

ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МОДЕЛІ І МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК

33
1990



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Виходить з 1965 р

ВИПУСК 33

МОДЕЛІ І МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Львів
видавництво при Львівському
державному університеті
1990

УДК 518

У Віснику містяться статті з числових методів розв'язання рівнянь математичної фізики і задач оптимізації.

Для наукових працівників, викладачів та студентів старших курсів.

Бібліогр.: в кінці статей.

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения уравнений математической физики и задач оптимизации.

Для научных работников, преподавателей, и студентов старших курсов.

Библиогр.: в конце статей.

Редакційна колегія: проф., д-р фіз.-мат. наук Я.Г.С а в у -
л а /відп. ред./, доц., канд. фіз.-мат. наук М.Я.Б а р т і ш ,
доц., канд. фіз.-мат. наук Й.В.Я ю д к е в и ч , проф., д-р
техн. наук Н.П.Ф л е й ш м а н , доц., канд. фіз.-мат. наук
Ю.М.Щ е р б и н а /відп. секр./.

Адреса редколегії:

290000 Львів, вул. Університетська, 1.

Університет, кафедра прикладної математики

Редакція науково-технічної та природничої
літератури

Редактор Л.І.С і д л о в и ч

В І602110000-003
М225/04/-90

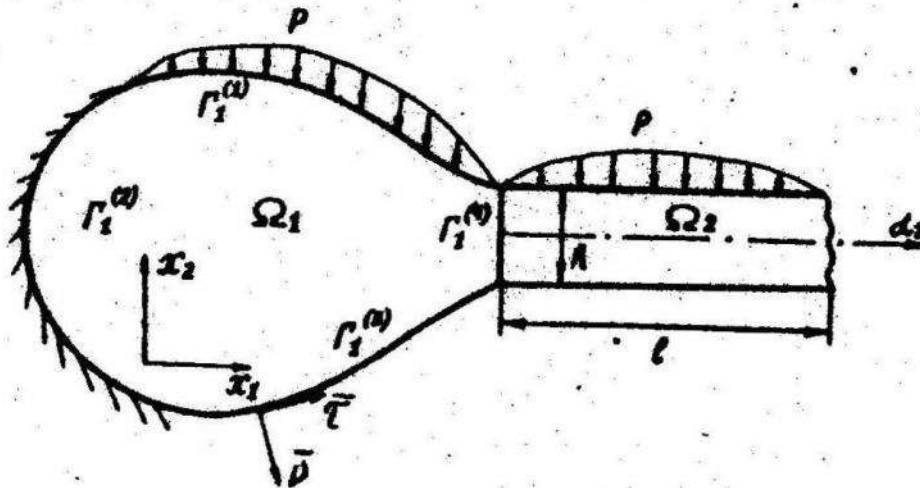
Замовне

© Львівський державний
університет, 1990

Я.Г.Савула, А.В.Дубовик, Н.М.Паук

КРАЙОВА І ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧІ ЗІ ШТРАФОМ
КОМБІНОВАНОЇ МОДЕЛІ ПЛОСКОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про плоску деформацію пружного однорідного тіла, поперечний переріз якого займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ /див. рисунок/. Припустимо, що $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 - двовимірна область з ліпшицевою границею [5] $\Gamma = \bigcup \Gamma_i^{(n)}$, Ω_2 - область прямокутної форми $\Omega_2 = \{x_1, x_2: 0 \leq x_1 \leq l, -\frac{h}{2} \leq x_2 \leq \frac{h}{2}\}$. Припустимо також, що ділянка границі $\Gamma_1^{(n)}$ є прямолінійною і перпендикулярною до лінії $x_2 = \text{const}$.



Нехай деформаційний стан тіла, що займає область Ω , описується комбінованою математичною моделлю [2], співвідношення якої в області Ω_1 є рівняннями плоскої задачі теорії пружності в переміщеннях [1]

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta u_i^{(1)} + p_i^{(1)} = 0, x_1, x_2 \in \Omega_1, \quad (1.1)$$

а в області Ω_2 - рівняннями теорії пластин Тимошенка [4]

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{d^2 u_1^{(2)}}{d\alpha_1^2} + p_1^{(2)} = 0, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq l,$$

$$\frac{Ek'h}{2(1+\nu)} \frac{d}{d\alpha_1} \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} \right) + p_n^{(2)} = 0,$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 \gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1^2} - \frac{EK'h}{2(1+\nu)} \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{dW^{(2)}}{d\alpha_1} \right) + m_1^{(2)} = 0. \quad /1.2/$$

Тут $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$ - переміщення точок тіла в декартовій системі координат x_1, x_2 ; u_1, W - переміщення точок серединної площини $\alpha_2 = 0$ в напрямку осей α_1 та α_2 відповідно; $\gamma_1^{(2)}$ - кут повороту нормалі до серединної площини; $\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}$ - густини масових сил, прикладених до частини тіла, що займає область Ω_1 ; $\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)}, m_1^{(2)}$ - густини приведених зовнішніх сил і моменту, які виражаються через густину масових та поверхневих сил [4]; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; K' - коефіцієнт зсуву ($K' = 5/6$); $\theta = \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i}$ /по індексах, що повторюються, відбувається підсумовування/. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Вважатимемо заданими граничні умови.

На межі області Ω_1 :

$$\sigma_{ij}^{(1)} \nu_j = \rho_j^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \tau_j = \rho_i^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(1)},$$

$$u_i^{(1)} \nu_i = 0, \quad u_i^{(1)} \tau_i = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)},$$

$$u_i^{(1)} \nu_i = 0, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \nu_j \tau_i = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(3)}, \quad /1.3/$$

де ν_i, τ_i - напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ та дотичної $\vec{\tau}$ /див. рисунок/ / $\tau_1 = -\nu_2, \tau_2 = \nu_1$ /;

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij}^{(1)},$$

$$\epsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right);$$

δ_{ij} - символ Кронекера.

При $\alpha_1 = l$ /умови одного з типів/:

жорстке заземлення $u_1^{(2)} = W^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = 0$;

шарнірно спертій край $u_1^{(2)} = W^{(2)} = 0, M_1^{(2)} = 0$;

вільний край $Q_1^{(2)} = M_1^{(2)} = T_1^{(2)} = 0$;

де $Q_1^{(2)} = \eta \left(\gamma_1^{(2)} + \frac{dW^{(2)}}{d\alpha_1} \right), M_1^{(2)} = \xi \frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1}, T_1^{(2)} = \beta \frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1}, \eta = \frac{K'hE}{2(1+\nu)},$ /1.4/

$$\xi = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta = \frac{Eh}{1-\nu^2}.$$

На ділянці границі $\Gamma_1^{(4)} = \{ \alpha_1 = 0, -\frac{h}{2} \leq \alpha_2 \leq \frac{h}{2} \}$:

$$u_1^{(2)} \tau_i = W^{(2)}(0), \quad u_i^{(2)} \nu_i = u_1^{(2)}(0) + \gamma_1^{(2)}(0) \alpha_2, \quad /1.5/$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \phi_{ij}^{(n)} v_i v_j d\alpha_2 = T_i^{(n)}(0), \quad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \phi_{ij}^{(n)} v_i v_j d\alpha_2 = M_i^{(n)}(0),$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \phi_{ij}^{(n)} v_i \tau_j d\alpha_2 = Q_i^{(n)}(0).$$

/1.6/

Отже, комбінована математична модель плоскої задачі теорії пружності є крайовою задачею для системи рівнянь /1.1/, /1.2/ з граничними умовами /1.3/-1.6/.

2. Варіаційна постановка зі штрафом. Для задачі /1.1/-/1.6/ запишемо варіаційну постановку зі штрафом

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \min, \quad u_\varepsilon \in V, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0, \quad /2.1/$$

або поки що формально еквівалентну їй постановку

$$a_1(u_\varepsilon^{(n)}, \tilde{u}^{(n)}) + a_2(u_\varepsilon^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}) + \frac{1}{\varepsilon} a_3(u_\varepsilon, \tilde{u}) = (p, \tilde{u}),$$

$$u_\varepsilon \in V, \quad \forall \tilde{u} \in V, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0. \quad /2.2/$$

Тут

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} a_1(u_\varepsilon^{(n)}, u_\varepsilon^{(n)}) + \frac{1}{2} a_2(u_\varepsilon^{(2)}, u_\varepsilon^{(2)}) + \frac{1}{2\varepsilon} a_3(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - (p, u_\varepsilon); \quad /2.3/$$

$$a_1(u^{(n)}, \tilde{u}^{(n)}) = \int_{\Omega} [\lambda \theta(u^{(n)}) \theta(\tilde{u}^{(n)}) + 2\mu \ell_y(u^{(n)}) \ell_y(\tilde{u}^{(n)})] d\Omega; \quad /2.4/$$

$$a_2(u^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}) = \int_{\Omega} \left[\beta \frac{du^{(2)}}{d\alpha_1} \frac{d\tilde{u}^{(2)}}{d\alpha_1} + \eta \left(\frac{dW^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma^{(2)} \right) \left(\frac{d\tilde{W}^{(2)}}{d\alpha_1} + \tilde{\gamma}^{(2)} \right) + \right. \\ \left. + \xi \frac{d\gamma^{(2)}}{d\alpha_1} \frac{d\tilde{\gamma}^{(2)}}{d\alpha_1} \right] d\alpha_1; \quad /2.5/$$

$$a_3(u, \tilde{u}) = \int_{\Omega} \left\{ (u_i^{(n)} \tau_i - W^{(n)}(0)) (\tilde{u}_i^{(n)} \tau_i - \tilde{W}^{(n)}(0)) + \right. \\ \left. + (u_i^{(n)} v_i - u_i^{(2)}(0) - \gamma_i^{(2)}(0) \alpha_2) (\tilde{u}_i^{(n)} v_i - \tilde{u}_i^{(2)}(0) - \tilde{\gamma}_i^{(2)}(0) \alpha_2) \right\} d\alpha_2; \quad /2.6/$$

$$(p, u) = \int_{\Omega} (u_1^{(n)} p_1 + u_2^{(n)} p_2) d\Omega + \int_{\Omega} (u_1^{(2)} p_1 + W p_2 + \gamma_1^{(2)} m_1) d\alpha_2; \quad /2.7/$$

$$V = \{ u = (u^{(n)}, u^{(2)}); u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}), u^{(2)} = (u_1^{(2)}, W, \gamma_1^{(2)}),$$

$$u^{(n)} \in [W_2^{(n)}(\Omega)], u^{(2)} \in [W_2^{(2)}(]0, l[)],$$

$$u_i^{(n)} v_i = 0, \quad u_i^{(2)} \tau_i = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)},$$

$$u_i^{(n)} v_i = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)}, \quad u_1^{(2)}(l) = W(l) = \gamma_1^{(2)}(l) = 0 \}. \quad /2.8/$$

Зауважимо, що в формулі /2.8/ крайова умова в точці $\alpha_2 = l$ відповідає умові жорсткого заземлення. У випадку іншого виду

закріплення краю $\alpha_2 = \ell$ по умову слід замінити відповідною головною крайовою умовою.

Варіаційні задачі /2.1/, /2.2/ вільні від необхідності задоволення граничних умов спряження /1.5/. Їх потрібно задовольняти при відсутності у формулі /2.1/ штрафного доданку з множиною $\frac{1}{\varepsilon}$.

