/$$

$$\begin{cases} \frac{dS^{(2)}}{d\alpha_1} + \frac{1}{R} Q_2^{(2)} + p_2^{(2)} = 0, \\ \frac{dH^{(2)}}{d\alpha_1} - Q_2^{(2)} + m_2^{(2)} = 0, \end{cases} \qquad /2/$$

де

$$S^{(1)} = \frac{Eh_1}{2(1+\nu)} r \frac{d}{dr}\left(\frac{u_2^{(1)}}{r}\right);\ p_2^{(1)} = 0;\ H^{(1)} = \frac{Eh_1^3}{24(1+\nu)} r \frac{d}{dr}\left(\frac{\gamma_2^{(1)}}{r}\right);$$

$$Q_2^{(1)} = k' G' h_1 \gamma_2^{(1)};\quad m_2^{(1)} = 0;$$

$$S^{(2)} = \frac{Eh_2}{2(1+\nu)} \frac{du_2}{d\alpha_1};\ Q_2^{(2)} = k' G' h_2 \left(\gamma_2^{(2)} - \frac{u_2^{(2)}}{R}\right),$$

$$H^{(2)} = \frac{Eh_2^3}{24(1+\nu)} \left(\frac{d\gamma_2^{(2)}}{d\alpha_1} + \frac{1}{R}\frac{du_2^{(2)}}{d\alpha_1}\right);\ p_2^{(2)} = 1;\ m_2^{(2)} = 0;$$

E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; k' – коефіцієнт зсуву; G' – модуль зсуву. Для ізотропних оболонок $G' = E/2(1+\nu)$; $k' = 5/6$ [2, 5].

Загальний розв"язок системи рівнянь /1/ та /2/ запишемо у вигляді

$$\begin{cases} U_2^{(1)} = C_1^{(1)} r, \\ \gamma_2^{(1)} = C_2^{(1)} I_1(\eta r). \end{cases}$$

/3/

Тут $I_1(\eta r)$ - модифіковані функції Бесселя $\eta = \frac{24K'G'(1+\nu)}{Eh_2^2}$,

$$\begin{cases} U_2^{(2)} = C_1^{(2)} + C_2^{(2)}\alpha_1 + C_3^{(2)} e^{g\alpha_1} + C_4^{(2)} e^{-g\alpha_1} + M_1\alpha_1^2, \\ \gamma_2^{(2)} = C_1^{(2)}\frac{1}{R} + C_2^{(2)}\frac{\alpha_1}{R} + C_3^{(2)} B e^{g\alpha_1} + C_4^{(2)} B e^{-g\alpha_1} + M_2, \end{cases} \qquad /4/$$

де

$$M_1 = \frac{-6R^2P_2^{(2)}(1+\nu)}{h_2E(h_2^2+6R^2)}; \quad B = -\frac{REg^2}{K'G'h^2} - \frac{M_1ER}{K'G'(1+\nu)}.$$

Невідомі коефіцієнти $C_i^{(K)}(i=\overline{1,4};\ \ K=1,2\ )$ в формулах /3/, /4/ визначаються з системи граничних умов при $\alpha_1 = \ell$, де ℓ - довжина серединної поверхні циліндра [5]

$$U_2^{(2)}\Big|_{\alpha_1=\ell} = 0; \qquad /5/$$

$$\gamma_2^{(2)}\Big|_{\alpha_1=\ell} = 0 \qquad /6/$$

та умов спряження при $r = R, \alpha_1 = 0$

$$U^{(1)}_{2\,r=R} = U^{(2)}_{2\,\alpha_1=0}; \qquad /7/$$

$$\gamma_2^{(1)}\cos\beta_{r=R} = \left(\gamma_2^{(2)}\sin\beta + \gamma_n^{(1)}\cos\beta\right)_{\alpha_1=0}, \qquad /8/$$

