1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 2. Лучка А.Ю., Жук М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. 3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.89

УДК 519.6

Л.Л.Роман

ЗБІЖНІСТЬ РЕКУРСИВНОГО МЕТОДУ З ПАМ"ЯТТЮ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Для розв"язування задачі

$$f(x) \to \min,\ x \in E^n, \tag{1}$$

E^n - n-мірний евклідів простір, дослідимо метод

$$
\begin{aligned}
&x_0 = z_0^{(0)} = \bar{x}_0,\\
&z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - [f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(z_n^{(i)}),\\
&i = 0,1,\dots,t-1,\\
&x_{n+1} = z_{n+1}^{(0)} = z_n^{(t)},\\
&\bar{x}_{n+1} = x_{n+1} - \tfrac{1}{2}[f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(x_n),\\
&n = 0,1,2,\dots,
\end{aligned} \tag{2}
$$

побудований на базі методу [1, 3].

Достатні умови збіжності методу дає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ сильно випукла на E^n, $f \in C^3$ і мають місце умови $\|f'''(x)\| \le R$,

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \le L\|x-y\|,\ x,y \in E^n,\ R, L = const > 0.$$

Початкове наближення x_0 вибирається так, що

$$q_0/(1-q_0(3+q_0)/2) \le 1,\ q = Cq_0 < 1,\ q_0 = \ell\|f'(x_0)\|/m,$$

де $\frac{m}{2} = æ > 0$ - константа сильної випуклості,

$$\ell^2 = \frac{5}{4}\frac{R^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{L}{m},\quad C^{t+1} = \left[\frac{R}{2\ell m}(3+q_0)\right]^{t-1}.$$

Тоді послідовність X_n, визначена по /2/, збігається до точки мінімуму X_* функції $f(x)$ на E^n, при цьому має місце оцінка

$$\|X_n - X_*\| \le \frac{1}{cl} q^{D_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad /3/$$

де

$$D_0 = 1, \; D_1 = t+1, \; D_k = (t+1) D_{k-1} + D_{k-2}, \; k = 2,3,\ldots \qquad /4/$$

Порядок збіжності послідовності /2/ визначається із співвідношення

$$\rho = t + 1 + \frac{1}{\rho}. \qquad /5/$$

Доведення. Існування і єдиність точки X_* випливає із властивостей сильно випуклих функцій [2]. Доведемо оцінку /3/, попередньо показавши

$$\|f'(X_k)\| \le q^{D_k - 1} \|f'(X_0)\|,$$

$$\|X_{k+1} - X_k\| \le \frac{2}{m} \|f'(X_k)\|,$$

$$\|\bar{X}_{k+1} - \bar{X}_k\| < \frac{5}{2} \frac{\|f'(X_k)\|}{m}, \qquad /6/$$

$K = 0,1,2,\ldots$

Відзначимо, що із /2/ випливає

$$f'(z_0^{(1)}) = f'(z_0^{(1)}) - f'(X_0) - f''(\bar{X}_0)(z_0^{(1)} - X_0). \qquad /7/$$

Використавши розклад $f'(z_0^{(1)})$ за формулою Тейлора у правій частині /7/ і провівши відповідні перетворення, одержимо

$$f'(z_0^{(1)}) = \int_0^1 (1-t) f'''(X_0 + t(z_0^{(1)} - X_0))(z_0^{(1)} - X_0)^2 dt. \qquad /8/$$

Із властивостей сильно випуклих функцій [2] випливає, що

$$\|[f''(x)]^{-1}\| \le 1/m, \quad x \in E^n.$$

Врахувавши цей факт і умови теореми, одержимо оцінку

$$\|f'(z_0^{(1)})\| < \frac{R}{2m^2} \|f'(X_0)\|^2. \qquad /9/$$

Скориставшись формулою

$$f(x)-f(y)=\int_0^1 f'(y+t(x-y))(x-y)\,dt$$

і /2/, запишемо

$$f'(z_0^{(i+1)})=f'(z_0^{(i)})+\int_0^1 f''(z_0^{(i)}+t(z_0^{(i+1)}-z_0^{(i)}))\,dt\,(z_0^{(i+1)}-z_0^{(i)})=$$

$$=\int_0^1 [f''(\bar{x}_0)-f''(z_0^{(i)}+t(z_0^{(i+1)}-z_0^{(i)}))][f''(\bar{x}_0)]^{-1}f'(z_0^{(i)})\,dt.$$

