Наближений розв"язок /12/-/13/ за вищевказаною лінеаризацією будується на основі такого рівняння:

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y} = 0; \quad /15/$$

$$\tilde{y}(0) = 0, \quad \tilde{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad /16/$$

Тому

$$\tilde{y} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} \sin\sqrt{3}\,x. \quad /17/$$

Близькість цих розв"язків оцінюється функцією

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(\sin^3 x - \frac{\sin\sqrt{3}\,x}{\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\right).$$

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961. 2. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Про модифікований метод еквівалентної лінеаризації для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.40-42. 3. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для рівнянь Льєнара // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.42-45.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.88

УДК 519.21

І.Д.Квіт

СПОДІВАНЕ ЗАЛИШКОВЕ НАПРАЦЮВАННЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу ймовірностей $\mathcal{P}\{\xi \leq t\} = \mathcal{F}(t)$ і густиною $p(t) = \mathcal{F}'(t)$, яка описує напрацювання технічної одиниці до відмови, має обмежене математичне сподівання

$$E\xi = \int_0^\infty t\,p(t)\,dt = \int_0^\infty \{1 - \mathcal{F}(t)\}\,dt = \int_0^\infty R(t)\,dt, \quad /1/$$

де $R(t) = 1 - \mathcal{F}(t)$ – надійність у момент t.

Тантилем τ_ω порядку ω назвемо розв"язок рівняння

$$\int_0^{\tau_\omega} R(t)\,dt = \omega \int_{\tau_\omega}^\infty R(t)\,dt, \quad \omega > 0. \quad /2/$$

Але, згідно з означенням /1/,

$$\int_0^{\tau_\omega} R(t)\,dt + \int_{\tau_\omega}^{\infty} R(t)\,dt = E\,\xi. \qquad /3/$$

Таким чином, тантиль τ_ω поділяє середнє напрацювання на дві частини:

$$S_1(\omega) = \int_0^{\tau_\omega} R(t)\,dt \qquad /4/$$

– напрацювання за час τ_ω та

$$S_2(\omega) = \int_{\tau_\omega}^{\infty} R(t)\,dt \qquad /5/$$

– сподіване залишкове напрацювання після моменту τ_ω.

Враховуючи позначення /4/ і /5/, запишемо тотожність /3/ у вигляді

$$\frac{S_1(\omega)}{E\,\xi} + \frac{S_2(\omega)}{E\,\xi} = 100\,\%, \qquad /6/$$

де перший доданок виражає напрацювання за час τ_ω, а другий – сподіване залишкове напрацювання в процентах до середнього напрацювання.

Рівність /2/, записана у вигляді

$$\frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)} = \omega : 1, \qquad /7/$$

вказує на те, що пряма $t = \tau_\omega$ поділяє площу, обмежену графіком надійності $R(t)$ та осями координат, на дві частини: ліву та праву, у пропорції $\omega : 1$. Зокрема, при ω = 1/9, 1/3, 1, 3 і 9 відповідно маємо перший децильний тантиль $\tau_{1/9}$, перший квартильний тантиль $\tau_{1/3}$, медіанний тантиль τ_1, третій квартильний тантиль $\tau_{1/3}$ і дев"ятий децильний тантиль τ_9.

<u>Приклад.</u> Нехай

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}}, \quad t > 0, \quad (\sigma > 0,\ \nu > 0).$$

Тоді

$$E\,\xi = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}} dt = \sigma\,\Gamma\!\left(\frac{1}{\nu}+1\right), \quad S_1(\omega) = \frac{\sigma}{\nu}\,\gamma\!\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^{\nu}\right), \quad S_2(\omega) = \frac{\sigma}{\nu}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^{\nu}\right),$$

де

$$\gamma(a,t) = \int_0^t e^{-x} x^{a-1}\,dx, \quad \Gamma(a,t) = \int_t^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx$$

- неповні гама функції; $\gamma(a,t) + \Gamma(a,t) = \Gamma(a)$ - повна гама функція; $a > 0$. Тантильне рівняння /7/

$$\frac{\gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right)} = \omega$$

зводиться до вигляду

$$\frac{\gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} = \frac{\omega}{\omega+1}.$$