Можна показати, що задача /2.1/ про мінімум функціоналу на множині V еквівалентна крайовій задачі /1.1/, /1.2/ з умовами /1.3/, /1.4/ та

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} (u_i^{(n)} v_i - u_i^{(2)}(0) - \gamma_i^{(2)}(0) \alpha_2) + G_{ij}^{(n)} v_i v_j &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} (u_i^{(n)} \tau_i - W^{(2)}(0)) + G_{ij}^{(n)} \tau_i \tau_j &= 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\ell} (u_i^{(n)} v_i - u_i^{(2)}(0) - \gamma_i^{(2)}(0) \alpha_2) d\alpha_2 &= T_i^{(2)}(0), \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\ell} (u_i^{(n)} v_i - u_i^{(2)}(0) - \gamma_i^{(2)}(0) \alpha_2) \alpha_2 d\alpha_2 &= M_i^{(2)}(0), \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\ell} (u_i^{(n)} \tau_i - W^{(2)}(0)) d\alpha_2 &= Q_i^{(2)}(0), \quad \text{на } \Gamma_i^{(4)} \end{aligned} \quad /2.9/$$

З умов /2.9/ випливає, що виконується співвідношення /1.6/ і при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} u_i^{(n)} v_i - u_i^{(2)}(0) - \gamma_i^{(2)}(0) \alpha_2 &\rightarrow 0, \\ u_i^{(n)} \tau_i - W^{(2)}(0) &\rightarrow 0, \quad \text{на } \Gamma_i^{(4)} \end{aligned} \quad /2.10/$$

3. Дослідження постановки крайової задачі зі штрафом. Для спрощення викладок припустимо, що $\Gamma_i^{(2)} = \emptyset$, при $\alpha_2 = \ell$ виконуються умови жорсткого заземлення /1.4/.

Розглянемо білінійну форму

$$a_\varepsilon(u, \tilde{u}) = a_1(u, \tilde{u}) + a_2(u, \tilde{u}) + \frac{1}{\varepsilon} a_3(u, \tilde{u}), \quad \varepsilon > 0, u, \tilde{u} \in V. \quad /3.1/$$

Має місце теорема.

Теорема 3.1. Білінійна форма $a_\varepsilon(u, u)$ задовольняє подвійну нерівність

$$m^2 \|u\|_{1,\Omega}^2 \leq a_\varepsilon(u, u) \leq M_\varepsilon^2 \|u\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall u \in V. \quad /3.2/$$

Тут

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^2 u_i^2 + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega + \int_0^\ell (u_1^2 + W^2 + \gamma_1^2 + (u_1^{(2)})^2 + (W^{(2)})^2 + (\gamma_1^{(2)})^2) d\alpha_2.$$

Доведення. Для отримання оцінки /3.2/ знизу використаємо той факт, що $a_3(u, u) \geq 0$ і, отже,

$$a_3(u, u) \geq a_1(u^{(n)}, u^{(n)}) + a_2(u^{(w)}, u^{(w)}). \quad /3.3/$$

Далі на основі властивості додатної визначеності пружного потенціалу, нерівностей Корна та Фрідрікса [3, 5] отримаємо

$$a_1(u^{(n)}, u^{(n)}) \geq C_1 \|u^{(n)}\|_{1, \Omega}^2, \quad C_1 > 0, \quad /3.4/$$

де $\|u^{(n)}\|_{1, \Omega}^2 = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^3 u_i^2 + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega$.

Використавши очевидну нерівність

$$2ab \geq -(\lambda a^2 + \frac{1}{\lambda} b^2), \quad \forall \lambda > 0$$

та нерівність Фрідрікса, знайдемо

$$a_2(u^{(w)}, u^{(w)}) \geq C_2 \|u^{(w)}\|_{1, \Omega}^2, \quad /3.5/$$

де $C_2 > 0$.

Із /3.3/, /3.4/, /3.5/ отримуємо ліву частину нерівності /3.2/.

Оцінимо зверху білінійну форму $a_3(u, u)$. Використовуючи очевидну нерівність $2ab \leq a^2 + b^2$, знаходимо

$$a_1(u^{(n)}, u^{(n)}) + a_2(u^{(w)}, u^{(w)}) \leq C_3 \|u\|_{1, \Omega}^2, \quad C_3 > 0. \quad /3.6/$$

Розглянемо окремо $a_3(u, u)$. Використавши ще ж очевидну нерівність, теорему про сліди та нерівності, що з неї випливають [5]

$$\int_{\Gamma} u_i^{(w)2} d\Gamma \leq C_4 \|u_i^{(w)}\|_{1, \Omega}^2, \quad C_4 > 0,$$

$$u_i^{(w)2}(0) \leq C_5 \|u_i^{(w)}\|_{1, \Omega}^2, \quad C_5 > 0,$$

отримаємо

$$a_3(u, u) \leq C_6 \|u\|_{1, \Omega}^2, \quad C_6 > 0. \quad /3.7/$$

Ця нерівність разом з /3.6/ приводить до нерівності

$$a_\varepsilon(u, u) \leq (C_3 + \frac{1}{\varepsilon} C_6) \|u\|_{1, \Omega}^2. \quad /3.8/$$

Отже, $M^2 = C_3 + \frac{1}{\varepsilon} C_6$.

Наслідок. З доведеної теореми /3.1/ випливає, оскільки $\|u\|_{1, \Omega} \geq \|u\|_{0, \Omega}$, то оператор комбінованої математичної моделі зі штрафом додатно визначений, тобто

$$a_\varepsilon(u, u) \geq m^2 \|u\|_{a, \Omega}^2, \\ \|u\|_{a, \Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 u_i^{(n)} d\Omega + \int_{\Gamma} (u_1^{(n)} + W^{(n)} + \gamma_1^{(n)}) d\Gamma.$$

Це означає, що існує єдиний узагальнений розв'язок цієї задачі, а також те, що варіаційні постановки /2.1/, /2.2/ еквівалентні.

Нехай $u^\varepsilon \in V$ - розв'язок задачі /1.1/, /1.2/ зі штрафом, а u^* - розв'язок цієї ж задачі без штрафу, тобто $u^* \in V^*$.

$$V^* = \{u = (u^{(1)}, u^{(2)}) : u^{(1)} \in [W_2^{(1)}], u^{(2)} \in [W_2^{(2)}] \cap [0, l[\Gamma]; \\ u_i^{(1)} \nu_i = 0, u_i^{(2)} \tau_i = 0, x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)}; u_1^{(2)}(0) = W^{(2)}(0) - \gamma_1^{(2)}(0) = 0; \\ u_i^{(1)} \tau_i = W^{(1)}(0), u_i^{(2)} \nu_i = u_i^{(1)}(0) + \gamma_i(0) \alpha_i \text{ на } \Gamma_1^{(1)}\}.$$

З огляду на /2.2/ маємо

$$a_1(u^{(1)\varepsilon}, \tilde{u}^{(1)}) + a_2(u^{(2)\varepsilon}, \tilde{u}^{(2)}) + \frac{1}{\varepsilon} a_3(u^\varepsilon, \tilde{u}) = (\rho, \tilde{u}), u^\varepsilon, \tilde{u} \in V. \quad /3.9/$$

$$a_1(u^{(1)*}, \tilde{u}^{(1)}) + a_2(u^{(2)*}, \tilde{u}^{(2)}) = (\rho, \tilde{u}), u^* \in V^*, \tilde{u} \in V. \quad /3.10/$$

Доведемо теорему.

Теорема 3.2. Нехай $e^\varepsilon = u^\varepsilon - u^*$. Послідовність u^ε збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до узагальненого розв'язку u^* , тобто

$$\|e^\varepsilon\|_{a, \Omega} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad /3.11/$$

Доведення. Обчислимо $a_\varepsilon(e^\varepsilon, \tilde{u})$, $\forall \tilde{u} \in V$. Врахувавши /3.9/, /3.10/, знайдемо

$$a_\varepsilon(e^\varepsilon, \tilde{u}) = (\rho, \tilde{u}) - a_1(u^{(1)*}, \tilde{u}^{(1)}) - a_2(u^{(2)*}, \tilde{u}^{(2)}). \quad /3.12/$$

Приймемо у /3.12/ $\tilde{u} = e^\varepsilon$. Отримаємо

$$a_\varepsilon(e^\varepsilon, e^\varepsilon) = (\rho, e^\varepsilon). \quad /3.13/$$

Замінімо в /3.13/ функцію ρ через переміщення з рівнянь /1.1/, /1.2/. Використавши формули Остроградського та інтегрування по частинах і враховуючи граничні умови /1.3/, /1.4/, представимо праву частину співвідношення /3.12/ у вигляді

$$(\rho, e^\varepsilon) = - \int_{\Gamma^{(1)}} [\sigma_{ij}^* \nu_i \nu_j (u_i^{(1)\varepsilon} \nu_i - u_i^{(2)\varepsilon}(0) - \alpha_2 \gamma_i(0)) + \\ + \sigma_{ij}^* \nu_i \tau_j (u_i^{(1)\varepsilon} \tau_i - W^{(2)\varepsilon}(0))] d\Gamma, \quad /3.14/$$

де через σ_{ij}^* позначені компоненти тензора напружень, що відповідають розв'язку u^* . Скористаємося далі нерівністю

$$-ab \leq 2\epsilon a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2, \quad \epsilon > 0$$

для перетворення правої частини рівності /3.14/. Знайдемо

$$\begin{aligned} (\rho, e^\epsilon) &\leq 2\epsilon \int_{\Gamma^{(u)}} [(\phi_{ij}^* \nu_i \nu_j)^2 + (\phi_{ij}^* \nu_i \tau_j)^2] d\Gamma + \\ &+ \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Gamma^{(u)}} (u_i^{(1)\epsilon} \nu_i - u_i^{(2)\epsilon} - a_2 \delta_i^{(2)\epsilon}(0))^2 + (u_i^{(1)\epsilon} \tau_i - w^{(2)\epsilon}(0))^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad /3.15/$$

Зауважимо, що для останнього доданку у формулі /3.15/ має місце рівність $\frac{1}{2\epsilon} a_2 (u, u^\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} a_2 (e^\epsilon, e^\epsilon)$. Врахувавши, крім цього, формулу /3.13/, отримаємо

$$\begin{aligned} a_1 (e^\epsilon, e^\epsilon) + a_2 (e^\epsilon, e^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} a_3 (e^\epsilon, e^\epsilon) &\leq \frac{1}{2\epsilon} a_3 (e^\epsilon, e^\epsilon) + \\ &+ 2\epsilon (\phi_{ij}^*, \phi_{ij}^*)_{0, \Gamma_1^{(u)}}, \end{aligned}$$

де $(\phi_{ij}^*, \phi_{ij}^*)_{0, \Gamma_1^{(u)}} = \int_{\Gamma^{(u)}} [(\phi_{ij}^* \nu_i \nu_j)^2 + (\phi_{ij}^* \nu_i \tau_j)^2] d\Gamma$.