Згідно з умовами теореми одержуємо

$$\|f'(z_0^{(i+1)})\|\leq\frac{R}{m}\Big[\|z_0^{(i)}-\bar{x}_0\|+\frac{1}{2}\|z_0^{(i+1)}-z_0^{(i)}\|\Big]\cdot\|f'(z_0^{(i)})\|. \qquad /10/$$

Із /10/ і умов теореми маємо оцінки

$$\|f'(z_0^{(2)})\|\leq\left(\frac{R}{2m^2}\right)^2(3+q_0)\,\|f'(x_0)\|^3$$

$$\cdots$$

$$\|f'(z_0^{(t)})\|\leq\left(\frac{R}{2m^2}\right)^t(3+q_0)^{t-1}\|f'(x_0)\|^{t+1}. \qquad /11/$$

Тепер одержимо оцінки для точки x_1 .

Легко помітити, що

$$\|f'(x_1)\|=\|f'(z_0^{(t)})\|\leq C^{t+1}q_0^t\frac{R}{2m\ell}\|f'(x_0)\|\leq\frac{c}{2}q^t\|f'(x_0)\|=q^{D_1-1}\|f'(x_0)\|,$$

оскільки

$$\frac{R}{\ell\cdot m}\leq\frac{R}{m\sqrt{\frac{5}{4}\frac{R^2}{m^2}}}<1;$$

і

$$\frac{c}{2}\leq\frac{1}{2}\left[\frac{R}{2\ell m}(3+q_0)\right]^{\frac{1}{t+1}}\leq\frac{1}{2}\sqrt[t+1]{2}<1.$$

Крім того,

$$\|x_1-x_0\|\leq\|z_0^{(t)}-z_0^{(t-1)}\|+\ldots+\|z_0^{(1)}-x_0\|\leq\frac{1}{m}\Big[1+\frac{1}{2}q_0+\frac{1}{4}q_0^2(3+q_0)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2}q_0\right)^{t-1}(3+q_0)^{t-2}\Big]\cdot\|f'(x_0)\|\leq\left[1+\frac{1}{2}\frac{q_0}{1-\frac{q_0}{2}(3+q_0)}\right]\cdot\frac{\|f'(x_0)\|}{m}<\frac{2}{m}\|f'(x_0)\|,$$

$$\|\bar{x}_1-\bar{x}_0\|\leq\|\bar{x}_1-x_1\|+\|x_1-x_0\|\leq\frac{1}{2}\frac{\|f'(x_1)\|}{m}+\frac{2}{m}\|f'(x_0)\|\leq\frac{5}{2}\cdot\frac{\|f'(x_0)\|}{m}.$$

Врахувавши, що сам метод починає працювати з точки x_1 , перевіримо виконання умов /6/ для точки x_2 . Аналогічно /8/.

для $f'(z_1^{(1)})$, $f''(\bar{x}_1)$ одержимо

$$f'(z_1^{(1)}) = \frac{1}{2} f''(x_1)(z_1^{(1)}-x_1)^2 - f'''(x_1)(\bar{x}_1-x_1) + \delta_{1,1} - \delta_{2,1},$$

$$\delta_{1,1} = \int_0^1 (1-t)[f'''(x_1+t(z_1^{(1)}-x_1)) - f'''(x_1)](z_1^{(1)}-x_1)^2 dt,$$

$$\delta_{2,1} = \int_0^1 [f'''(x_1+t(\bar{x}_1-x_1)) - f'''(x_1)](\bar{x}_1-x_1)(z_1^{(1)}-x_1)dt. \qquad /12/$$

Із врахуванням /2/ із /12/ слідує

$$f'(z_1^{(1)}) = \frac{1}{2} f'''(x_1)[f''(\bar{x}_0)]^{-1} f'''(\theta_0)(\bar{x}_0-\bar{x}_1)(z_1^{(1)}-x_1)^2 + \delta_{1,1} - \delta_{2,1},$$

$$\bar{x}_1 \le \theta_0 \le \bar{x}_0. \qquad /13/$$

Оцінимо /13/, враховуючи умови теореми

$$\|f'(z_1^{(1)})\| \le \frac{R^2}{2m} \|\bar{x}_1-\bar{x}_0\| \, \|z_1^{(1)}-x_1\|^2 + \frac{L}{6}\|z_1^{(1)}-x_1\|^3 + \frac{L}{2}\|\bar{x}_1-x_1\|^2 \|z_1^{(1)}-x_1\| \le$$

$$\le \left[\frac{5}{4}\cdot\frac{R^2}{m^4} + \frac{L}{m^3}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)q^{D_1-1}\right] \|f'(x_0)\|\cdot\|f'(x_1)\|^2 \le \frac{\ell^2}{m^2}\|f'(x_0)\|\cdot\|f'(x_1)\|^2 \qquad /14/$$

