УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ ОБЧИСЛЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ ДВОВИМІРНИХ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Багато задач математичної фізики формулюють у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі:

$$\iint_S \sigma(P)/R(P,M)\,dS_P = f(M), \quad M \in S,$$

де $f(M)$ - задана, а $\sigma(P)$ - шукана функції; $R(P,M)$ - відстань між точками P і M евклідового простору E^3; $dS_P = (E \cdot F - G^2)^{1/2}\, d\alpha\, d\beta$, причому поверхня S задається параметричними рівняннями $x = x(\alpha,\beta)$, $y = y(\alpha,\beta)$, $z = z(\alpha,\beta)$ $((\alpha,\beta) \in D$ - замкнутої обмеженої області в $E^2)$, а E, F, G - коефіцієнти першої квадратичної форми

$$E = (x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2 + (z'_\alpha)^2, \quad F = (x'_\beta)^2 + (y'_\beta)^2 + (z'_\beta)^2,$$

$$G = x'_\alpha \cdot x'_\beta + y'_\alpha \cdot y'_\beta + z'_\alpha \cdot z'_\beta .$$

При наближеному розв"язуванні цього рівняння виникає проблема обчислення такого невласного інтеграла:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[A \cdot (x-x_0)^2 + 2 \cdot B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2\right]^{-1/2} dx\,dy, \qquad /1/$$

де точка з координатами x_0, y_0 належить до одиничного квадрата - $(x_0, y_0) \in [-1,1] \times [-1,1]$, а A, B, C - деякі дійсні числа.

У нашій статті будується алгоритм обчислення /1/, в основі якого лежить використання відомої формули [3]:

$$\int_c^d dy \int_{a \cdot y + b}^{p \cdot y + q} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{-1/2} dx =$$

$$= (y_0 - c) \cdot K(c) + (d - y_0) \cdot K(d) +$$

$$+ \frac{q - x_0 + p \cdot y_0}{(1+p^2)^{1/2}} L(p,q) + \frac{x_0 - b - a \cdot y_0}{(1+a^2)^{1/2}} L(a,b), \qquad /2/$$

причому $c \le y_0 \le d,\ a \cdot y_0 + b \le x_0 \le p y_0 + q$, а

$$K(t) = \ln \frac{q - x_0 + p \cdot t + [(q - x_0 + p \cdot t)^2 + (t - y_0)^2]^{1/2}}{q - x_0 + a \cdot t + [(q - x_0 + a \cdot t)^2 + (t - y_0)^2]^{1/2}},$$

$$L(t, S) = \ln \frac{d - y_0 + t \cdot (S - x_0 + t \cdot d) + (1 + t^2)^{1/2} \cdot [(S - x_0 + t \cdot d)^2 + (d - y_0)^2]^{1/2}}{c - y_0 + t \cdot (S - x_0 + t \cdot c) + (1 + t^2)^{1/2} [(S - x_0 + t \cdot c)^2 + (c - y_0)^2]^{1/2}}.$$

Зауважимо, що всі доданки у формулі /2/ невід"ємні; чисельники та знаменники у виразах під знаком логарифма також невід"ємні; вони можуть дорівнювати нулю лише у випадку, коли відповідні множники перед знаком логарифма теж дорівнюють нулю. Покажемо, яким способом можна інтеграл /1/ звести до суми інтегралів виду /2/.

Розглянемо квадратичну форму

$$S = A \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot B \cdot (x - x_0)(y - y_0) + C (y - y_0)^2. \qquad /3/$$

Перейдемо від системи координат XOY до $X_1 F Y_1$, де $F(x_0, y_0)$ – особлива точка. Виконуючи заміну змінних $x = x_1 + x_0,\quad y = y_1 + y_0$, одержимо

$$I = \int_{-1-x_0}^{1-x_0} \int_{-1-y_0}^{1-y_0} (A \cdot x_1^2 + 2 \cdot B \cdot x_1 \cdot y_1 + C \cdot y_1^2)^{-1/2} dx_1 dy_1 .$$