Звідси випливає, що

$$a_\epsilon (e^\epsilon, e^\epsilon) \leq \epsilon (\phi_{ij}^*, \phi_{ij}^*)_{0, \Gamma_1^{(u)}}. \quad /3.16/$$

З /3.15/ та /3.16/ приходимо до оцінки

$$\|e^\epsilon\|_{1, \Omega}^2 \leq \frac{\epsilon}{m^e} (\phi_{ij}^*, \phi_{ij}^*)_{0, \Gamma_1^{(u)}}, \quad /3.17/$$

яка безпосередньо приводить до /3.11/.

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М., 1976. 2. Дубовик А.В., Дыяк И.И., Паук Н.М., Сагула Я.Г. Численное исследование комбинированной математической модели плоской задачи теории упругости. Львов, 1988. 42 с. Рукопись деп. в УкрНИИТИ № 2573-Ук88. 3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 4. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978. 5. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.89

Г.А.Шинкаренко

ПОСТАНОВКА ТА РОЗВ'ЯЗУВАНІСТЬ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ
ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

У сучасних електроакустичних пристроях широкого вжитку набули п'єзоелектричні перетворювачі енергії. Незважаючи на значні здобутки у розробці математичних моделей та методів розв'язування задач електропружності, багато запитів практики проектування таких приладів залишаються відкритими внаслідок зв'язності електричного та механічного полів, анізотропії матеріалу, складності форми п'єзоперетворювачів та умов їх контакту з зовнішніми фізико-механічними полями. Найменш вивченими моделями до цього часу є початково-крайові задачі електропружності.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай п'єзоелектрик займає обмежену зв'язну область Ω точок $x = (x_1, \dots, x_n)$ евклідового простору R^n з неперервною за Ліпшицем границею Γ і $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі Γ . Будемо припускати, що процеси в п'єзоелектрику задовольняють наступні гіпотези.

/1/ Електричне поле п'єзоелектрика безвихрове, тобто $\operatorname{rot} E = 0$, де $E = (E_1, \dots, E_n)$ – напруженість електричного поля. Таке припущення дозволяє, по-перше, ввести електричний потенціал за правилом

$$E_k = -p_{,k} \quad \text{в } \Omega \times (0, \tau] \quad /1.1/$$

і, по-друге, розділити систему рівнянь Максвелла на незалежні групи рівнянь для визначення електричної та магнітної складових поля. Нехтуючи останніми, що цілком припустимо в акустичному діапазоні коливань [2, 3, 4], запишемо рівняння для знаходження електричного поля п'єзоелектрика

$$D'_{k,k} + J_{k,k} = 0, \quad \text{в } \Omega \times (0, \tau]; \quad /1.2/$$

$$D_{k,k} = \rho_e \quad \text{в } \Omega \times (0, \tau], \quad /1.3/$$

де $D = (D_1, \dots, D_n)$, $J = (J_1, \dots, J_n)$, ρ_e – електрична індукція, струм провідності та густина зарядів відповідно. Тут і нижче по індексах, що повторюються, передбачається підсумовування від 1 до n , $f' = \partial f / \partial t$, $f'' = \partial^2 f / \partial t^2$, $f_{,k} = \partial f / \partial x_k$.

/II/ Пружні властивості п'єзоелектрика описуються рівняннями

$$\begin{cases} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \rho u_i'' - \sigma_{ji,j} = \rho f_i \end{cases} \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad /1.4/$$

де $u = (u_1, \dots, u_n)$, $\{\epsilon_{ij}\}$ та $\{\sigma_{ij}\}$ - вектор зміщень, симетричні тензори деформацій та напружень відповідно, ρ - густина маси, $f = (f_1, \dots, f_n)$ - вектор масових сил.

/III/ Процеси в п'єзоелектрику ізотермічні, причому характеризуються такими рівняннями стану:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k + a_{ijkl} \epsilon_{kl}' \\ D_k = e_{kij} \epsilon_{ij} + \epsilon_{km} E_m \\ J_k = z_{km} E_m \end{cases} \quad \text{в } \Omega \times [0, T] \quad /1.5/$$

Тут $\{c_{ijkl}\}$, $\{e_{kij}\}$, $\{a_{ijkl}\}$, $\{\epsilon_{km}\}$ та $\{z_{km}\}$ - тензори модулів пружності, п'єзоефекту, внутрішньої в'язкості, діелектричних проникливостей та провідності з наступними властивостями симетрії та еліптичності

$$\begin{cases} c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} \\ e_{kij} = e_{kji}, \quad \epsilon_{km} = \epsilon_{mk}, \quad z_{km} = z_{mk} \\ c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq c_0 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad c_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \in \mathbb{R} \\ a_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq a_0 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad a_0 = \text{const} > 0 \\ \epsilon_{km} v_k v_m \geq \epsilon_0 v_i v_i \quad \epsilon_0 = \text{const} > 0 \quad \forall v_i \in \mathbb{R} \\ z_{km} v_k v_m \geq z_0 v_i v_i \quad z_0 = \text{const} > 0 \end{cases} \quad /1.6/$$

/IV/ На поверхні п'єзоелектрика задано умови виду

$$\begin{cases} u = 0 \text{ на } \Gamma_u \times [0, T], \quad \sigma_{ij} \nu_j = q_i \text{ на } \Gamma_\sigma \times [0, T] \\ \rho = 0 \text{ на } \Gamma_\rho \times [0, T], \quad \{D_k' + J_k\} \nu_k = 0 \text{ на } \Gamma_D \times [0, T] \end{cases} \quad /1.7/$$

та умови на електроді, до якого підводиться струм

$$\begin{cases} \rho = \rho \quad \text{на } \Gamma_\rho \times [0, T] \\ \int_{\Gamma_\rho} \{D_k' + J_k\} \nu_k d\gamma = I \quad \text{на } [0, T]. \end{cases} \quad /1.8/$$

Тут $g = (g_1, \dots, g_n)$ та $I(t)$ - задані значення поверхневого навантаження та струму відповідно: $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_d, \Gamma_u \cap \Gamma_d = \emptyset,$

$$\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_D \cup \Gamma_J, \Gamma_p \cap \Gamma_D = \emptyset, \Gamma_p \cap \Gamma_J = \emptyset, \Gamma_D \cap \Gamma_J = \emptyset,$$

$$mes(\Gamma_u) > 0, \quad mes(\Gamma_p) > 0. \quad /1.9/$$

/у/ Початковий стан п'єзоелектрика характеризується рівняннями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = v_0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \in \Omega. \quad /1.10/$$

Зауваження 1.1. Припущення щодо ненульового струму провідності J в п'єзоелектриках цілком виправдане - фізичні експерименти реєструють слабкі струми /зумовлені наявністю вільних іонів/ у всіх діелектриках. Внаслідок цього необхідно припустити, що густина зарядів $\rho_e \neq 0$ і, отже, рівняння /1.3/ слід розглядати як визначення густини зарядів.

Зауваження 1.2. Умови /1.8/ записуються на одному з електродів п'єзоперетворювача, який є еквіпотенціальною поверхнею з невідомим значенням потенціалу $\rho(t)$. При $J=0$ ці умови наведені у праці [7]. Якщо цей електрод підключено до електричного кола, що характеризується провідністю Z та рушійною силою, яка розвиває напругу $U(t)$, то

$$I(t) = Z [\rho(t) - U(t)]. \quad /1.11/$$

Зауваження 1.3. Порівняно з моделями п'єзоефекту, що вивчались у працях [2-4], ми розглядаємо в'язкопружні матеріали з короткочасною пам'яттю.

Отже, сформулюємо задачу так:

$$\begin{cases} \text{знайти електричний потенціал } \rho(x, t) \text{ та вектор зміщень } \\ u(x, t) \text{ такі, що задовольняють рівняння /1.1/, /1.2/,} \\ \text{/1.4/, /1.5/, /1.7/, /1.8/ та /1.10/} \end{cases} \quad /1.12/$$

2. Варіаційна постановка задачі. Введемо простори

$$V = \{v \in H^1(\Omega) / v=0 \text{ на } \Gamma_u\}, \quad G = L^2(\Omega), \quad H = G^n;$$

$$Q = \{q \in H^1(\Omega) / q=0 \text{ на } \Gamma_p; q = \text{const на } \Gamma_J\}$$

і визначимо на них наступні білінійні та лінійні форми:

$$m(u, v) = \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx,$$

$$c(u, v) = \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \quad e(v, q) = \int_{\Omega} e_{kji} \varepsilon_{ji}(v) E_k(q) dx,$$

$$\varepsilon(p, q) = \int_{\Omega} \varepsilon_{km} E_k(p) E_m(q) dx, \quad z(p, q) = \int_{\Omega} z_{km} E_k(p) E_m(q) dx,$$

$$\langle \ell, v \rangle = m(f, v) + \int_{\Gamma} g_i v_i d\gamma, \quad \langle r, q \rangle = \int_{\Gamma} r q d\gamma. \quad /2.1/$$

Далі будемо вважати дані задачі /1.12/ такими, що

$$\begin{cases} f \in L^2(0, T; H), \quad g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)''), \quad u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \\ \ell \in L^2(0, T; R), \quad p_0 \in Q. \end{cases} \quad /2.2/$$

Зокрема, останні умови роблять справедливими вclusions

$$\ell \in L^2(0, T; V'), \quad r \in L^2(0, T; Q'), \quad /2.3/$$

де V' та Q' —спряжені простори до просторів V та Q відповідно.

Сформулюємо варіаційну задачу електров'язкопружності:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } u_0 \in V, v_0 \in H, p_0 \in Q, \ell \in L^2(0, T; V'), r \in L^2(0, T; Q'); \\ \text{знайти пару } \varphi = (u, p) \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; Q) \text{ таку, що} \\ m(u'(t), v) + a(u(t), v) + c(u(t), v) - e(v, p(t)) = \langle \ell(t), v \rangle, \\ \varepsilon(p'(t), q) + z(p(t), q) + e(u'(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ c(u(0) - u_0, v) = 0, \quad m(u'(0) - v_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \\ \varepsilon(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q. \end{array} \right. \quad /2.4/$$

Рівняння задачі /2.4/ виражають добре відомий принцип віртуальних робіт, а вибір початкових умов у цій задачі теж зумовлений енергетичними міркуваннями, смисл яких буде пояснено нижче.

3. Існування та єдиність розв'язку. З огляду на вирази /1.6/ та /1.9/ введемо норми

$$\|u\|_H = m^{\frac{1}{2}}(u, u)$$

$$\|u\|_V = c^{\frac{1}{2}}(u, u) \quad /\text{еквівалентна } \|u\|_A = a^{\frac{1}{2}}(u, u) \quad /$$

$$\|p\|_Q = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(p, p) \quad /\text{еквівалентна } \|p\|_Z = z^{\frac{1}{2}}(p, p) \quad /$$

на просторах H , V та Q відповідно, і зазначимо, що формули

$$|\varphi(t)|^2 = \|u'(t)\|_H^2, \quad \|\varphi(t)\|^2 = \|u(t)\|_V^2 + \|p(t)\|_Q^2,$$

$$\|\varphi(t)\| = \|u'(t)\|_H^2 + \|p(t)\|_Z^2$$

виражають собою подвоєні значення кінетичної енергії, потенціальної енергії та дисипації енергії розв'язку $\varphi = (u, p)$ задачі /2.4/ якщо останній існує/.