$$S^{(1)}_{r=R} = S^{(2)}_{\alpha_1=0}; \qquad /9/$$

$$H^{(1)}\cos\beta_{r=R} = H^{(2)}\sin\beta_{\alpha_1=0}. \qquad /10/$$

Тут кут β визначається з трикутника АВС

$$tg\,\beta = \frac{h_2}{h_1}.$$

Т а б л и ц я 1

Порівняння розв"язків, отриманих НМСЕ, з аналітичним розв"язком при $h_1 = 1$, $h_2 = 0,5$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв"язок задачі /1-4/, /5, 6/ з умовами спряження: 1 варіант		2 варіант		3 варіант	
На пластині	$U^{(1)}_{2H}\cdot 10^9$	$U^{(1)}_{21}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(1)}_{22}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(1)}_{23}\cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	0,9655	0,9635	0,2	0,9675	0,2	0,9715	0,6
5,0	1,931	1,927	0,2	1,935	0,2	1,943	0,6
7.5.	2,896	2,891	0,2	2,903	0,2	2,915	0,6
10,0	3,861	3,854	0,1	3,870	0,2	3,886	0,6
На циліндрі	$U^{(2)}_{2H}\cdot 10^9$	$U^{(2)}_{21}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(2)}_{22}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(2)}_{23}\cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	3,627	3,622	0,1	3,634	0,2	3,646	0,5
5,0	2,905	2,902	0,1	2,910	0,2	2,919	0,5
7,5	1,696	1,695	0,06	1,695	0,06	1,703	0,4
9,375	0,4698	0,4695	0,06	0,4667	0,06	0,4715	0,4

Т а б л и ц я 2

Порівняння розв"язків, отриманих НМСЕ, з аналітичним розв"язком при $h_1 = 1$, $h_2 = 0,25$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв"язок задачі /1-4/, /5, 6/ з умовами спряження: 1 варіант		2 варіант		3 варіант	
На пластині	$U^{(1)}_{2H}\cdot 10^9$	$U^{(1)}_{21}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(1)}_{22}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(1)}_{23}\cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	1,940	1,940	0,0	1,947	0,4	1,949	0,5
5,0	3,879	3,879	0,0	3,894	0,4	3,899	0,5
7,5	5,819	0,819	0,0	5,841	0,4	5,848	0,5
10,0	7,759	7,758	0,01	7,788	0,4	7,797	0,5
На циліндрі	$U^{(2)}_{2H}\cdot 10^9$	$U^{(2)}_{21}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(2)}_{22}\cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U^{(2)}_{23}\cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	7,282	7,282	0,0	7,304	0,3	7,312	0,4
5,0	5,831	5,831	0,0	5,846	0,3	5,850	0,3
7,5	3,403	3,403	0,0	3,411	0,2	3,413	0,3
9,375	0,9423	0,9423	0,0	0,9442	0,2	0,9448	0,3

Таблиця 3

Порівняння розв"язків, отриманих НМСЕ, з аналітичним розв"язком при $h_1 = h_2 = 0,5$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв"язок задачі /1-4/, /5,6/ з умовами:			
		1 варіант		3 варіант	
На пластині	$U_{2H}^{(1)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	0,9692	0,9633	0,6	0,9694	0,02
5,0	1,938	1,927	0,6	1,939	0,02
7,5	2,908	2,890	0,6	2,908	0,0
10,0	3,877	3,853	0,6	3,878	0,02
На циліндрі	$U_{2H}^{(2)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	3,638	3,621	0,5	3,640	0,05
5,0	2,913	2,902	0,4	2,914	0,03
7,5	1,700	1,695	0,3	1,701	0,05
9,375	0,4708	0,4694	0,3	0,4710	0,04

Таблиця 4

Порівняння розв"язків, отриманих НМСЕ з аналітичним розв"язком при $h_1 = h_2 = 0,25$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв"язок задачі /1-4/, /5,6/ з умовами:			
		1 варіант		3 варіант	
На пластині	$U_{2H}^{(1)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	1,945	1,939	0,3	1,945	0,0
5,0	3,891	3,878	0,3	3,891	0,0
7,5	5,836	5,818	0,3	5,836	0,0
10,0	7,782	7,757	0,3	7,782	0,0
На циліндрі	$U_{2H}^{(2)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	7,300	7,281	0,3	7,300	0,0
5,0	5,843	5,830	0,2	5,843	0,0
7,5	3,409	3,403	0,2	3,409	0,0
9,375	0,9438	0,9422	0,2	0,9438	0,0

Нехай формули /7/-/10/ є перший варіант умов спряження. Нижче розглянемо інші випадки умов спряження.