Провівши перетворення аналогічно /10/і використавши умови теореми, одержимо

$$\|f'(z_1^{(2)})\| \le \frac{R}{2m^2}(3+q_0)\frac{\ell^2}{m^2}\|f'(x_0)\|\cdot\|f'(x_1)\|^3,$$

$$\|f'(z_1^{(t)})\| \le \left[\frac{R}{2m^2}(3+q_0)\right]^{t-1}\frac{\ell^2}{m^2}\|f'(x_0)\|\cdot\|f'(x_1)\|^{t+1}. \qquad /15/$$

Звідси

$$\|f'(x_2)\| = \|f'(z_1^{(t)})\| \le C^{t+1}\left(\frac{\ell}{m}\|f'(x_0)\|\right)^{t+1} q^{(t+1)(D_1-1)}\|f'(x_0)\| \le$$

$$\le q^{(t+1)}\cdot q^{(t+1)(D_1-1)}\|f'(x_0)\| = q^{(t+1)D_1}\|f'(x_0)\| = q^{D_2-1}\|f'(x_0)\|. \qquad /16/$$

Крім цього, запишемо

$$\|x_2-x_1\| \le \|z_1^{(t)}-z_1^{(t-1)}\| + \dots + \|z_1^{(1)}-x_1\| \le \frac{\|f'(x_1)\|}{m}\left(1+\frac{1}{2}q_0^2+\dots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} q_0^t (3+q_0)^{t-2}\right) < \frac{\|f'(x_1)\|}{m}\left(1+\frac{q_0}{2}\,\frac{q_0}{1-\frac{q_0}{2}(3+q_0)}\right) \le 2\,\frac{\|f'(x_1)\|}{m},$$

$$\|\bar{x}_2-\bar{x}_1\| \le \frac{1}{2}\,\frac{\|f'(x_2)\|}{m} + \frac{3}{2}\,\frac{\|f'(x_1)\|}{m} + \frac{1}{2}\,\frac{\|f'(x_1)\|}{m} \le \frac{5}{2}\,\frac{\|f'(x_1)\|}{m}.$$

Використавши метод математичної індукції, одержимо оцінки

$$\|f'(x_n)\| \le \left[\frac{R}{2m^2}(3+q_0)\right]^{t-1} \frac{\ell^2}{m^2} \|f'(x_{n-2})\| \cdot \|f'(x_{n-1})\|^{t+1} \le$$

$$\le q^{D_n - 1} \|f'(x_0)\| \le \frac{m}{c\ell} q^{D_n},$$

$$\|x_n - x_{n-1}\| \le 2\,\frac{\|f'(x_{n-1})\|}{m},$$

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-2}\| \le \frac{5}{2}\,\frac{\|f'(x_{n-1})\|}{m}. \qquad /17/$$

Отже, нерівності /6/ доведені.

Доведемо оцінку /3/. З властивостей сильно випуклих функцій [2] маємо $\|x_n - x_*\| \le \|f'(x_n)\|/m$.

Врахувавши першу оцінку /17/, одержимо оцінку /3/

$$\|x_n - x_*\| \le q^{D_n}/c\ell.$$

Із /17/ можемо записати рівняння /5/ для визначення порядку збіжності методу. Теорема доведена.

1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1968. № 5. С. 38-39. 2. В а с и л ь е в Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980. 3. Щ е р б и н а Ю.М., Г о л у б Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам"яттю для мінімізації функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С.3-7.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.89

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо таку нелінійну граничну задачу:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = a(x)f(y) + g(x), \qquad /1/$$

$$y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B; \qquad /2/$$

$$A^2 + B^2 \ne 0, \quad |\alpha| < +\infty, \quad |\beta| < +\infty.$$