Теорема. Існує єдиний розв'язок $\varphi = (u, p) \in L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; Q)$ варіаційної задачі /2.4/ і при цьому справедливі вclusions

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), u' \in L^\infty(0, T; V'), p \in L^\infty(0, T; Q') \quad /3.1/$$

Доведення цієї теореми проведемо на основі напівдискретизації Гальоркіна [1]. Нехай V_h /відповідно Q_h / скінченновимірний підпростір у просторі V /відп. Q / такий, що V_h /відп. Q_h / щільно вкладений у V /відп. Q /. Пару $\varphi_h = (u_h, p_h) \in L^2(0, T; V_h \times Q_h)$ таку, що задовольняє рівняння задачі /2.4/ для будь-яких $v \in V_h$ та $q \in Q_h$, назовемо апроксимацією Гальоркіна розв'язку задачі /2.4/ у просторі $V_h \times Q_h$. Неважко пересвідчитися, що апроксимація Гальоркіна $\varphi_h(t) = (u_h(t), p_h(t))$ однозначно визначається на інтервалі $[0, T]$ для кожного фіксованого $h > 0$. Більше цього, справедливі рівняння /балансу енергії дискретизованої задачі/

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ | \varphi_h(t) |^2 + \| \varphi_h(t) \|^2 \} + \| \varphi_h(t) \|^2 = \\ & = \langle \ell(t), u_h'(t) \rangle + \langle r(t), p_h(t) \rangle \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall h > 0. \end{aligned} \quad /3.2/$$

Беручи до уваги оцінки вигляду

$$| \langle \ell(t), u_h'(t) \rangle | \leq K \| \ell(t) \|_{V'}, \| u_h'(t) \|_H \leq \frac{1}{2} \| u_h'(t) \|_H^2 + K \| \ell(t) \|_{V'}^2,$$

/тут і нижче одним символом K позначаються різні додатні константи, значення яких не залежить від величин, що нас цікавлять/, за допомогою енергетичного рівняння /3.2/ приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} & | \varphi_h(t) |^2 + \| \varphi_h(t) \|^2 + \int_0^t \| \varphi_h(\tau) \|^2 d\tau \leq \| u_0 \|_H^2 + \| u_0 \|_{V'}^2 + \| p_0 \|_{Q'}^2 + \\ & + K \int_0^t \{ \| \ell(\tau) \|_{V'}^2 + \| r(\tau) \|_{Q'}^2 \} d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall h > 0. \end{aligned} \quad /3.3/$$

Звідси випливає, що при $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{послідовність } u_h & \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; V), \\ \text{послідовність } p_h & \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; Q), \\ \text{послідовність } u_h' & \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V). \end{aligned} \quad /3.4/$$

І, отже, з послідовності (u_h, p_h) можна вибрати підпослідовність (u_Δ, p_Δ) таку, що

$$\begin{aligned} u_\Delta &\rightarrow u \quad \text{в } L^\infty(0,T;V) & *-\text{слабо,} \\ p_\Delta &\rightarrow p \quad \text{в } L^\infty(0,T;Q) & *-\text{слабо,} \\ u'_\Delta &\rightarrow u' \quad \text{в } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) & *-\text{слабо.} \end{aligned} \quad /3.5/$$

Покажемо, що побудована у виразі /3.5/ пара (u, p) є розв'язком варіаційної задачі /2.4/. При умові, що $V_h \subset V_\Delta$, $Q_h \subset Q_\Delta$, апроксимація Гальоркіна задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \int_0^t \{ -m(u'_\Delta, v) + a(u'_\Delta, v) + c(u_\Delta, v) - e(v, p_\Delta) - \langle \ell, v \rangle \} d\tau &= -m(u'_\Delta(0), v(0)) = \\ &= -m(v_0, v(0)) \quad \forall v \in W_h = \{ v \in C^1(0, t; V_h) \mid v(t) = 0 \} \quad \forall t \in (0, T] \\ \int_0^t \{ -\varepsilon(p'_\Delta, q) + z(p_\Delta, q) + e(u'_\Delta, q) - \langle r, q \rangle \} d\tau &= -\varepsilon(p'_\Delta(0), q(0)) = \\ &= -\varepsilon(p_0, q(0)) \quad \forall q \in R_h = \{ q \in C^1(0, t; Q_h) \mid q(t) = 0 \}. \end{aligned}$$

Переходячи в одержаних рівняннях до границі при $\Delta \rightarrow 0$, а пізніше виконувачи інтегрування по частинах, приходимо до висновку, що

$$\begin{aligned} \int_0^t \{ m(u'', v) + a(u', v) + c(u, v) - e(v, p) - \langle \ell, v \rangle \} d\tau &= m(u'(0), v(0)); \\ \int_0^t \{ \varepsilon(p', q) + z(p, q) + e(u', q) - \langle r, q \rangle \} d\tau &= \varepsilon(p(0), q(0)) \quad \forall v \in W_h \quad \forall q \in R_h. \end{aligned}$$

Звідси внаслідок довільності t та щільності V_h /відп. Q_h / у просторі V /відп. Q / випливає, що пара (u, p) задовольняє всі рівняння задачі /2.4/ за винятком початкової умови

$$c(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Але із /3.5/ безпосередньо випливає

$$c(u_0, v(0)) = c(u_\Delta(0), v(0)) = c(u(0), v(0)) \quad \forall v \in W_h.$$

що приводить до того, що пара (u, p) є розв'язком варіаційної задачі /2.4/.

Єдиність побудованого нами розв'язку (u, p) задачі /2.4/ є безпосереднім наслідком апіорних оцінок /3.3/, її легко встановити на основі міркувань від супротивного.

4. Висновки та заключні зауваження. Основний результат даної роботи – існування єдиного розв'язку варіаційної задачі електро-в'язкопружності /2.4/ – одержано при практично вживаних припущеннях відносно даних задачі, див. умови /2.2/. Більше того, фізично виправдане припущення щодо ненульового струму провідності та врахування в'язкості за Фойгтом дало змогу максимально спростити

доведення теореми. Зазначимо, що нехтування ефектами провідності та в'язкості п'єзоелектрика залишає схему доведення справедливою і для цього випадку, однак для одержання ключових оцінок виду /3.3/ необхідно скористатися нерівністю Гронуолла [1].

На додаток зазначимо, що при чисельному розв'язуванні задач електропружності використаний нами метод Гальоркіна може успішно застосовуватися для дискретизації задачі по просторових змінних. Особливості такого підходу з використанням методу скінченних елементів у задачах про усталені коливання п'єзоперетворювачів розглянуто в працях [5, 6].

Для повної дискретизації задачі процедуру Гальоркіна можна доповнити, наприклад, рекурентною схемою інтегрування в часі, що наведена у працях [8, 9].

1. Д и в о Г., Л и о н с Х.-Л. Неравенства в механике и физике. М., 1980. 2. Н о в а ц к и й В. Связанные поля в механике твердых тел // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Междунар. конгресса IUTAM. М., 1979. С.395-416. 3. Н о в а ц к и й В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М., 1986. 4. П а р - т о н В.З., К у д р я в ц е в Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М., 1988. 5. Т о - к а р ь А.Ю., Ш и н к а р е н к о Г.А. Исследование краевых задач электроупругости для акустических пьезопреобразователей. Львов, 1987. Рукопись деп. в УкрНИИТИ № 2581-Зк87. 6. Т о - к а р ь А.Ю., Ш и н к а р е н к о Г.А. Расчет динамических характеристик осесимметрических пьезопреобразователей // Динамические задачи механики сплошных сред: Тез. докл. регион. конф. Краснодар, 1988. Ч.1. С.147-150. 7. У л и т к о А.Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1975. С.90-99. 8. Ш и н к а р е н к о Г.А. Исследование вариационных задач пьезоэлектричества // Механика неоднородных структур: Тез. докл. П Всесоюз. конф. Львов, 1987. Т.1. С.296-297. 9. Ш и н к а р е н к о Г.А. Про одну модифікацію схеми Ньюмарка // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. 46-52.

Стаття надійшла до редакції 20.02.89

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У СКЛАДОВИХ ОБОЛОНКАХ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для отримання двовимірних рівнянь теплопровідності оболонок звичайно використовується гіпотеза про лінійний розподіл температури по товщині оболонки [1]. З точки зору алгоритмізації задачі теплопровідності зручніше використовувати тривимірні рівняння і знаходити їх розв'язок методом скінченних елементів з представленням шуканої функції по товщині у вигляді відрізка ряду по поліномах Міхліна. Особливо актуальним такий метод є при дослідженні задач теплопровідності, які характеризуються великим градієнтом температури по товщині оболонки.

У системі ортогональних криволінійних координат, яка характеризується коефіцієнтами Ламе H_1, H_2, H_3 , розглянемо нестационарну задачу теплопровідності [1]. Температура $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau)$ у довільній точці області $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2 \in \omega, -\frac{h}{2} < \alpha_3 < \frac{h}{2}\}$ задовольняє рівняння

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + w = c \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (1)$$

де $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau)$ - коефіцієнт теплопровідності, $w = w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - потужність джерел тепла, $c = c(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - коефіцієнт теплоємності

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\lambda \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\lambda \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\lambda \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Вирази для коефіцієнтів Ламе для широкого класу оболонок з різними серединними поверхнями наведено у праці [2].

Нехай граничні і початкові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} &= \alpha^+ (T - T_c^+) & \text{при } \alpha_3 = h, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} &= \alpha^- (T - T_c^-) & \text{при } \alpha_3 = -h; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha (T - T_c) \quad \text{на } \Gamma,$$

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) = T_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad /4/$$

де n - зовнішня нормаль до границі;

T_c^+ , T_c^- , T_c - значення температури навколишнього середовища; α^+ , α^- , α - значення коефіцієнтів теплопровідності; $T_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - початкова температура оболонки.

Запишемо шукану функцію температури в області Ω у вигляді

$$T_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau) = \sum_{i=0}^m \varphi_i(\beta) \psi_i(\alpha_1, \alpha_2, \tau), \quad /5/$$

де $\beta = \frac{\alpha_3}{h}$, h - товщина оболонки; $\varphi_i(\beta)$ - поліноми Міхліна, що утворюють систему базисних функцій. Функції $\varphi_i(\beta)$ можна виразити через нормовані поліноми Лежандра P_i :

$$\varphi_0 = P_0; \quad \varphi_i(\beta) = \int_1^\beta P_{i-1}(x) dx, \quad i=1,2. \quad /6/$$

Для побудови функцій ψ серединну поверхню ω представимо у вигляді об'єднання чотирикутників, що взаємно не перетинаються, тобто $\omega = \bigcup_{e=1}^M \omega_e$. На кожному елементі ω_e запишемо

$$\psi_i^e(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \Phi^e(\alpha_1, \alpha_2) q_i^e(\tau), \quad /7/$$

де $\Phi^e(\alpha_1, \alpha_2)$ - матриця функцій форми скінченного елемента; $q_i^e(\tau)$ - невідомі вузлові значення температури в момент часу τ .

Для оптимального вибору базисного елемента було проведено числові експерименти з чотирикутними сумісними елементами сирендипового сімейства з чотирма, вісьмома і дванадцятьма вузлами. Використання кубічних апроксимацій на елементі не має суттєвих переваг над квадратичними, тому у програмному комплексі для складових оболонок використовуються чотирикутники з вісьмома вузлами.

