5. П е л е х Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978.
6. Kulkarni A.K., Neale K.W., Ellyin F. Consistent theories for intersecting shells // Nucl. Eng. and Des. 1975. 35. N3. p.277-385.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.89

УДК 517.949:517.956

М.Д.Коркуна, А.М.Кузик, І.І.Чулик

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ СУМАРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В КЛАСІ $W_2^{1,0}(Q_T)$

Метод сумарної апроксимації /МСА/ як один з найбільш ефективних методів побудови економних різницевих схем дає змогу будувати різницеві локально-одновимірні схеми /ЛОС/ для нестаціонарних задач математичної фізики у випадку довільної області n -вимірного простору [4]. У праці [2] досліджена збіжність різницевих ЛОС МСА у випадку розв"язку вихідної диференціальної задачі з класу $W_2^{2,1}(Q_T)$.

У даній статті отримана оцінка швидкості збіжності для різницевої ЛОС з розпаралеленням у класі $W_2^{1,0}(Q_T)$. Для спрощення ми розглядали двовимірний евклідів простір, однак отримані результати мають місце і для простору довільного числа вимірів.

Розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+q(x,t)u(x,t)=f_0(x,t)+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

$$x=(x_1,x_2),\ (x,t)\in Q_T,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,$$

$$u(x,t)=0,\ (x,t)\in S_T, \qquad /1/$$

де $\Omega=\{(x_1,x_2):\ 0<x_1<1,\ 0<x_2<1\}$, Γ - границя області Ω, $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $S_T=\Gamma\times[0,T]$.

На відрізку $[0,T]$ і в області Ω введемо рівномірні сітки

$$\bar\omega_\tau=\left\{t=t_j=j\tau:\ j=0,1,\dots,K,\ \tau=\frac{T}{K}\right\},$$

$$\bar\omega_h=\{x=(x_1,x_2)=(i_1h_1,i_2h_2),\ i_\alpha=0,1,\dots,N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha=1,\alpha=1,2\}. \qquad /2/$$

Позначимо $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, ω_h – множина внутрішніх вузлів сітки $\bar{\omega}_h$, $\gamma = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$.

Поклавши в основу адитивну модель МСА з розпаралеленням [1], побудуємо різницеву ЛОС

$$\eta_\alpha \frac{y_\alpha^{j+1} - \bar{y}^j}{\tau} + \Lambda_{\alpha,j+1} y_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} T_1 T_2 \left[f_{0,\alpha}(\cdot,t) + \frac{\partial f_\alpha(\cdot,t)}{\partial x_\alpha} \right] dt, \qquad /3/$$

$$(x_1,x_2) \in \omega_h,\ j = 0,1,\dots,K-1;\ \alpha = 1,2,$$

$$y_\alpha^0 = T_1 T_2\, u_0(\cdot),\quad \bar{y}^j = \sum_{\alpha=1}^{2} \eta_\alpha y_\alpha^j,$$

$$y_\alpha^j \big|_\gamma = 0,\ j = 0,1,\dots,K, \qquad /4/$$

де

$$\Lambda_{\alpha,j+1} v = -\left(a_\alpha^{j+1} v_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} + d_\alpha^{j+1} v,\quad \Lambda_{j+1} = \Lambda_{1,j+1} + \Lambda_{2,j+1},\ \alpha = 1,2$$

$$d_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} q_\alpha(\xi_1, \xi_2, t)\, d\xi_2\, d\xi_1\, dt,$$

$$a_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_\alpha - h_\alpha}^{x_\alpha} \int_{x_{3-\alpha} - \frac{h_{3-\alpha}}{2}}^{x_{3-\alpha} + \frac{h_{3-\alpha}}{2}} k_\alpha(\xi_1, \xi_2, t)\, d\xi_2\, d\xi_1\, dt,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \eta_\alpha = 1,\quad \sum_{\alpha=1}^{2} f_{0,\alpha}(x,t) = f(x,t),$$

$$T_\alpha W(\cdot) = h_\alpha^{-2} \left[\int_{x_\alpha - h_\alpha}^{x_\alpha} (h_\alpha + \xi - x_\alpha) W(\xi)\, d\xi + \int_{x_\alpha}^{x_\alpha + h_\alpha} (h_\alpha - \xi + x_\alpha) W(\xi)\, d\xi \right],\ \alpha = 1,2.$$

Оператори T_1 і T_2 є операторами точних різницевих схем [3], і для них справедливі тотожності

$$T_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},\quad \alpha = 1,2;\ (x_1,x_2) \in \omega_h.$$

Введемо позначення

$$\overset{*}{u}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_1 h_2} \displaystyle\int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} u(\xi_1, \xi_2, t)\, d\xi_2\, d\xi_1, & (x_1,x_2) \in \omega_h \\ 0, & (x_1,x_2) \in \gamma. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $u_0(x)\in L_2(\Omega)$, $f_{0,\alpha}(x,t)\in L_2(Q_T)$, $f_\alpha(x,t)\in L_2(Q_T)$, $\alpha=1,2$ і нехай виконуються умови

$$k_\alpha(x,t)\in W_\infty^{1,1}(Q_T),\quad k_\alpha(x,t)\geq \nu>0,$$

$$q_\alpha(x,t)\in W_\infty^{1,1}(Q_T),\quad q_\alpha(x,t)\geq \nu_1,\quad \alpha=1,2.$$

Тоді якщо $\tau\leq (c_1 h^*)^2$, $h^*=\min\{h_1,h_2\}$,

то при достатньо великому ν розв"язок різницевої ЛОС /3/, /4/ збігається до розв"язку задачі /1/, /2/ і має місце оцінка швидкості збіжності

$$\Big(\tau\sum_{j=0}^{k-1}\Big\|\bar{y}^{j+1}-\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}u^*(t)\,dt\Big\|^2_{-1,\Lambda_{j+1}}\Big)^{\frac{1}{2}}\leq MC|h|\Big[\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\|f_{0,\alpha}\|_{L_2(Q_T)}+\|f_\alpha\|_{L_2(Q_T)}\Big)\Big],$$

де $C=\max\{c,1\}$, M – константа, не залежна від τ, h і u.

1. Гордезиани Д.Г., Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации // Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С.178-186. 2. Кузик А.М., Чулик І.І. Побудова і дослідження локально-одновимірних різницевих схем у класі узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.23-29. 3. Макаров В.Л., Самарский А.А. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. 20. № 2. С.371-387. 4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.89