Приклад. Знайти медіанний тантиль варіаційного ряду
21 37 51 64 77 90 103 118 134 152 176 205 256

Тотожність /15/ для даного варіаційного ряду набуває вигляду

$$[(t_1+\ldots+t_4)+9t_4]+[(t_5-t_4)+\ldots+(t_{13}-t_4)]=t_1+\ldots+t_{13},$$

тобто 749 + 735 = 1484. Отже, медіанний тантиль $\tau_1 = t_4 = 64$. Сумарне напрацювання за час $t = 64$ наближено таке ж, як і залишкове напрацювання після моменту $t = 64$.

1. Мардия К., Земроч П. Таблицы F-распределений. М., 1984. 2. Квіт І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. 3. Квіт І.Д. Тантиль // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.31. С.33-35.

Стаття надійшла до редколегії 21.12.88

УДК 519.21

Р.Т.Мисак

ЗНАХОДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ МАТРИЦІ-РЕГУЛЯРИЗАТОРА ОЦІНКИ РОЗВ"ЯЗКУ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Найбільш розповсюдженою моделлю обробки даних результатів спостережень є лінійна модель

$$\vec{y}=X\vec{c}+\vec{\varepsilon}, \qquad /1/$$

де $\vec{y}$ - n-мірний вектор спостережень, $X=(x_{ij}),\ j=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n}$ - задана матриця; $\vec{\varepsilon}$ - n-мірний випадковий вектор похибок, $M\vec{\varepsilon}=0,\ M\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}'=R$. Крім того, нехай невідомий m-мірний вектор $\vec{c}$ задовольняє нерівність

$$(Q_1\vec{c},\vec{c})<\gamma_1,$$

де Q_1 - додатно визначена матриця розміру $m\times m,\ 0<\gamma_1<\infty$. Надалі будемо вважати,що розмірності векторів і матриць є такими, при яких мають місце всі операції матричної алгебри.

Але в деяких реальних задачах велику складність становить проблема домогтися того, щоб випадковий вектор $\vec{\varepsilon}$ задовольняв накладені на нього умови або визначення коваріаційної матрині R . Тому будемо вважати, що $\vec{\varepsilon}$ обмежений і належить деякій області Ω_γ евклідового простору.

Припустимо, що невідомий вектор $\vec{c}$ і вектор похибок $\vec{\varepsilon}$ задовольняють умову

$$(Q_1\vec{c},\vec{c})+(Q_2\vec{\varepsilon},\vec{\varepsilon})\leq\gamma, \qquad /2/$$

де Q_1, Q_2 – додатно визначені матриці. Позначимо через L множину додатно визначених дійсних симетричних матриць, R_1 – множину дійсних матриць, R_2 – множину дійсних векторів відповідних розмірностей; $L\subset R_1$.

Розглянемо регуляризовану оцінку $\vec{c}$ методу найменших квадратів у випадку поганої обумовленості системи /1/

$$\tilde{\vec{c}}=(A+X'X)^{-1}X'\vec{y}, \qquad /3/$$

де додатно визначена симетрична матриця-регуляризатор A така, що $A+X'X>0$ і мінімізує величину $\|\tilde{\vec{c}}-\vec{c}\|^2$, $\|\cdot\|=(\cdot,\cdot)^{1/2}$.

<u>Теорема.</u> Якщо Q невироджена матриця, де

$$Q=\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix},$$

то

$$\min_{A\in L}\ \max_{\vec{\varepsilon},\vec{c}:(Q_1\vec{c},\vec{c})+(Q_2\vec{\varepsilon},\vec{\varepsilon})\leq\gamma}\|\tilde{\vec{c}}-\vec{c}\|^2=\gamma\lambda_1\{\hat{B}Q^{-1}\hat{B}'\}, \qquad /4/$$

$$\hat{B}=[(\hat{A}+X'X)^{-1}\hat{A},-(\hat{A}+X'X)^{-1}X'],\quad Q^{-1}=\frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix}\tilde{Q}_1 & 0\\ 0 & \tilde{Q}_2\end{pmatrix};\quad Q_1,Q_2\in R_1$$

де λ_1 – максимальне власне число матриці $\hat{B}Q^{-1}\hat{B}'$.
Якщо власне число λ_1 однократне для всіх $\hat{A}\in G$, де G – множина розв"язків рівняння /4/, то його розв"язки є розв"язками рівняння

$$(X'X\tilde{Q}_1\hat{A}+X'\tilde{Q}_2X)(\hat{A}+X'X)^{-1}\vec{e}_1\vec{e}_1'=0, \qquad /5/$$

де $\vec{e}_1$ – власний вектор, що відповідає власному числу λ_1 .