Застосування методу Бубнова-Гальоркіна приводить до розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь, що має вигляд

$$\sum_{e=1}^M [M \dot{q}_e^e(\tau) + G q_e^e(\tau)] = \sum_{e=1}^M F^e(\tau), \quad /8/$$

де

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \varphi_i^e \varphi_j^e d\Omega, \quad /9/$$

- матриця мас;

$$G_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda \operatorname{grad}^T(\varphi_i \varphi^e) \operatorname{grad}(\varphi_j \varphi^e) d\alpha_3 d\Omega, \quad /10/$$

- матриця теплопровідності;

$$F_j^e = \int_{\Omega_e} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi_j^e w d\alpha_3 d\Omega + \int_{\Gamma+Q_e} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha T_c d\alpha_3 d\Gamma, \quad /11/$$

- вектор правої частини. Початкові умови, необхідні для розв'язку цієї системи, отримаємо з умови /4/, підставляючи вираз для T у вигляді /5/. Ця система диференціальних рівнянь розв'язується на основі двоточкових рекурентних схем.

Із результуючих систем алгебраїчних рівнянь отримуємо значення коефіцієнтів $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ у кожному вузлі дискретизації, тобто по координаті α_3 отримуємо аналітичний розв'язок у вигляді відрізка ряду. Цей факт зручно використовувати при розв'язуванні задач термомпружності оболонок, оскільки аналогом зусиль і моментів у теорії теплопровідності є

$$T_1 = \frac{1}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T d\alpha_3, \quad T_2 = \frac{3}{2h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T \alpha_3 d\alpha_3, \quad /12/$$

отримання числових значень яких у даному випадку не викликає жодних труднощів.

Для складових оболонок умову контактної взаємодії двох тіл можна записати у вигляді

$$T^{(1)}(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}(\alpha_3)) = T^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}(\alpha_3)), \quad /13/$$

$$\text{де } -\frac{h^{(1)}}{2} \leq \alpha_3^{(1)}(\alpha_3) \leq \frac{h^{(1)}}{2}, \quad -\frac{h^{(2)}}{2} \leq \alpha_3^{(2)}(\alpha_3) \leq \frac{h^{(2)}}{2},$$

а α_3 - параметр, що вираховується в напрямку $\alpha_3^{(1)}$ і $\alpha_3^{(2)}$, що є колінеарні між собою.

Апробація викладеної методики проведена на тестових задачах.

Розподіл температурного поля по товщині необмеженої
сталльної пластинки /порівняння аналітичного і числового
розв'язків/

		$T_{числ}$				
τ	h	$T_{ан}$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
0,25	-0,5	292	285	299	291	293
	-0,3	293	290	291	295	293
	-0,1	293	290	290	292	294
	0,1	294	300	294	291	294
	0,3	302	305	306	302	300
	0,5	327	311	325	333	336
3	-0,5	321	307	321	321	321
	-0,3	324	324	324	324	325
	-0,1	334	341	334	334	336
	0,1	351	359	352	351	351
	0,3	375	376	376	375	375
	0,5	406	394	407	406	406
10	-0,5	440	430	441	441	441
	-0,3	443	446	445	444	444
	-0,1	452	462	454	454	454
	0,1	468	477	469	469	469
	0,3	489	493	491	490	490
	0,5	517	508	518	518	518

Приклад 1. Дослідимо розподіл температури по товщині необмеженої сталльної пластинки при нестационарному конвективному теплообміні між її поверхнею $\alpha_3 = \frac{h}{2}$ і навколишнім середовищем, при ідеально теплоізовованій поверхні $\alpha_2 = -\frac{h}{2}$. Нехай початкова температура пластини $T_0 = 293$ К, температура зовнішнього середовища $T = 1273$ К, коефіцієнт теплопровідності $\alpha_{\tau} = 0,66 \cdot 10^{-5}$ м²/с, товщина пластини $h = 0,08$ м, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 800$ Вт/м²·град. і коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 32$ Вт/м·град. В таблиці наведено результати, отримані для аналітичного розв'язку, і числові результати з використанням вищевикладеної методики. У першій колонці наведено значення температури, отримані на основі формул [3], а в наступних - значення

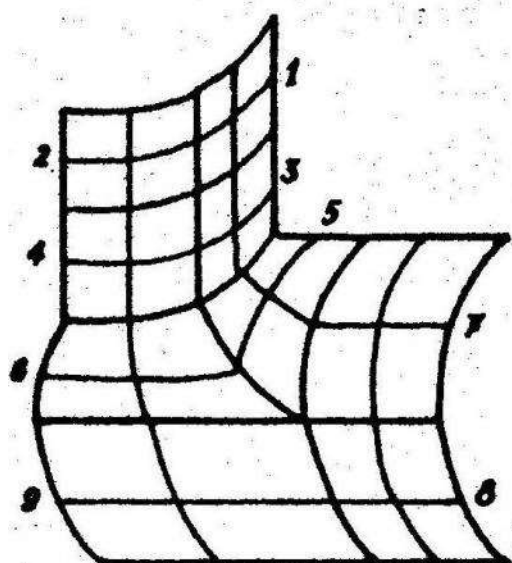


Рис. 1.

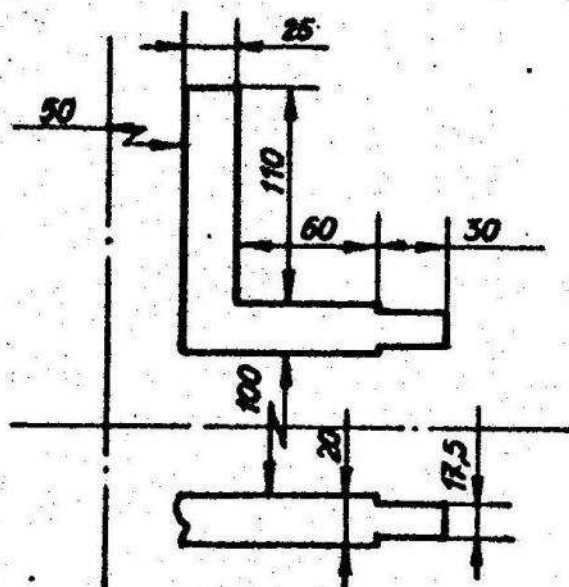


Рис. 2.

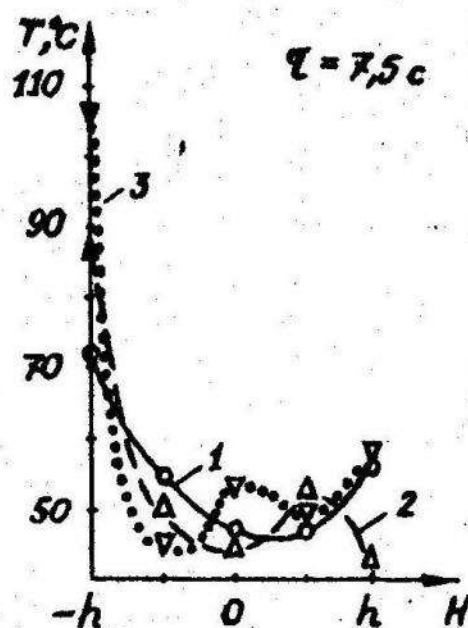


Рис. 3.

температури, отримані за числовою схемою зі збереженням 2,3,4 і 5-го членів ряду. Розрахунки наведено для моментів часу 0,25 с, 3 і 10 с.

Приклад 2. Трійникове з'єднання трубопроводів досліджується як складова оболонки. Оболонка знаходиться в умовах конвективного теплообміну по внутрішній і зовнішній поверхнях, на торцях задано умови теплоізоляції. Теплофізичні параметри такі: температура зовнішнього середовища $T_2 = 50^\circ\text{C}$, температура внутрішнього середовища $T_1 = 350^\circ\text{C}$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,1319 \text{ Вт/см}\cdot\text{град}$, коефіцієнт теплоємності $C = 3,54 \text{ Дж/см}^3\cdot\text{град}$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/см}^2$. На рис. 1 зображена сітка скінченних елементів, на рис. 2 – переріз трійникового з'єднання і його геометричні розміри, на рис. 3 – розподіл температури по товщині оболонки для вказаного перерізу. Криві 1, 2 і 3 /рис. 3/ відповідають квадратичному, кубічному і четвертого порядку наближенням по товщині оболонки поліномами Міхліна. Наведена методика реалізована в комплексі Фортран-програм "ПРОЕКТ" [4].

1. Подстригач Я.С., Швеп Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978. 2. Савула Я.Г. Представление срединных поверхностей оболочек резными поверхностями // Прикл. механика. 1984. Т.20. № 12. С.70-74. 3. Коваленко А.Д. Избранные труды. К., 1976. 4. Муха И.С., Савула Я.Г., Шербатый М.В. Комплекс программ "ПРОЕКТ" для расчетов и проектирования тонкостенных элементов конструкций энергетического машиностроения // Математическое моделирование процессов и конструкций энергетических и транспортных турбинных установок в системах их автоматизированного проектирования: Тез. докл. респ. конф. Готвальд, 1988. С.86.

Стаття надійшла до редколегії 29.05.89

УДК 539.3

І.С.Муха

ЧИСЕЛЬНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ ПОЧАТКОВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Нехай під дією масових сил $\vec{Q}^0$ і поверхневих сил $\vec{\Sigma}^0$ в тілі виникли переміщення $\vec{u}^0$. Будемо вважати, що ці переміщення виникли до початку розвитку деформації, яка нас цікавить, і задовольняють рівняння рівноваги і відповідні крайові умови.

Нехай тепер на тіло діють додаткові масові сили $\vec{Q}$ і поверхневі сили $\vec{\Sigma}$, які викликають у тілі додаткові переміщення $\vec{u}$. Запишемо задачу для знаходження цих переміщень. Введемо позначення

$$\vec{u}^1 = \vec{u}^0 + \vec{u}, \quad \vec{Q}^1 = \vec{Q}^0 + \vec{Q}, \quad \vec{\Sigma}^1 = \vec{\Sigma}^0 + \vec{\Sigma}. \quad /1/$$

Оскільки в результаті додаткової деформації ми знову отримали рівноважну конфігурацію, то переміщення u задовольняють рівняння рівноваги тіла, що перебуває під дією масових сил $\dot{Q}$, а також крайові умови для тіла з поверхневим навантаженням $\dot{\Sigma}$. Це означає, що переміщення u надають мінімум функціоналу Лагранжа [5]:

$$L(\dot{u}) = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\dot{u}) : B : \varepsilon(\dot{u}) dv - \int_V \dot{Q} \cdot \dot{u} dv - \int_{\Sigma} \dot{\Sigma} \cdot \dot{u} ds, \quad /2/$$

де B - матриця фізичного закону четвертого рангу; $\varepsilon(u)$ - матриця деформації Гріна; знаком ":" позначено операцію згортки двох матриць.

Необхідно записати функціонал, мінімум якому буде надавати функція u . Для цього матрицю деформації Гріна зобразимо у вигляді [5]

$$\varepsilon(u) = e(u) + \frac{1}{2} \omega(u, u), \quad /3/$$

де $e(u)$ - матриця лінійних деформацій /лінійний оператор відносно u /; $\omega(u, u)$ - деякий симетричний білінійний оператор.

