УДК 518:517.9

М.В.Жук

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА У ВИПАДКУ ОБЛАСТІ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Розглянемо рівняння

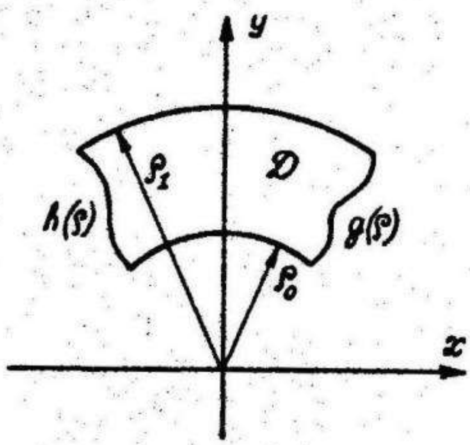
$$\mathcal{L}u \equiv -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+p(x_1,x_2)u = f(x_1,x_2),\quad p_{ij}=p_{ji}, \qquad /1/$$

при однорідній крайовій умові задачі Діріхле

$$u\big|_{\Gamma}=0, \qquad /2/$$

де Γ – межа області, D складається з двох концентричних дуг і двох кривих /див. рисунок/.

Оператор $\mathcal{L}$ розглядаємо в просторі $H=L_2(D)$ з нормою $\|u\|^2 = \iint\limits_D u^2(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$.



За область визначення $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x_1,x_2)$ в області $\bar{D}=D+\Gamma$, які задовольняють умову /2/.

Вважаємо, що оператор $\mathcal{L}$ задовольняє умову рівномірної еліптичності

$$\mu_1(\xi_1^2+\xi_2^2)\le\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}(x_1,x_2)\xi_i\xi_j\le\eta_1(\xi_1^2+\xi_2^2), \qquad /3/$$

де μ_1 і $\eta_1 = const>0$; ξ_1, ξ_2 – довільні дійсні числа; / x_1, x_2 / – довільна точка із $\bar{D}$.

Крім того, припускаємо, що функція $p(x_1,x_2)$ обмежена, тобто $\alpha\le p(x_1,x_2)\le\beta$, і при цьому виконується умова $\mu>0$, де

$$\mu=\begin{cases}\mu_1, & \text{якщо } \alpha\ge 0,\\ \mu_1+\alpha\varkappa, & \text{якщо } \alpha\le 0.\end{cases} \qquad /4/$$

У співвідношенні /4/ $\varkappa$ – постійна нерівності Фрідріхса [I].

Введемо простір Соболєва $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ функцій $u(x_1, x_2)$, які мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом, і які задовольняють умову /2/. Норма у $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ визначається формулою

$$|u|_0^2 = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 . \qquad /5/$$

Відзначимо, що простір $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ є енергетичним простором додатно визначеного оператора $Tu = -\Delta u$, що розглядається в H при $D(T) = D(\mathcal{L})$, а норма /5/ – його енергетична норма. При цьому

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} |u|_0$$

для довільного $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, [I].

Для довільних $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ формально введемо білінійну форму

$$\mathcal{L}(u,v) = \iint_D \left[\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + p(x_1, x_2) uv \right] dx_1 dx_2 . \qquad /6/$$

Виходячи з /3/ і /4/, для довільного $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ отримуємо

$$\mu |u|_0^2 \leqslant \mathcal{L}(u,u) \leqslant \eta |u|_0^2 , \qquad /7/$$

де

$$\eta = \begin{cases} \eta_1 + \beta\varkappa & , \text{ якщо } \beta > 0, \\ \eta_1 & , \text{ якщо } \beta \leqslant 0. \end{cases}$$

Узагальненим розв"язком задачі /1/-/2/ називається функція $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, для якої виконується тотожність

$$\mathcal{L}(u,v) = \iint_D f v \, dx_1 dx_2 \qquad /8/$$

при довільній функції $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Перейдемо до полярної системи координат $/x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta/$, у якій межа області D описується дугами радіусів $\rho = \rho_0$ і $\rho = \rho_1$, і достатньо гладкими кривими $\theta = g(\rho)$ і $\theta = h(\rho)$, причому $g(\rho) < h(\rho)$ при $0 < \rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1$, тобто область D перетворюється в область

$$D_1 = \left\{ \begin{matrix} \rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1 \\ g(\rho) \leqslant \theta \leqslant h(\rho) \end{matrix} \right\}$$

Відмітимо, що оскільки перетворення змінних $/x_1, x_2/$ на $/\rho, \theta/$ таке, що область D біоднозначно перетворюється в область D_1, причому перетворення в обидві сторони здійснюється функціями неперервно диференційованими у відповідних замкнутих областях зміни $/x_1, x_2/$ і $/\rho, \theta/$, то властивості функцій і операторів у полярних координатах зберігаються. Зауважимо, що при цьому простір $\overset{c}{W}{}_2^1(D)$ перейде у простір $\overset{o}{W}{}_2^1(D_1)$ з нормою

$$|u|_0^2 = \iint\limits_{D_1} \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right] d\rho\, d\theta,$$