Далі зведемо квадратичну форму S до канонічного вигляду. З цією метою виконаємо заміну змінних [1] /див. рисунок/:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cdot \cos\varphi - y_1' \cdot \sin\varphi, \\ y_1 = x_1' \cdot \sin\varphi + y_1' \cdot \cos\varphi, \end{cases}$$

де $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} [(A - C)/(2B)]$. Легко бачити, що $0 < \varphi < \pi/2$. Причому $0 < \varphi < \pi/4$, якщо $\operatorname{sign} [(A - C)/B] = 1$; $\varphi = \pi/4$, якщо $\operatorname{sign} [(A - C)/B] = 0$; $\pi/4 < \varphi < \pi/2$, якщо $\operatorname{sign} [(A - C)/B] = -1$.
В результаті $S = A' \cdot (x_1')^2 + C' \cdot (y_1')^2$, причому

$$I = \iint_G S^{-1/2} dx_1' dy_1',$$

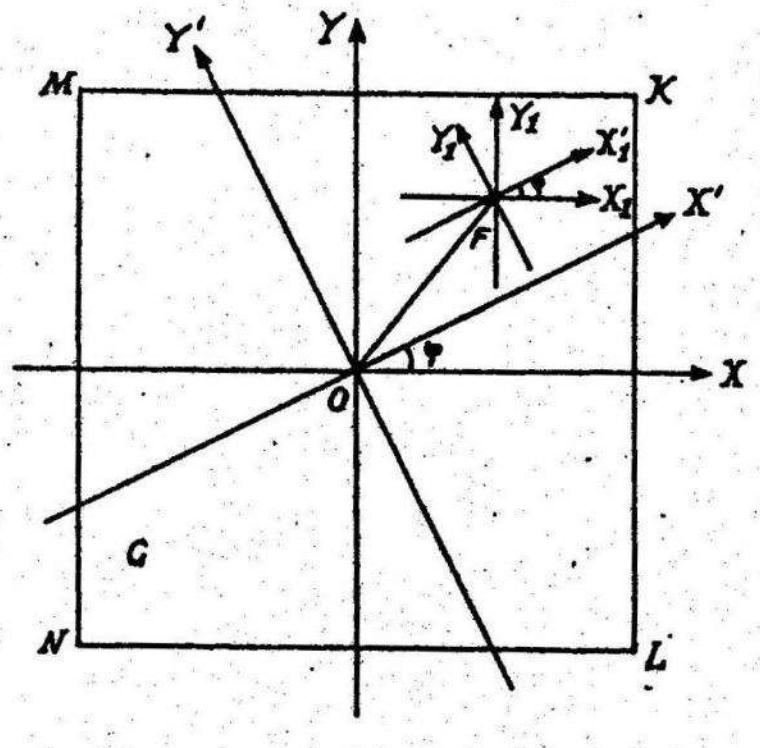
де $A' = 0{,}5\cdot\left(A + c + \mathrm{sign}\,B\cdot\left(4\cdot B^2 + (A-c)^2\right)^{1/2}\right)$,

$$c' = 0{,}5\cdot\left(A + c - \mathrm{sign}\,B\cdot\left(4\cdot B^2 + (A-c)^2\right)^{1/2}\right).$$

Оскільки для обчислення інтеграла /1/ застосовується формула /2/, то з необхідністю $A' > 0$ і $c' > 0$. Тому обмеження, які накладаються на коефіцієнти квадратичної форми /3/, мають вигляд $A + c > 0$, $A\cdot c - B^2 > 0$.
Останні нерівності являють собою необхідні та достатні умови використання розглядуваного методу.