Підставляючи вираз для $\dot{u}$ з /1/ в /3/, отримуємо

$$\begin{aligned} \varepsilon(\dot{u}) &= \varepsilon(\dot{u} + u) = e(\dot{u} + u) + \frac{1}{2} \omega(\dot{u} + u, \dot{u} + u) = \\ &= e(\dot{u}) + e(u) + \frac{1}{2} \omega(\dot{u}, \dot{u}) + \omega(\dot{u}, u) + \frac{1}{2} \omega(u, u) = \\ &= \varepsilon(\dot{u}) + \omega(\dot{u}, u) + \varepsilon(u). \end{aligned}$$

Використавши отриману тотожність, перепишемо /2/ у вигляді

$$\begin{aligned} L(\dot{u}) &= \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(\dot{u}) + \omega(\dot{u}, u) + \varepsilon(u)] : B : [\varepsilon(\dot{u}) + \omega(\dot{u}, u) + \varepsilon(u)] dv - \\ &- \int_V (\dot{Q} + Q) \cdot (\dot{u} + u) dv - \int_{\Sigma} (\dot{\Sigma} + \Sigma) \cdot (\dot{u} + u) dS = \\ &= L(\dot{u}) + \int_V \varepsilon(\dot{u}) : B : [\varepsilon(u) + \omega(\dot{u}, u)] dv - \int_V \dot{Q} u dv - \int_{\Sigma} \dot{\Sigma} u ds + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\dot{u}) : B : \omega(u, u) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(u) + \omega(\dot{u}, u)] : B : [\varepsilon(u) + \omega(\dot{u}, u)] dv - \\ &- \left. \int_V Q \cdot (\dot{u} + u) dv - \int_{\Sigma} \Sigma \cdot (\dot{u} + u) dS \right\}. \quad /4/ \end{aligned}$$

Підкреслений вираз рівний нулю згідно з принципом віртуальних робіт [1] для початкових переміщень.

Оскільки переміщення $\vec{u}$ надає мінімального значення функціоналу L , то для того, щоб функціонал $L'(\vec{u})$ досягав мінімуму, необхідно, щоб досягав мінімуму вираз у фігурних дужках. Врахувавши той факт, що $\int_V Q \cdot \vec{u} dV$ і $\int_{S_F} \Sigma \cdot \vec{u} dS$ є константи, отримаємо, що переміщення $\vec{u}$ повинно надавати мінімум функціоналу

$$L(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\vec{u}) : B : \omega(\vec{u}, \vec{u}) dV + \\ + \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(\vec{u}) + \omega(\vec{u}, \vec{u})] : B : [\varepsilon(\vec{u}) + \omega(\vec{u}, \vec{u})] dV - \\ - \int_V Q \cdot \vec{u} dV - \int_{S_F} \Sigma \cdot \vec{u} dS. \quad /5/$$

Взявши в /5/ початкову конфігурацію за відлікову /тобто $\vec{u} = 0$ /, отримаємо функціонал для задачі з початковими напруженнями $\vec{G}$ [1]

$$L(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_V \vec{G} : \omega(\vec{u}, \vec{u}) dV + \\ + \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\vec{u}) : B : \varepsilon(\vec{u}) dV - \int_V Q \cdot \vec{u} dV - \int_{S_F} \Sigma \cdot \vec{u} dS. \quad /6/$$

Нехай тепер у тілі є початкові деформації $\vec{\varepsilon}$. Щоб їх утримати в тілі, необхідно, щоб у ньому були присутні початкові напруження $\vec{G} = -B : \vec{\varepsilon}$. Знову взявши початкову конфігурацію за відлікову /тобто $\vec{u} = 0$ /, отримаємо функціонал для задачі з початковими деформаціями $\vec{\varepsilon}$ [1]:

$$L(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(\vec{u}) - \vec{\varepsilon}] : B : [\varepsilon(\vec{u}) - \vec{\varepsilon}] dV - \\ - \int_V Q \cdot \vec{u} dV - \int_{S_F} \Sigma \cdot \vec{u} dS. \quad /7/$$

Слід врахувати, що у випадку задачі з початковими деформаціями підкреслений в /4/ вираз вже не є рівний нулю. Крім цього, для такої задачі $\vec{Q} = 0$ і $\vec{\Sigma} = 0$. Зазначимо також, що в цьому випадку матриця B є функцією $\vec{\varepsilon}$.

Розглянемо далі функціонал /5/. Оскільки це функціонал четвертого порядку стосовно невідомої функції $\vec{u}$, то застосувати для його мінімізації метод Рітца неможливо. Тому побудуємо числову схему методу Ньютона [2-4] для функціоналу /5/. Нехай у нас є деяке наближення $\tilde{\vec{u}}$ для переміщення $\vec{u}$. Надамо $\tilde{\vec{u}}$

приросту Δu . Тоді

$$\begin{aligned} L(\tilde{u} + \Delta u) &= L(\tilde{u}) + \int_V \varepsilon(\tilde{u}) : B : \omega(\tilde{u}, \Delta u) dV + \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\tilde{u}) : B : \omega(\Delta u, \Delta u) dV + \\ &+ \int_V [\varepsilon(\tilde{u}) + \omega(\tilde{u}, \tilde{u})] : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV - \\ &- \int_V Q \cdot \Delta u dV - \int_{S_\Sigma} \Sigma \cdot \Delta u dS = \\ &= L(\tilde{u}) + \int_V \varepsilon(\tilde{u} + \tilde{u}) : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\tilde{u} + \tilde{u}) : B : \omega(\Delta u, \Delta u) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV - \\ &- \int_V (Q + Q) \cdot \Delta u dV - \int_{S_\Sigma} (\Sigma + \Sigma) \cdot \Delta u dS. \end{aligned}$$

/8/

З /8/ випливає, що для досягнення мінімуму функціоналу /5/ необхідно, щоб Δu надавала мінімум функціоналу

$$\begin{aligned} L^{\Delta}(\Delta u) &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\tilde{u} + \tilde{u}) : B : \omega(\Delta u, \Delta u) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV + \\ &+ \int_V \varepsilon(\tilde{u} + \tilde{u}) : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV - \\ &- \int_V (Q + Q) \cdot \Delta u dV - \int_{S_\Sigma} (\Sigma + \Sigma) \cdot \Delta u dS. \end{aligned}$$

Припустимо тепер, що Δu є величина мала, тобто членами порядку $(\Delta u)^3$ і $(\Delta u)^4$ можна знехтувати. Тоді для знаходження Δu отримаємо квадратичний функціонал

$$\begin{aligned} L^*(\Delta u) &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(\tilde{u} + \tilde{u}) : B : \omega(\Delta u, \Delta u) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV + \\ &+ \int_V \varepsilon(\tilde{u} + \tilde{u}) : B : [\varepsilon(\Delta u) + \omega(\tilde{u} + \tilde{u}, \Delta u)] dV - \\ &- \int_V (Q + Q) \cdot \Delta u dV - \int_{S_\Sigma} (\Sigma + \Sigma) \cdot \Delta u dS. \end{aligned}$$

Виберемо початкове наближення $\tilde{u}^0 \equiv 0$. Побудуємо ітераційний процес

$$\tilde{u}^{i+1} = \tilde{u}^i + \Delta u^i$$

до тих пір, поки $\|\Delta u^i\| > \varepsilon \|\tilde{u}^i\|$. При цьому $u = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{u}^i$.

1. В а с и л з у К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., 1987. 2. М о ж с е е в Н.Н., И в а н и - л о в Ю.П., С т о л я р о в а Е.М. Методы оптимизации. М., 1978. 3. О д е н Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., 1976. 4. Р и к а р д с Р.Б. Метод конечных элементов и пластин. Рига, 1988. 5. Ч е р н ы х К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л., 1986.

Стаття надійшла до редколегії 18.05.89

УДК 539.3

В.О.Ліхачов, Н.П.Флейшман

ТИСК ЖОРСТКОГО ШТАМПУ НА ПРУЖНИЙ ШАР

Розглядається пружний шар товщиною h , ($0 \leq \zeta \leq h$), який лежить на гладкій жорсткій основі. В крайову площину шару / $\zeta = 0$ / втискується гладкий жорсткий штамп під дією осової нормальної до площини сили P .

1. Осесиметрична контактна задача

Граничні умови задачі в циліндричних координатах / ρ, ζ / мають вигляд

$$u_{\zeta}(\rho, 0) = f_0(\rho) \quad \text{при } \rho < a; \quad /1.1/$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}(\rho, 0) = 0 \quad \text{при } \rho > a; \quad /1.2/$$

$$\sigma_{\zeta\rho}(\rho, 0) = 0 \quad \text{при } \rho > 0; \quad /1.3/$$

$$u_{\zeta}(\rho, h) = \tau_{\rho\zeta}(\rho, h) = 0 \quad \text{при } \rho > 0. \quad /1.4/$$

Залежність радіуса " a " області контакту від сили P знаходимо з умови рівноваги

$$P = -2\pi \int_0^a \rho \sigma_{\zeta\zeta}(\rho, 0) d\rho. \quad /1.5/$$

Як показано в [1, 2], компоненти вектора зміщення і тензора напружень можуть бути виражені через дві гармонійні функції

$\psi(r, z)$, $\psi_r(r, z)$, які вибираємо такими:

$$\psi_r = \int_0^{\infty} \left[A(\lambda) \frac{ch\lambda(h-z)}{ch\lambda h} + A_1(\lambda) \frac{sh\lambda(h-z)}{ch\lambda h} \right] \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda} d\lambda; \quad /1.6/$$

$$\psi = \int_0^{\infty} B(\lambda) \frac{ch\lambda(h-z)}{sh\lambda h} \cdot \frac{J_0(\lambda z)}{\lambda} d\lambda. \quad /1.7/$$

Тут $z = \frac{\rho}{a}$, $z = \frac{\xi}{a}$, $h = \frac{h_1}{a}$ - безрозмірні величини. Граничні умови /1.3/, /1.4/ приводять до таких залежностей між шуканими функціями $A(\lambda)$, $A_1(\lambda)$, $B(\lambda)$:

$$A_1(\lambda) = \lambda h \operatorname{cth} \lambda h B(\lambda); \quad /1.8/$$

$$A(\lambda) = -\operatorname{cth} \lambda h (1 + \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) B(\lambda); \quad /1.9/$$

З умов /1.1/, /1.2/ отримаємо парні інтегральні рівняння для визначення $B(\lambda)$:

$$G_{zz} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \lambda B J_0(\lambda z) d\lambda - \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \lambda B F(\lambda h) J_0(\lambda z) d\lambda = 0 \quad z > 1; \quad /1.10/$$

$$\int_0^{\infty} B J_0(\lambda z) d\lambda = -\frac{a\mu}{1-\nu} f_0(az) \quad z < 1, \quad /1.11/$$

де

$$F(\lambda h) = \operatorname{cosech} \lambda h [ch\lambda h - sh\lambda h + \lambda h \operatorname{cosech} \lambda h]. \quad /1.12/$$

Парні рівняння /1.10/, /1.11/ відрізняються від аналогічних рівнянь при розв'язуванні такої ж задачі для півпростору присутністю у /1.10/ другого доданку, який швидко спадає зі збільшенням величини h і при $\lambda h \geq 6$ ним можна нехтувати.

