Використавши метод математичної індукції, одержимо оцінки

$$\|f'(x_n)\| \leq \left[\frac{R}{2m^2}(3+q_0)\right]^{t-1} \frac{\ell^2}{m^2} \|f'(x_{n-2})\| \cdot \|f'(x_{n-1})\|^{t+1} \leq$$

$$\leq q^{D_n - 1} \|f'(x_0)\| \leq \frac{m}{c\ell} q^{D_n},$$

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2 \frac{\|f'(x_{n-1})\|}{m},$$

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-2}\| \leq \frac{5}{2} \frac{\|f'(x_{n-1})\|}{m}. \qquad /17/$$

Отже, нерівності /6/ доведені.

Доведемо оцінку /3/. З властивостей сильно випуклих функцій [2] маємо $\|x_n - x_*\| \leq \|f'(x_n)\| / m$.

Врахувавши першу оцінку /17/, одержимо оцінку /3/

$$\|x_n - x_*\| \leq q^{D_n}/c\ell.$$

Із /17/ можемо записати рівняння /5/ для визначення порядку збіжності методу. Теорема доведена.

1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1968. № 5. С. 38-39. 2. В а с и л ь е в Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980. 3. Щ е р б и н а Ю.М., Г о л у б Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам"яттю для мінімізації функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С.3-7.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.89

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо таку нелінійну граничну задачу:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y = a(x)f(y) + g(x), \qquad /1/$$

$$y(\alpha) = \mathcal{A}, \quad y(\beta) = \mathcal{B}; \qquad /2/$$

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 \neq 0, \quad |\alpha| < +\infty, \quad |\beta| < +\infty.$$

Будемо припускати, що задача /1/-/2/ має єдиний розв"язок, тобто для цієї задачі виконуються відповідні умови теорем існування та єдиності [1]. Зокрема, будемо припускати $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $a(x)$ неперервними на проміжку $[\alpha, \beta]$, причому $p(x)>0$, $q(x)\geq 0$, а $f(y)$ неперервна при $-\infty < y < +\infty$ і задовольняє умову Ліпшіца для будь-яких y та $\tilde{y}$ з області визначення

$$|f(y)-f(\tilde{y})| \leq N\,|y-\tilde{y}|. \qquad /3/$$

На основі /1/-/2/ введемо таку лінійну задачу:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\tilde{y}}{dx}\right]-\left[q(x)+Ka(x)\right]\tilde{y}=g(x), \qquad /4/$$

$$\tilde{y}(\alpha)=\mathcal{A}, \qquad \tilde{y}(\beta)=\mathcal{B}; \qquad /5/$$

де $K=\dfrac{f(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}$, коли $\mathcal{A}\neq 0$; /6/

або $K=\dfrac{f(\mathcal{B})}{\mathcal{B}}$, коли $\mathcal{B}\neq 0$. /6'/

Звичайними міркуваннями легко довести таку нерівність для різниці розв"язків $y(x)$ та $\tilde{y}(x)$ задач /1/-/2/ та /4/-/5/ відповідно [2; 3]:

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]}|y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \frac{\left[N+\left|\frac{f(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}\right|\right]\cdot C}{1-NC}\max_{x\in[\alpha,\beta]}|\tilde{y}(x)-\mathcal{A}|, \qquad /7/$$

де

$$C=\max_{x\in[\alpha,\beta]}\left|\int_{\alpha}^{\beta}|a(x)|\cdot|G(x,\xi)|\,d\xi\right|,$$

$G(x,\xi)$ – функція Гріна задачі

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)\,y(x)=g(x); \quad y(\alpha)=y(\beta)=0.$$

При виведенні /7/ використана умова $NC<1$, виконання якої також входить у число обмежень на параметри задачі /1/-/2/, тобто на функції, граничні умови та довжину проміжку $[\alpha, \beta]$.

Якщо $\mathcal{A} = 0$, то в /4/ та /7/ слід сталу $\mathcal{A}$ замінити на $\mathcal{B}$.

Зовсім аналогічно можна побудувати лінеаризований аналог для граничної задачі

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y=a(x)f(y')+g(x); \qquad /8/$$

$$y'(\alpha)=\mathcal{A}, \quad y'(\beta)=\mathcal{B}, \quad \mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2\neq 0. \qquad /9/$$

У цьому випадку наближений розв"язок можна ввести таким чином:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\tilde{y}}{dx}\right]-q(x)\tilde{y}-a(x)K\tilde{y}=g(x); \qquad /10/$$

$$\tilde{y}(\alpha)=\mathcal{A}, \quad \tilde{y}'(\beta)=\mathcal{B}, \qquad /11/$$

де $K=\frac{f(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}$, коли $\mathcal{A}\neq 0$,

або $K=\frac{f(\mathcal{B})}{\mathcal{B}}$, коли $\mathcal{B}\neq 0$.

Всі запропоновані тут наближені схеми проходять також у випадку, коли граничні умови мають вигляд

$$y'(\alpha)=\mathcal{A}, \quad y(\beta)=\mathcal{B}$$

або $y(\alpha)=\mathcal{A}, \quad y'(\beta)=\mathcal{B}$.

Близькість наближеного та точного розв"язків при цьому оцінюється за вищевказаною схемою. На закінчення відзначимо, що дана стаття є продовженням праць [2; 3].

Приклад. Розглянемо нелінійну задачу

$$y''+9y=3(2y)^{\frac{1}{3}}; \qquad /12/$$

$$y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}. \qquad /13/$$

Точним розв"язком /12/-/13/ є функція

$$y=\frac{1}{2}\sin^3 x. \qquad /14/$$

Наближений розв"язок /12/-/13/ за вищевказаною лінеаризацією будується на основі такого рівняння:

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y} = 0; \qquad /15/$$

$$\tilde{y}(0) = 0, \quad \tilde{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad /16/$$

Тому

$$\tilde{y} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} \sin\sqrt{3}\,x. \qquad /17/$$

Близькість цих розв"язків оцінюється функцією

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(\sin^3 x - \frac{\sin\sqrt{3}\,x}{\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\right).$$

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961. 2. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Про модифікований метод еквівалентної лінеаризації для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.40-42. 3. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для рівнянь Льєнара // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.42-45.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.88

УДК 519.21

І.Д.Квіт

СПОДІВАНЕ ЗАЛИШКОВЕ НАПРАЦЮВАННЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $\mathcal{P}\{\xi \leq t\} = \mathcal{F}(t)$ і густиною $p(t) = \mathcal{F}'(t)$, яка описує напрацювання технічної одиниці до відмови, має обмежене математичне сподівання

$$E\xi = \int_0^\infty t\,p(t)\,dt = \int_0^\infty \{1 - \mathcal{F}(t)\}\,dt = \int_0^\infty R(t)\,dt, \qquad /1/$$

де $R(t) = 1 - \mathcal{F}(t)$ – надійність у момент t.

Тантилем τ_ω порядку ω назвемо розв"язок рівняння

$$\int_0^{\tau_\omega} R(t)\,dt = \omega \int_{\tau_\omega}^\infty R(t)\,dt, \quad \omega > 0. \qquad /2/$$