Зауважимо, що точка O в системі $X_1' F Y_1'$ має координати

$$\begin{cases} x_{10}' = -x_0\cdot\cos\varphi - y_0\cdot\sin\varphi, \\ y_{10}' = x_0\cdot\sin\varphi - y_0\cdot\cos\varphi. \end{cases}$$



Виконавши заміну змінних $x_1' = x' - x_0'$, $y_1' = y' - y_0'$, одержимо

$$I = \iint_G \left[A'\cdot(x'-x_0')^2 + C'\cdot(y'-y_0')^2\right]^{-1/2} dx'dy',$$

причому координати особливої точки F у системі $X'OY'$ обчислюються за формулами

$$\begin{cases} x_0' = x_0\cdot\cos\varphi + y_0\cdot\sin\varphi, \\ y_0' = -x_0\cdot\sin\varphi + y_0\cdot\cos\varphi. \end{cases}$$

Нарешті, зробивши згідно з працями [2, 4] заміну змінних $x' = (A')^{-1/2}\cdot\tilde{x}$, $y' = (C')^{-1/2}\cdot\tilde{y}$, одержимо

$$I = (A\cdot C - B^2)^{-1/2}\cdot \iint_{\tilde{G}} \left[(\tilde{x}-\tilde{x}_0)^2 + (\tilde{y}-\tilde{y}_0)^2\right]^{-1/2} d\tilde{x}d\tilde{y},$$

де область $\tilde{G}$ представляє собою деякий паралелограм. Особлива точка в системі $\tilde{X}O\tilde{Y}$ матиме координати

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = (A')^{1/2}\cdot(x_0\cdot\cos\varphi + y_0\cdot\sin\varphi), \\ \tilde{y}_0 = (C')^{1/2}\cdot(-x_0\cdot\sin\varphi + y_0\cdot\cos\varphi). \end{cases}$$

Оскільки у системі $X'OY'$ точки K, L, M і N лежать на колі радіуса $(2)^{1/2}$, то їх координати у системі $\tilde{X}O\tilde{Y}$

$$K = \left[(A')^{1/2}\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi),\ (C')^{1/2}\cdot(\cos\varphi - \sin\varphi)\right],$$

$$M = \left[(A')^{1/2}\cdot(\sin\varphi - \cos\varphi),\ (C')^{1/2}\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi)\right],$$

$$N = \left[(A')^{1/2}\cdot(-\cos\varphi - \sin\varphi),\ (C')^{1/2}\cdot(\sin\varphi - \cos\varphi)\right],$$

$$L = \left[(A')^{1/2}\cdot(\cos\varphi - \sin\varphi),\ (C')^{1/2}\cdot(-\cos\varphi - \sin\varphi)\right].$$

Запишемо рівняння прямих [1] LK, LN, NM, KM:

$$LK: \tilde{x} = (A')^{1/2}\cdot(C')^{-1/2}\cdot(\mathrm{ctg}\varphi)^{-1}\cdot\tilde{y} + (A')^{1/2}\cdot(\cos\varphi)^{-1},$$

$$LN: \tilde{x} = -(A')^{1/2}\cdot(C')^{-1/2}\cdot\mathrm{ctg}\varphi\cdot\tilde{y} - (A')^{1/2}\cdot(\sin\varphi)^{-1},$$

$$NM: \tilde{x} = (A')^{1/2}\cdot(C')^{-1/2}\cdot(\mathrm{ctg}\varphi)^{-1}\cdot\tilde{y} - (A')^{1/2}\cdot(\cos\varphi)^{-1},$$

$$KM: \tilde{x} = -(A')^{1/2}\cdot(C')^{-1/2}\cdot\mathrm{ctg}\varphi\cdot\tilde{y} + (A')^{1/2}\cdot(\sin\varphi)^{-1}.$$

Інтегрування по області $\tilde{G}$ здійснюється залежно від кута φ. Якщо $0 < \varphi < \pi/4$, то

$$I = (A \cdot C - B^2)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{L_{\tilde{y}}}^{N_{\tilde{y}}} d\tilde{y} \int\limits_{LN}^{LK} S^{-1/2} d\tilde{x} + \int\limits_{N_{\tilde{y}}}^{K_{\tilde{y}}} d\tilde{y} \int\limits_{NM}^{LK} S^{-1/2} d\tilde{x} + \int\limits_{K_{\tilde{y}}}^{M_{\tilde{y}}} d\tilde{y} \int\limits_{NM}^{KM} S^{-1/2} d\tilde{x} \right). \qquad /4/$$