Припустимо, що існує така функція $\beta(t, h)$, для якої другий доданок у /1.10/ перетворюється в нуль, якщо прийняти

$$B(\lambda) F(\lambda h) = \int_0^1 \beta(t, h) \sin \lambda t dt. \quad /1.13/$$

Для цього випадку розв'язок рівнянь /1.10/, /1.11/ наведено, наприклад, у працях [3, 4]. Згідно з цими працями прийmemo

$$B(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \sin \lambda t \varphi(t) dt. \quad /1.14/$$

Тут функцію $\varphi(t)$ знаходимо з інтегрального рівняння

$$\int_0^z \varphi(t) \arcsin \frac{t}{z} dt + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \varphi(t) dt = -\frac{a\mu}{1-\nu} f_0(az). \quad /1.15/$$

Тоді умова /1.13/ приводить до рівняння щодо функції $\beta(t, h)$.

$$\int_0^1 \beta(t, h) \sin \lambda t dt = F(\lambda h) \int_0^1 \varphi(t) \sin \lambda t dt, \quad /1.16/$$

де $\varphi(t)$ є розв'язок /1.15/.

Оскільки $\beta(t, h)$ не визначена на $]1, \infty[$, то приймемо, що $\beta(t, h) \equiv 0$ при $t > 1$ і застосуємо до /1.16/ формулу для сінус-перетворення Фур'є.

$$\beta(t, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda h) \left[\int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda x dx \right] \sin \lambda t d\lambda. \quad /1.17/$$

Розв'язок /1.17/ будемо шукати у вигляді ряду

$$\beta(t, h) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_{2k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad /1.18/$$

Тоді із /1.17/ та /1.18/ отримаємо вирази для коефіцієнтів ряду /1.18/

$$\beta_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{2k+1} F(\lambda h) \left[\int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda x dx \right] d\lambda. \quad /1.19/$$

Після визначення функції $\varphi(t)$ з /1.15/ та $\beta(t, h)$ з /1.18/ і /1.19/ можна знайти контактні напруження σ_{zz} за формулою /1.10/ при $z < 1$ і знайти радіус області контакту з умови /1.5/.

Приклад 1. Нехай функція $f_0(az)$ має вигляд

$$f_0(az) = \delta_n - \varepsilon_n a^n z^n \quad (n \in N). \quad /1.20/$$

Тут δ_n - осьове переміщення штапу, другий доданок визначає форму його підшви.

Із /1.15/ отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha_{n-1} t^{n-1}, \quad \delta_n = \frac{\pi \varepsilon_n a^n}{2 z_n}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}, \quad z_1 = 1, \\ z_n &= \frac{n-1}{n} z_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad \alpha_{n-1} = \frac{\mu n \delta_n}{(1-\nu) z_n} a^{n+1}, \end{aligned} \quad /1.21/$$

а з /1.10/ при $z < 1$ знаходимо контактні напруження

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^* + \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_{2k+1}^{(n)}}{(2k+3)!} z^{2k+1} K_{2k+1}^{(n)}(z), \quad /1.22/$$

де $\sigma_{zz}^* = \frac{a^{n-1}}{a^2} z^{n-1} K_{n-1}(z)$ - відповідні контактні напруження для півпростору, $K_0(z) = \ln(1 + \sqrt{1+z^2}) - \ln z$,
 $K_1 = \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}$, $K_n(z) = \frac{1}{n^2} [1 + n(n-1)K_{n-2}(z)]$ ($n \geq 2$).

На границі області контакту $z = 1$ ($\rho = a$) $\sigma_{zz}^*(1,0) = 0$, тобто виконується умова неперервності нормальних напружень при переході через границю розподілу крайових умов.

Згідно з /1.5/ знаходимо значення радіуса області контакту

$$a^{n+1} = \frac{\rho(1-\nu) z_n}{2\mu n \delta_n \left[B_n + \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \beta_{2k+1}^{(n)} \right]}, \quad /1.23/$$

де

$$B_n = \int_0^1 z^n K_{n-1}(z) dz.$$

2. Неосесиметрична контактна задача

На крайових площинах задаються такі умови:

$$u_\xi(\rho, 0, \theta) = f_0(\rho) + f_1(\rho) \cos \theta \quad \text{при } \rho < a; \quad /2.1/$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\rho, 0, \theta) = 0 \quad \text{при } \rho \geq a; \quad /2.2/$$

$$\tau_{\xi\rho}(\rho, 0, \theta) = \tau_{\xi\theta}(\rho, 0, \theta) = 0 \quad \text{при } \rho \geq 0; \quad /2.3/$$

$$u_\xi(\rho, h, \theta) = \tau_{\xi\rho}(\rho, h, \theta) = \tau_{\xi\theta}(\rho, h, \theta) = 0 \quad \text{при } \rho \geq 0. \quad /2.4/$$

Лінійність крайової задачі дає змогу представити напружений стан у шарі як суму двох напружених станів, що визначаються двома типами крайових умов із /2.1/-/2.4/. Перший тип отримуємо при $f_1(\rho) \equiv 0$. Контактна задача з відповідними умовами розглянуто вище. Другий тип умов отримуємо при $f_0 \equiv 0$.

Схематично змішана з другим типом умов задача розв'язується так. Гармонійні функції приймаємо у вигляді /1.6/, /1.7/, якщо в них замінити $J_0(\lambda z)$ на $J_1(\lambda z)$ і помножити на $\cos \theta$ [5].

З крайових умов одержуємо співвідношення /1.8/, /1.9/ та парні інтегральні рівняння типу /1.10/, /1.11/, якщо в останніх замінити $J_0(\lambda z)$ на $J_1(\lambda z)$. Розв'язок останніх інтегральних

рівнянь дано в праці [4]. Цим і завершується розв'язок змішаної задачі з умовами /2.1/-/2.4/ при $f_0(\rho) \equiv 0$.

Контактні напруження задачі з умовами /2.1/-/2.4/ зобразимо у вигляді суми напружень, що відповідають осесиметричній та неосесиметричній частинам зміщення u_z , яке дається умовами /2.1/.

Для визначення області контакту припускаємо, що вона обмежена кривою, рівняння якої є

$$\rho_1 = a + b \cos \theta, \quad /2.5/$$

де a визначається з /1.23/, а b - з умови рівноваги

$$\rho = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho} G_{zz}(\rho, 0, \theta) \rho d\rho. \quad /2.6/$$

Нерівності $u_z(r, z, \theta) \geq 0$, $G_{zz}(r, 0, \theta) \leq 0$ накладають обмеження на форму підшви штапу, для якої має місце побудований розв'язок.

Приклад 2. Нехай гранична умова /2.1/

$$u_z = \delta_2 - \varepsilon_2 a^2 z^2 + (b_2 a z + b_2 a^3 z^3) \cos \theta.$$

$$\text{Тоді } G_{zz} = - \frac{8\mu\varepsilon_2}{\pi(1-\nu)} \left[\sqrt{1-z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+1}^{(2)} z^{2k+1} K_{2k+1}^{(2)} \right] + \\ + \frac{32\mu b_2}{3\pi(1-\nu)} \left[z \sqrt{1-z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2k+1}^{(2)} z^{2k} K_{2k-1}^{(2)}(z) \right] \cos \theta,$$

де $\tilde{\beta}_{2k+1}^{(2)}$, як і $\beta_{2k+1}^{(2)}$, визначаються з /1.19/, але в цьому випадку

$$\varphi(t) = \frac{32\mu b_2 a^4}{3\pi(1-\nu)} (t-t^3).$$

З /2.6/ знаходимо значення b , а з /2.5/ - рівняння кривої

$$\rho_1 = a + \frac{\pi b_2 a^2 c^2}{2\varepsilon_2 c_1} \cos \theta,$$

де

$$C_1 = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \tilde{\beta}_{2k+1}^{(2)}; \quad C_2 = 1 + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k+1}^{(2)}}{2k+3}; \quad b_2 < \frac{2\varepsilon_2 c_1}{\pi a c_2}.$$

Висновки. На підставі розв'язків контактних задач можна стверджувати:

1. З ростом h контактні напруження для шару зменшуються. При $h = 1$ вони на 40 % більші, ніж для півпростору.
2. Площа області контакту /радіус для осесиметричної задачі/ для шару менша, ніж площа області контакту для півпростору.
3. У ряді /1.18/ можна обмежитися п'ятьма членами при $h > 1$ і будь-яких значеннях n у виразі /1.20/.
4. При $h > 10$ контактні задачі для шару можна розраховувати за формулами відповідних контактних задач для півпростору.

1. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Об одной из форм решений уравнений теории упругости // Динамика и прочность машин. 1973. Вып. 17. С.37-42. 2. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Общее представление решений уравнений теории упругости в цилиндрических координатах // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1975. Вып.26. С.121-123. 3. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Решение одного класса парных интегральных уравнений. К., 1984. Рукопись деп в УкрНИИТИ, № 1361. 4. Лихачев В.А., Флейшман Н.П. Давление неосесимметричного штампа на упругое полупространство // Динамика и прочность машин. 1988. Вып. 48. С.45-49. 5. Уфлянд Я.С. Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.89

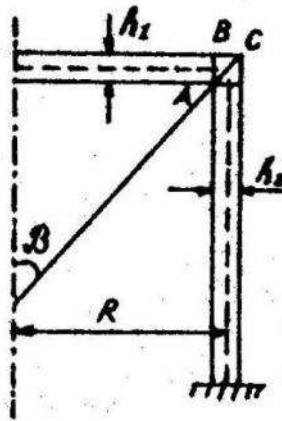
УДК 539.3

О.С.Коссак

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ УМОВ СПРЯЖЕННЯ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКІНЧЕННОЮ ЗСУВНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Питанням побудови граничних умов пружного спряження податливих на зсув оболонок присвячено ряд праць [1, 4, 6]. Для встановлення адекватності граничних умов спряження оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю проведено обчислювальний експеримент [1], в ході якого для осесиметричного випадку порівнювалися чисельні результати, одержані на основі математичної моделі теорії пружності і теорії оболонок.

Розглянемо питання адекватності граничних умов у випадку циліндричної оболонки, спряженої з пластиною радіуса r /див. рисунок/. Порівняємо результати, одержані напіваналітичним методом скінчених елементів /НМСЕ/ [2, 3], з аналітичним розв'язком.