Зліва маємо функцію розподілу ймовірностей випадкової змінної $\gamma_{\frac{1}{\nu}}$

$$\mathcal{P}\left\{\gamma_{\frac{1}{\nu}} \leq \left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right\}.$$

Але випадкова змінна $\gamma_{\frac{1}{\nu}}$ еквівалентна випадковій змінній $\frac{1}{\nu} F_{\frac{2}{\nu},\infty}$. Таким чином,

$$\mathcal{P}\left\{F_{\frac{2}{\nu},\infty} \leq \nu\left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right\} = \frac{\omega}{\omega+1}.$$

Звідси

$$\mathcal{P}\left\{F_{\infty,\frac{2}{\nu}}\left(\frac{\omega}{\omega+1}\right) > \left[\nu\left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right]^{-1}\right\} = \frac{\omega}{\omega+1}, \; 0<\omega\leq 1,$$

$$\mathcal{P}\left\{F_{\frac{2}{\nu},\infty}\left(\frac{1}{\omega+1}\right) > \nu\left(\frac{\tau_\omega}{\sigma}\right)^\nu\right\} = \frac{1}{\omega+1}, \; \omega\geq 1. \qquad /8/$$

Співвідношення /8/ дозволяють використати таблиці [1] для визначення тантилю τ_ω заданого порядку ω.

Зазначимо, що при $\nu = 1$, тобто у випадку експонентного напрацювання

$$E\xi = \sigma, \quad S_1(\omega) = \sigma\left(1 - e^{-\frac{\tau_\omega}{\sigma}}\right), \quad S_2(\omega) = \sigma e^{-\frac{\tau_\omega}{\sigma}},$$

і тантильне рівняння /7/

$$e^{\frac{\tau_\omega}{\sigma}} - 1 = \omega$$

має розв"язок

$$\tau_\omega = \sigma \ln(1+\omega). \qquad /9/$$

При $\nu = 2$, тобто у випадку напрацювання Релея, обчислення виразів /4/ і /5/ зводиться до знаходження вартості відповідного інтеграла стандартної нормальної випадкової змінної або інтеграла похибок. Наприклад, для деяких ω тантилі τ_ω і відповідні їм сподівані залишкові напрацювання $S_2(\omega)$ та $S_2(\omega)/E\xi$ при σ = 10000 і ν = 2 подано нижче:

ω	τ_ω	$S_2(\omega)$	$\frac{S_2(\omega)}{E\xi}$, %
1/9	889	7976	90
1/4	1791	7090	80
1/3	2253	6735	75
1/2	2961	6026	67
1	4769	4431	50
2	6900	3013	33
3	8134	2233	25
4	9062	1772	20
9	11631	886	10

Зокрема, напрацювання за час 4769 таке ж, як і сподіване залишкове напрацювання після моменту 4769.

Зауважимо, що поняття тантилю, визначене рівнянням /2/, переноситься на варіаційний ряд. Справді, нехай

$$t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n \qquad /10/$$

варіаційний ряд незалежних спостережень над абсолютно неперервною додатною випадковою змінною ξ, що має обмежене математичне сподівання. Емпіричний аналог надійності $R(t)$, що фігурує у формулі /2/, згідно з літературою [2], задається виразом

$$\hat{R}(t) = 1 - \frac{0{,}7}{n+0{,}4}\,\frac{t}{t_1}, \quad 0 \le t \le t_1,$$

$$\hat{R}(t) = \frac{n+0{,}7-j}{n+0{,}4} - \frac{1}{n+0{,}4}\,\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \quad t_j < t \le t_{j+1}, \quad (j=1,\ldots,n-1). \qquad /11/$$

Площа, обмежена графіком функції /11/, складається з n суміжних трапецій. Площа S_k однієї трапеції дорівнює

$$S_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}\,(t_{k+1} - t_k), \quad (k=0,1,\ldots,n-1).$$

де

$$a_K = \frac{n+0{,}7-K}{n+0{,}4}, \ (K=1, \ldots, n-1), \ a_0=1, \ t_0=0.$$

Тантилем τ_ω порядку ω варіаційного ряду /10/ назвемо елемент t_j, який задовольняє систему нерівностей

$$\sum_{K=0}^{j-2} S_K < \omega \sum_{K=j-1}^{n-1} S_K, \quad \sum_{K=0}^{j-1} S_K \geq \omega \sum_{K=j}^{n-1} S_K, \quad \omega > 0. \qquad /12/$$