Якщо $\varphi = \pi/4$, то

$$I = (A \cdot C - B^2)^{-1/2} \cdot \left(\int\limits_{L_{\tilde{y}}}^{0} d\tilde{y} \int\limits_{LN}^{LK} S^{-1/2} d\tilde{x} + \int\limits_{0}^{M_{\tilde{y}}} d\tilde{y} \int\limits_{NM}^{KM} S^{-1/2} d\tilde{x} \right). \qquad /5/$$

Якщо $\pi/4 < \varphi < \pi/2$, то

$$I = (A \cdot C - B^2)^{-1/2} \cdot \left(\int\limits_{L_{\tilde{y}}}^{K_{\tilde{y}}} d\tilde{y} \int\limits_{LN}^{LK} S^{-1/2} d\tilde{x} + \int\limits_{K_{\tilde{y}}}^{N_{\tilde{y}}} d\tilde{y} \int\limits_{LN}^{KM} S^{-1/2} d\tilde{x} + \int\limits_{N_{\tilde{y}}}^{M_{\tilde{y}}} d\tilde{y} \int\limits_{NM}^{KM} S^{-1/2} d\tilde{x} \right). \qquad /6/$$

Зауважимо, що $S = (\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2$, а $L_{\tilde{y}}, N_{\tilde{y}}, K_{\tilde{y}}$ і $M_{\tilde{y}}$ – відповідно ординати точок L, N, K і M у системі $\tilde{X}O\tilde{Y}$.

Описану методику використовували для обчислення інтеграла

$$I = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} (4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2)^{-1/2} dx dy,$$

значення якого відоме [2, 4] і дорівнює 3,570. Застосування формул /4/–/6/ дає 3,571, що служить хорошим підтвердженням дієздатності відповідного програмного забезпечення.

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., 1988. 2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., 1981. Т.1. 3. Остудін Б.А., Кірік О.Є. Чисельний розв"язок одного класу задач електростатики з використанням методу Боголюбова-Крилова // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С.36-40. 4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969. Т.1.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.89

УДК 517.946

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський

АНАЛІЗ ТОПОЛОГІЧНИХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ НЕЛІНІЙНИХ ПОВНІСТЮ ІНТЕГРОВАНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нехай задана нелінійна динамічна система

$$u_t = K[u] + \varepsilon P[u], \quad t \in \mathbb{R}, \qquad /1/$$

де $u \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ - гладкому нескінченномірному многовиду; $K: M \to T(M)$ - векторне поле на M, $P: M \to T(M)$ - його мале збурення; $\varepsilon > 0$. Припустимо додатково, що векторне поле $K: M \to T(M)$ гамільтонове на M і повністю інтегроване по Ліувіллю. У цьому випадку відомо [2], що динамічна система /1/ при $\varepsilon = 0$ володіє нескінченно вкладеною в M ієрархією інваріантних нескінченномірних функціональних підмноговидів, що називаються багатосолітонними.

Легко показати стандартними методами джет-аналізу [3], що відповідні багатосолітонні розв"язки для /1/ при $\varepsilon = 0$ є сепаратрисними розв"язками для її особливих точок, тобто є її топологічними особливостями.

Зауваження 1. У випадку періодичності многовиду M ієрархія інваріантних скінченномірних многовидів, яка вказана вище, буде ізоморфна ієрархії скінченномірних торів.

При умові сильної гіперболічності особливих точок /1/ при $\varepsilon = 0$ ці топологічні особливості будуть являти собою так звані гетероклінічні траєкторії, або петлі, залежно від параметрів, що описують інваріантний многовид.

Виникає питання, за яких умов на збурення $P: M \to T(M)$ динамічна система буде володіти інваріантним многовидом /інва-