<u>Доведення.</u> Будемо шукати оцінку невідомого вектора $\vec{c}$ у вигляді лінійного перетворення $\vec{y}$:

$$\hat{\vec{c}}=T\vec{y}+\vec{t}.$$

Розглянемо мінімаксну задачу

$$\min_{T\in R_1, \vec{t}\in R_2} \max_{\vec{c},\vec{\varepsilon}:(Q_1\vec{c},\vec{c})+(Q_2\vec{\varepsilon},\vec{\varepsilon})\le\gamma} \|\vec{c}-T\vec{y}-\vec{t}\,\|^2 =$$

$$=\min_{T\in R_1, \vec{t}\in R_2} \max_{\vec{c},\vec{\varepsilon}:(Q_1\vec{c},\vec{c})+(Q_2\vec{\varepsilon},\vec{\varepsilon})\le\gamma} \|(I-TX)\vec{c}-T\vec{\varepsilon}-\vec{t}\,\|^2 .$$

Введемо матриці B, Q і вектор $\vec{\xi}$ таким чином:

$$B=[(I-TX),-T],$$

$$\vec{\xi}=\begin{pmatrix}\vec{c}\\ \vec{\varepsilon}\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}.$$

Тоді отримаємо

$$\min_{T\in R_1, \vec{t}\in R_2} \max_{\vec{\xi}:(Q\vec{\xi},\vec{\xi})\le\gamma} \|B\vec{\xi}-\vec{t}\,\|^2 .$$

Можна показати, що мінімум по $\vec{t}$ досягається при $\hat{\vec{t}}=0$.
Дійсно,

$$\max_{\vec{\xi}:(Q\vec{\xi},\vec{\xi})\le\gamma} \|B\vec{\xi}-\vec{t}\,\|^2=(B\vec{\xi},B\vec{\xi})+2|(B\vec{\xi},\vec{t})|+$$

$$+(\vec{t},\vec{t})\ge\max_{\vec{\xi}:(Q\vec{\xi},\vec{\xi})\le\gamma}\|B\vec{\xi}\,\|^2,$$

оскільки максимум досягається при від"ємних $\vec{\xi}$.
Таким чином, оцінка невідомого вектора набуде вигляду

$$\hat{\vec{c}}=\hat{T}\vec{y}.$$

Як відомо, оцінка, отримана за регуляризованим методом найменших квадратів, визначається формулою

$$\tilde{\vec{c}}=(A+X'X)^{-1}X'\vec{y}.$$

Приймемо $\hat{T}=(\hat{A}+X'X)^{-1}X'$ і розглянемо задачу

$$\min_{A\in L}\max_{\vec{\xi}:(Q\vec{\xi},\vec{\xi})\le\gamma}\|B\vec{\xi}\,\|^2=\min_{A\in L}\max_{\vec{\xi}:(Q\vec{\xi},\vec{\xi})\le\gamma}(B'B\vec{\xi},\vec{\xi}),$$

де B має вигляд

$$B=[(I-(A+X'X)^{-1}X'X,-(A+X'X)^{-1}X']=[(A+X'X)^{-1}A,-(A+X'X)^{-1}X'].$$

Як відомо,

$$\max_{\vec{\xi}:(Q\vec{\xi},\vec{\xi})\le\gamma}(B'B\vec{\xi},\vec{\xi})=\gamma\lambda_1\{Q^{-1/2}B'BQ^{-1/2}\}.$$

Знайдемо тепер рівняння для шуканої матриці $\hat{A}$. У випадку однократності власного числа $\lambda_1\{BQ^{-1}B'\}$ отримаємо, що $\hat{A}$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left(\gamma\lambda_1\{B(\hat{A}+\beta\Theta)Q^{-1}B'(\hat{A}+\beta\Theta)\}\right)_{\beta=0}=0,$$

де Θ – довільна матриця, β – дійсний параметр. При цьому було враховано, що $\lambda_1\{BQ^{-1}B'\}=\lambda_1\{Q^{-1/2}B'BQ^{-1/2}\}$.

Враховуючи формули збурень для власних чисел і враховуючи, що

$$Q^{-1}=\frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix}\tilde{Q}_1 & 0\\ 0 & \tilde{Q}_2\end{pmatrix},$$

отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\gamma\lambda_1\Big\{\frac{1}{\det Q}\Big[(\hat{A}+\beta\Theta+x'x)^{-1}(\hat{A}+\beta\Theta)\tilde{Q}_1(\hat{A}+\beta\Theta+x'x)^{-1}-$$

$$-(\hat{A}+\beta\Theta+x'x)^{-1}x'\tilde{Q}_2x(\hat{A}+\beta\Theta+x'x)^{-1}\Big]\Big\}\Big)_{\beta=0}=0.$$