Після спрощення система нерівностей /12/ набуває вигляду

$$(t_1+\ldots+t_{j-1})+(n-j+1+0{,}2)t_{j-1} < \omega\{[(t_j-t_{j-1})+\ldots+(t_n-t_{j-1})]+0{,}2(t_n-t_{j-1})\},$$

$$(t_1+\ldots+t_j)+(n-j+0{,}2)t_j \geq \omega\{[(t_{j+1}-t_j)+\ldots+(t_n-t_j)]+0{,}2(t_n-t_j)\}, \ \omega>0. \qquad /13/$$

Знехтувавши у нерівності /13/ доданками з коефіцієнтом 0,2, дістанемо систему нерівностей з праці [3]

$$\begin{cases} (t_1+\ldots+t_{j-1})+(n-j+1)t_{j-1} < \omega[(t_j-t_{j-1})+\ldots+(t_n-t_{j-1})], \\ (t_1+\ldots+t_j)+(n-j)t_j \geq \omega[(t_{j+1}-t_j)+\ldots+(t_n-t_j)], \ \omega>0. \end{cases} \qquad /14/$$

Звідси $\tau_\omega = t_j$. Зокрема, якщо варіаційний ряд /10/ представляє напрацювання до відмови n однотипних технічних одиниць і якщо $\tau_1 = t_j$, то дістанемо тотожність

$$[(t_1+\ldots+t_j)+(n-j)t_j]+[(t_{j+1}-t_j)+\ldots+(t_n-t_j)] = t_1+\ldots+t_n. \qquad /15/$$

Тотожність /15/ вказує на те, що повне напрацювання n однотипних технічних одиниць $S = t_1+\ldots+t_n$ складається з $S_1(1)=[(t_1+\ldots+t_j)+(n-j)t_j]$ – сумарного напрацювання за час t_j та $S_2(1)=[(t_{j+1}-t_j)+\ldots+(t_n-t_j)]$ – залишкового напрацювання після моменту t_j. Тотожність /15/, поділена сторонами на $t_1+\ldots+t_n$, виражає відповідне напрацювання в процентах.

Приклад. Знайти медіанний тантиль варіаційного ряду
21 37 51 64 77 90 103 118 134 152 176 205 256

Тотожність /15/ для даного варіаційного ряду набуває вигляду

$$[(t_1+\ldots+t_4)+9t_4]+[(t_5-t_4)+\ldots+(t_{13}-t_4)]=t_1+\ldots+t_{13},$$

тобто 749 + 735 = 1484. Отже, медіанний тантиль $\tau_1 = t_4 = 64$. Сумарне напрацювання за час $t = 64$ наближено таке ж, як і залишкове напрацювання після моменту $t = 64$.

1. Мардия К., Земроч П. Таблицы F-распределений. М., 1984. 2. Квіт І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. 3. Квіт І.Д. Тантиль // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.31. С.33-35.

Стаття надійшла до редколегії 21.12.88

УДК 519.21

Р.Т.Мисак

ЗНАХОДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ МАТРИЦІ-РЕГУЛЯРИЗАТОРА ОЦІНКИ РОЗВ"ЯЗКУ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Найбільш розповсюдженою моделлю обробки даних результатів спостережень є лінійна модель

$$\vec{y}=X\vec{c}+\vec{\varepsilon}, \qquad /1/$$

де $\vec{y}$ – n-мірний вектор спостережень, $X=(x_{ij}),\ j=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n}$ – задана матриця; $\vec{\varepsilon}$ – n-мірний випадковий вектор похибок, $M\vec{\varepsilon}=0,\ M\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}'=R$. Крім того, нехай невідомий m-мірний вектор $\vec{c}$ задовольняє нерівність

$$(Q_1\vec{c},\vec{c})<\gamma_1,$$

де Q_1 – додатно визначена матриця розміру $m\times m,\ 0<\gamma_1<\infty$. Надалі будемо вважати, що розмірності векторів і матриць є такими, при яких мають місце всі операції матричної алгебри.

Але в деяких реальних задачах велику складність становить проблема домогтися того, щоб випадковий вектор $\vec{\varepsilon}$ задовольняв накладені на нього умови або визначення коваріаційної матри-