а задача /1/ запишеться у вигляді

$$\mathcal{L}u = -\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\rho_{ij}'\frac{\partial u}{\partial x_j'}\right) + pu = f, \qquad /1'/$$

$$\rho_{ij}' = \rho\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\rho_{rs}\frac{\partial x_i'}{\partial x_r}\frac{\partial x_j'}{\partial x_s}, \quad \rho = x_1', \ \theta = x_2'.$$

Наближений розв"язок задачі /1/-/2/ згідно з методом Канторовича шукаємо у вигляді

$$u_n(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{n} C_k(\rho)\,\varphi_k(\rho, \theta), \qquad /9/$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(\rho),\ h(\rho)]$ функції $\varphi_k(\rho, \theta)$ задовольняють умови

$$\varphi_k(\rho, \theta)\Big|_{\theta = g(\rho)} = \varphi_k(\rho, \theta)\Big|_{\theta = h(\rho)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \qquad /10/$$

і їх вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{\chi_\ell(\rho)\varphi_k(\rho, \theta)\}$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі $\overset{o}{W}{}_2^1(D_1)$; при цьому функції системи $\{\chi_\ell(\rho)\}$ задовольняють умови

$$\chi_\ell(\rho)\Big|_{\rho = \rho_0} = \chi_\ell(\rho)\Big|_{\rho = \rho_1} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots \qquad /11/$$

Невідомі коефіцієнти $C_k(\rho)$ визначаємо із системи

$$\int\limits_{g(\rho)}^{h(\rho)} (\mathcal{L}u_n - f)\,\varphi_i(\rho, \theta)\,d\theta = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \qquad /12/$$

$$C_k(\rho)\Big|_{\rho = \rho_0} = C_k(\rho)\Big|_{\rho = \rho_1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \qquad /13/$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду $u_n(\rho,\theta)=\sum_{k=1}^{n} a_k(\rho)\varphi_k(\rho,\theta)$.
Нехай для деякої функції $u_n(\rho,\theta)\in H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ справедлива тотожність

$$\mathcal{I}(u_n, v_n)=\iint_{D_2} \rho f v_n \, d\rho \, d\theta,$$

в якій $v_n(\rho,\theta)$ довільна функція з $H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$. Тоді функція $u_n(\rho,\theta)$ називається узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /12/–/13/.

Аналогічно, як і в праці [2], доводиться наступна теорема.

<u>Теорема</u>. Якщо виконуються умови /7/, то для довільної функції $f\in \overset{\circ}{H}$ задача /1/–/2/ має единий узагальнений розв"язок $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$; при довільному n система методу Канторовича /12/–/13/ має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(\rho,\theta)\in H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u-u_n|_0 \le c\,|u-v_n|_0, \qquad /14/$$

де $c=\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$, а елемент $v_n=\sum_{k=1}^{n} a_k(\rho)\varphi_k(\rho,\theta)\in H_n \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ вибираємо таким, що реалізує мінімум функціоналу $|u-v_n|_0$.

Якщо координатну систему функцій $\{\varphi_k(\rho,\theta)\}$ вибрати в одному із виглядів

$$\tilde{\varphi}_k(\rho,\theta)=\sin\frac{k\pi(\theta-g(\rho))}{h(\rho)-g(\rho)}, \quad \tilde{\varphi}_k(\rho,\theta)=\theta^{k-1}(\theta-g(\rho))(\theta-h(\rho)), \quad k=1,2,\ldots, \qquad /15/$$

то при умові неперервності перших похідних узагальненого розв"язку вихідної задачі та існування других похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}$, сумованих з квадратом, буде справедлива оцінка

$$|u-u_n|_0 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Накладаючи умови на похідні більш високого порядку, можна отримати більш високий порядок малості [3].

1. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 2. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. 3. К а н т о р о в и ч Л.В., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.89

УДК 519.6

Л.Л.Роман

ЗБІЖНІСТЬ РЕКУРСИВНОГО МЕТОДУ З ПАМ"ЯТТЮ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Для розв"язування задачі

$$f(x) \to \min, \; x \in E^n, \qquad /1/$$

E^n - n-мірний евклідів простір, дослідимо метод

$$\begin{aligned}
&x_0 = z_0^{(0)} = \bar{x}_0, \\
&z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - [f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(z_n^{(i)}), \\
&i = 0,1,\ldots, t-1, \\
&x_{n+1} = z_{n+1}^{(0)} = z_n^{(t)}, \\
&\bar{x}_{n+1} = x_{n+1} - \tfrac{1}{2}[f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(x_n), \qquad /2/ \\
&n = 0,1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

побудований на базі методу [1, 3].

Достатні умови збіжності методу дає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ сильно випукла на E^n, $f \in C^3$ і мають місце умови $\|f'''(x)\| \le R$,

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \le L\|x-y\|, \; x, y \in E^n, \; R, L = const > 0.$$

Початкове наближення x_0 вибирається так, що

$$q_0 / (1 - q_0(3+q_0)/2) \le 1, \; q = Cq_0 < 1, \; q_0 = \ell \|f'(x_0)\| / m,$$

де $\frac{m}{2} = \varkappa > 0$ - константа сильної випуклості,

$$\ell^2 = \frac{5}{4}\frac{R^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{L}{m}, \quad C^{t+1} = \left[\frac{R}{2\ell m}(3+q_0)\right]^{t-1}.$$