Відкинемо кут β в формулах /8/, /10/, тоді

$$\gamma_{2_{r=R}}^{(1)} = \left(\gamma_2^{(2)} + \gamma_n^{(1)}\right)_{\alpha_1=0} ; \qquad /11/$$

$$H_{r=R}^{(1)} = H_{\alpha_1=0}^{(2)} . \qquad /12/$$

Умови /7/, /10-12/ є другий варіант.

Опустимо доданок γ_n у формулі /11/ [1], одержимо

$$\gamma_{2_{r=R}}^{(1)} = \gamma_{2_{\alpha_1=0}}^{(2)} . \qquad /13/$$

Тоді формули /7/, /9/, /12/, /13/ є третім варіантом умов спряження.

Були одержані також результати НМСЕ з урахуванням граничних умов /5/, /6/ та умов спряження /7/, /13/ [2, 3].

У табл. 1-4 наведено порівняння розв"язків, одержаних НМСЕ, з аналітичним розв"язком задачі /1/-/4/, /5/, /6/, враховуючи різні варіанти умов спряження при $h_1 \neq h_2$ і $h_1 = h_2$.
Тут $\Delta\%$ – відносна похибка

$$\Delta\% = \frac{|(U_{2H}^{(i)} - U_{2K}^{(i)})|}{U_{2K}^{(i)}} \cdot 100\% , \quad (i=1,2),$$

де $U_{2H}^{(i)}$ – переміщення, знайдені НМСЕ; $U_{2K}^{(i)}$ – переміщення, знайдені для K -го варіанту умов спряження.

Порівняння одержаних результатів свідчить, що варіації умов у формулах /8/, /10/ практично не впливають на переміщення $U_2^{(1)}$, $U_2^{(2)}$. Відносна похибка розв"язку, одержаного НМСЕ стосовно аналітичного, не перевищує 0,6 %.

1. Григоренко Я.М., Муха І.С., Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Пружна рівновага складових оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1984. № 7. С. 33-36. 2. Савула Я.Г. Задачи механики деформирования оболочек с резными срединными поверхностями: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1986. 3. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов, 1981. 4. Стрельченко И.Г. Условия сопряжения цилиндрических оболочек, обладающих малой сдвиговой жесткостью // Прикл. механика. 1982. 18. № 9. С.41-46.

5. П е л е х Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978.
6. Kulkarni A.K., Neale K.W., Ellyin F. Consistent theories for intersecting shells // Nucl. Eng. and Des. 1075.35.N3.p.277-385.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.89

УДК 517.949:517.956

М.Д.Коркуна, А.М.Кузик, І.І.Чулик

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ СУМАРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В КЛАСІ $W_2^{1,0}(Q_T)$

Метод сумарної апроксимації /МСА/ як один з найбільш ефективних методів побудови економних різницевих схем дає змогу будувати різницеві локально-одновимірні схеми /ЛОС/ для нестаціонарних задач математичної фізики у випадку довільної області n -вимірного простору [4]. У праці [2] досліджена збіжність різницевих ЛОС МСА у випадку розв"язку вихідної диференціальної задачі з класу $W_2^{2,1}(Q_T)$.

У даній статті отримана оцінка швидкості збіжності для різницевої ЛОС з розпаралеленням у класі $W_2^{1,0}(Q_T)$. Для спрощення ми розглядали двовимірний евклідів простір, однак отримані результати мають місце і для простору довільного числа вимірів.

Розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+q(x,t)u(x,t)=f_0(x,t)+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

$$x=(x_1,x_2),\ (x,t)\in Q_T,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,$$

$$u(x,t)=0,\ (x,t)\in S_T, \qquad /1/$$

де $\Omega=\{(x_1,x_2):\ 0<x_1<1,\ 0<x_2<1$, Γ - границя області Ω, $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $S_T=\Gamma\times[0,T]$.

На відрізку $[0,T]$ і в області Ω введемо рівномірні сітки

$$\bar\omega_\tau=\left\{t=t_j=j\tau: j=0,1,\dots,K,\ \tau=\frac{T}{K}\right\},$$

$$\bar\omega_h=\{x=(x_1,x_2)=(i_1h_1,i_2h_2),\ i_\alpha=0,1,\dots,N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha=1,\alpha=1,2\}. \qquad /2/$$