Взявши похідну по напрямку від власного числа λ_1, отримаємо

$$\gamma\frac{1}{\det Q}\Big(\Big[-(\hat{A}+x'x)^{-1}\Theta(\hat{A}+x'x)^{-1}\hat{A}\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}-(\hat{A}+x'x)^{-1}\hat{A}\tilde{Q}_1\times$$

$$\times\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}\Theta(\hat{A}+x'x)^{-1}+(\hat{A}+x'x)^{-1}\Theta\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}+(\hat{A}+x'x)^{-1}\times$$

$$\times\hat{A}\tilde{Q}_1\Theta(\hat{A}+x'x)^{-1}+(\hat{A}+x'x)^{-1}\Theta(\hat{A}+x'x)^{-1}x'\tilde{Q}_2x(\hat{A}+x'x)^{-1}+$$

$$+(\hat{A}+x'x)^{-1}x'\tilde{Q}_2x(\hat{A}+x'x)^{-1}\Theta(\hat{A}+x'x)^{-1}\Big]\vec{e}_1,\vec{e}_1\Big)=0,$$

де $\vec{e}_1$ – власний вектор, що відповідає власному числу λ_1.

$$Sp\,[-(\hat{A}+x'x)^{-1}\Theta(\hat{A}+x'x)^{-1}\hat{A}\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}+(\hat{A}+x'x)^{-1}\times$$

$$\times\Theta\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}+(\hat{A}+x'x)^{-1}\Theta(\hat{A}+x'x)^{-1}x'\tilde{Q}_2x(\hat{A}+x'x)^{-1}]\vec{e}_1\vec{e}_1'=0.$$

Звідси

$$Sp\,\Theta\,[-(\hat{A}+x'x)^{-1}\hat{A}\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}\vec{e}_1\vec{e}_1'(\hat{A}+x'x)^{-1}+\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}\times$$

$$\times\vec{e}_1\vec{e}_1'(\hat{A}+x'x)^{-1}+(\hat{A}+x'x)^{-1}x'\tilde{Q}_2x(\hat{A}+x'x)^{-1}\vec{e}_1\vec{e}_1'(\hat{A}+x'x)^{-1}]=0.$$

Враховуючи довільність матриці Θ, отримаємо

$$-\hat{A}\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}\vec{e}_1\vec{e}_1'+(\hat{A}+x'x)\tilde{Q}_1\hat{A}(\hat{A}+x'x)^{-1}\vec{e}_1\vec{e}_1'+$$

$$+x'\tilde{Q}_2x(\hat{A}+x'x)^{-1}\vec{e}_1\vec{e}_1'=0;$$

$$(x'x\tilde{Q}_1\hat{A}+x'\tilde{Q}_2x)(\hat{A}+x'x)^{-1}\vec{e}_1\vec{e}_1'=0.$$

Ми отримали спектральне рівняння для матриці-регуляризатора $\hat{A}$, яке в загальному випадку не має розв"язків у явному вигляді.

1. Г и р к о В.Л. Многомерный статистический анализ. К., 1988. 2. Г и р к о В.Л., М ы с а к Р.Т., О н ш а Ю.М. Уравнение Риккати для матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов // Вычисл. и прикл. математика. 1988. Вып. 64. С.135-137. 3. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 06.06.89

УДК 519.21

І.Д.Квіт, Є.В.Москвяк

НЕПОВНА ЗРІЗАНА ВИБІРКА

Розглянемо незалежні напрацювання n однотипних пристроїв упродовж деякого часу, наприклад, протягом гарантійного періоду. Нехай за цей час одержано повний запис напрацювань до відмови F і частковий запис напрацювань до зупинки S. Позначимо через n_F кількість відмов, через n_S - кількість зареєстрованих зупинок, а через n_L - кількість втрачених зупинок; $n_F + n_S + n_L = n$. На основі даної неповної зрізаної вибірки оцінимо перший дециль, тобто напрацювання, більше від якого витримує 90 % пристроїв.

Припустимо, що розподіл n_L втрачених зупинок такий самий, як розподіл n_S зареєстрованих зупинок. Перерозподілимо n_L неспостережених зупинок рівномірно між n_S спостереженими значеннями зупинок. Тому кожне спостережене значення зупинки має додаткову масу n_L / n_S разом з її власною спостереженою масою 1. Отже, кожна з n_F відмов неповної зрізаної вибірки має масу 1, а кожна з n_S зареєстрованих зупинок - масу $1 + n_L / n_S$.

Варіаційний ряд даної неповної зрізаної вибірки напрацювань запишемо у вигляді

$$t(\bar{1}, n) \leq \ldots \leq t(\bar{j}, n) \leq \ldots \leq t(\overline{n_F + n_S}, n), \qquad /1/$$

де j-е за величиною $t(j, n)$ позначає напрацювання до відмови F або зареєстрованої зупинки S. Якщо $t(\bar{j}, n)$