Системи рівнянь з теорії оболонок типу Тимошенка для пласти-
ни /з індексом /1/ / та для циліндра /з індексом /2/ / мають
вигляд [5]

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 S^{(1)} + r \rho_2^{(1)} = 0, \\ \frac{d}{dr} (r H^{(1)}) + H^{(1)} - r Q_2^{(1)} + r m_2^{(1)} = 0; \end{cases} \quad /1/$$

$$\begin{cases} \frac{dS^{(2)}}{d\alpha_1} + \frac{1}{R} Q_2^{(2)} + \rho_2^{(2)} = 0, \\ \frac{dH^{(2)}}{d\alpha_1} - Q_2^{(2)} + m_2^{(2)} = 0, \end{cases} \quad /2/$$

$$\text{де } S^{(1)} = \frac{E h_1}{2(1+\nu)} r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_2^{(1)}}{r} \right); \quad \rho_2^{(1)} = 0; \quad H^{(1)} = \frac{E h_1^3}{24(1+\nu)} r \frac{d}{dr} \left(\frac{\gamma_2^{(1)}}{r} \right);$$

$$Q_2^{(1)} = K' G' h_1 \gamma_2^{(1)}; \quad m_2^{(1)} = 0;$$

$$S^{(2)} = \frac{E h_2}{2(1+\nu)} \frac{d u_2}{d \alpha_1}; \quad Q_2^{(2)} = K' G' h_2 \left(\gamma_2^{(2)} - \frac{u_2^{(2)}}{R} \right);$$

$$H^{(2)} = \frac{E h_2^3}{24(1+\nu)} \left(\frac{d \gamma_2^{(2)}}{d \alpha_1} + \frac{1}{R} \frac{d u_2^{(2)}}{d \alpha_1} \right); \quad \rho_2^{(2)} = -1; \quad m_2^{(2)} = 0;$$

E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; K' - коефіцієнт зсуву; G' - модуль зсуву. Для ізотропних оболонок $G' = E/2(1+\nu)$; $K' = 5/6$ [2, 5].

Загальний розв'язок системи рівнянь /1/ та /2/ запишемо у вигляді

$$\begin{cases} U_2^{(1)} = C_1^{(1)} r, \\ \gamma_2^{(1)} = C_2^{(1)} I_1(\eta r). \end{cases}$$

Тут $I_1(\eta r)$ - модифіковані функції Бесселя $\eta = \frac{24\kappa'G'(1+\nu)}{Eh_2^2}$, /3/

$$\begin{cases} U_2^{(2)} = C_1^{(2)} + C_2^{(2)} \alpha_1 + C_3^{(2)} e^{g\alpha_1} + C_4^{(2)} e^{-g\alpha_1} + M_1 \alpha_1^2, \\ \gamma_2^{(2)} = C_1^{(2)} \frac{1}{R} + C_2^{(2)} \frac{\alpha_1}{R} + C_3^{(2)} B e^{g\alpha_1} + C_4^{(2)} B e^{-g\alpha_1} + M_2, \end{cases} \quad /4/$$

де

$$M_1 = \frac{-6R^2 P_2^{(2)} (1+\nu)}{h_2 E (h_2^2 + 6R^2)}; \quad B = -\frac{R E g^2}{\kappa' G h^2} - \frac{M_1 E R}{\kappa' G' (1+\nu)}.$$

Невідомі коефіцієнти $C_i^{(k)}$ ($i=1,4$; $k=1,2$) в формулах /3/, /4/ визначаються з системи граничних умов при $\alpha_1 = \ell$, де ℓ - довжина серединної поверхні циліндра [5]

$$U_2^{(2)}_{\alpha_1=\ell} = 0; \quad /5/$$

$$\gamma_2^{(2)}_{\alpha_1=\ell} = 0 \quad /6/$$

та умов спряження при $r=R, \alpha_1=0$

$$U_2^{(1)}_{r=R} = U_2^{(2)}_{\alpha_1=0}; \quad /7/$$

$$\gamma_2^{(1)} \cos \beta_{r=R} = (\gamma_2^{(2)} \sin \beta + \gamma_n^{(1)} \cos \beta)_{\alpha_1=0}; \quad /8/$$

$$S_{r=R}^{(1)} = S_{\alpha_1=0}^{(2)}; \quad /9/$$

$$H^{(1)} \cos \beta_{r=R} = H^{(2)} \sin \beta_{\alpha_1=0}. \quad /10/$$

Тут кут β визначається з трикутника ABC

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h_2}{h_1}.$$

Т а б л и ц я 1

Порівняння розв'язків, отриманих НМСЕ, з аналітичним розв'язком при $h_1 = 1$, $h_2 = 0,5$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв'язок задачі /1-4/, /5, 6/ з умовами спряження:					
		1 варіант		2 варіант		3 варіант	
На пластині	$U_{2H}^{(1)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{22}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	0,9655	0,9635	0,2	0,9675	0,2	0,9715	0,6
5,0	1,931	1,927	0,2	1,935	0,2	1,943	0,6
7,5	2,896	2,891	0,2	2,903	0,2	2,915	0,6
10,0	3,861	3,854	0,1	3,870	0,2	3,886	0,6
На циліндрі	$U_{2H}^{(2)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{22}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	3,627	3,622	0,1	3,634	0,2	3,646	0,5
5,0	2,905	2,902	0,1	2,910	0,2	2,919	0,5
7,5	1,696	1,695	0,06	1,695	0,06	1,703	0,4
9,375	0,4698	0,4695	0,06	0,4667	0,06	0,4715	0,4

Т а б л и ц я 2

Порівняння розв'язків, отриманих НМСЕ, з аналітичним розв'язком при $h_1 = 1$, $h_2 = 0,25$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв'язок задачі /1-4/, /5, 6/ з умовами спряження:					
		1 варіант		2 варіант		3 варіант	
На пластині	$U_{2H}^{(1)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{22}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	1,940	1,940	0,0	1,947	0,4	1,949	0,5
5,0	3,879	3,879	0,0	3,894	0,4	3,899	0,5
7,5	5,819	5,819	0,0	5,841	0,4	5,848	0,5
10,0	7,759	7,758	0,01	7,788	0,4	7,797	0,5
На циліндрі	$U_{2H}^{(2)} \cdot 10^9$	$U_{21}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{22}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$U_{23}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	7,282	7,282	0,0	7,304	0,3	7,312	0,4
5,0	5,831	5,831	0,0	5,846	0,3	5,850	0,3
7,5	3,403	3,403	0,0	3,411	0,2	3,413	0,3
9,375	0,9423	0,9423	0,0	0,9442	0,2	0,9448	0,3

Т а б л и ц я 3
Порівняння розв'язків, отриманих НМСЕ, з аналітичним
розв'язком при $h_1 = h_2 = 0,5$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв'язок задачі /1-4/, /5,6/ з умовами:			
		1 варіант		3 варіант	
На пластині	$\sigma_{24}^{(1)} \cdot 10^9$	$\sigma_{21}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$\sigma_{23}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	0,9692	0,9633	0,6	0,9694	0,02
5,0	1,938	1,927	0,6	1,939	0,02
7,5	2,908	2,890	0,6	2,908	0,0
10,0	3,877	3,853	0,6	3,878	0,02
На циліндрі	$\sigma_{24}^{(2)} \cdot 10^9$	$\sigma_{21}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$\sigma_{23}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	3,638	3,621	0,5	3,640	0,05
5,0	2,913	2,902	0,4	2,914	0,03
7,5	1,700	1,695	0,3	1,701	0,05
9,375	0,4708	0,4694	0,3	0,4710	0,04

Т а б л и ц я 4
Порівняння розв'язків, отриманих НМСЕ з аналітичним
розв'язком при $h_1 = h_2 = 0,25$

α_1	НМСЕ	Аналітичний розв'язок задачі /1-4/, /5,6/ з умовами:			
		1 варіант		3 варіант	
На пластині	$\sigma_{24}^{(1)} \cdot 10^9$	$\sigma_{21}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$\sigma_{23}^{(1)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	1,945	1,939	0,3	1,945	0,0
5,0	3,891	3,878	0,3	3,891	0,0
7,5	5,836	5,818	0,3	5,836	0,0
10,0	7,782	7,757	0,3	7,782	0,0
На циліндрі	$\sigma_{24}^{(2)} \cdot 10^9$	$\sigma_{21}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$	$\sigma_{23}^{(2)} \cdot 10^9$	$\Delta\%$
2,5	7,300	7,281	0,3	7,300	0,0
5,0	5,843	5,830	0,2	5,843	0,0
7,5	3,409	3,403	0,2	3,409	0,0
9,375	0,9438	0,9422	0,2	0,9438	0,0

Нехай формули /7/-/10/ є перший варіант умов спряження. Нижче розглянемо інші випадки умов спряження.

Відкинемо кут β в формулах /8/, /10/, тоді

$$\gamma_{r=R}^{(1)} = (\gamma_2^{(2)} + \gamma_n^{(1)})_{\alpha_1=0}; \quad /11/$$

$$H_{r=R}^{(1)} = H_{\alpha_1=0}^{(2)}. \quad /12/$$

Умови /7/, /10-12/ є другим варіант.

Опустимо доданок γ_n у формулі /11/ [1], одержимо

$$\gamma_{r=R}^{(1)} = \gamma_{\alpha_1=0}^{(2)}. \quad /13/$$

Тоді формули /7/, /9/, /12/, /13/ є третім варіантом умов спряження.

Були одержані також результати НМСЕ з урахуванням граничних умов /5/, /6/ та умов спряження /7/, /13/ [2, 3].

У табл. 1-4 наведено порівняння розв'язків, одержаних НМСЕ, з аналітичним розв'язком задачі /1/-/4/, /5/, /6/, враховуючи різні варіанти умов спряження при $h_1 \neq h_2$ і $h_1 = h_2$.

Тут $\Delta\%$ - відносна похибка

$$\Delta\% = \frac{(|\mathcal{U}_{2n}^{(1)} - \mathcal{U}_{2k}^{(2)}|)}{\mathcal{U}_{2k}^{(2)}} \cdot 100\%, \quad (i=1,2),$$

де $\mathcal{U}_{2n}^{(1)}$ - переміщення, знайдені НМСЕ; $\mathcal{U}_{2k}^{(2)}$ - переміщення, знайдені для K -го варіанту умов спряження.

Порівняння одержаних результатів свідчить, що варіації умов у формулах /8/, /10/ практично не впливають на переміщення $\mathcal{U}_2^{(1)}, \mathcal{U}_2^{(2)}$. Відносна похибка розв'язку, одержаного НМСЕ стосовно аналітичного, не перевищує 0,6 %.

І. Григоренко Я.М., Муха І.С., Савула Я.Г.,
Флейшман Н.П. Пружна рівновага складових оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1984. № 7. С. 33-36. 2. Савула Я.Г. Задачі механіки деформування оболонок с резними срединними поверхностями: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1986. 3. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов, 1981. 4. Стрельченко И.Г. Условия сопряжения цилиндрических оболочек, обладающих малой сдвиговой жесткостью // Прикл. механика. 1982. 18. № 9. С.41-46.

5. П е л е х Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов, 1978.
 6. Kulkarni A.K., Neale K.W., Elyin F. Consistent theories for intersecting shells // Nucl. Eng. and Des. 1975 35. N3. p.277-385.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.89

УДК 517.949:517.956

М.Д.Коркуна, А.М.Кузик, І.І.Чулик

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ СУМАРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В КЛАСІ $W_2^{(0)}(Q_T)$

Метод сумарної апроксимації /МСА/ як один з найбільш ефективних методів побудови економних різницевих схем дає змогу будувати різницеві локально-одновимірні схеми /ЛОС/ для нестационарних задач математичної фізики у випадку довільної області Ω -вимірного простору [4]. У праці [2] досліджена збіжність різницевих ЛОС МСА у випадку розв'язку вихідної диференціальної задачі з класу $W_2^{(0)}(Q_T)$.

У даній статті отримана оцінка швидкості збіжності для різницевої ЛОС з розпаралеленням у класі $W_2^{(0)}(Q_T)$. Для спрощення ми розглядали двовимірний евклідов простір, однак отримані результати мають місце і для простору довільного числа вимірів.

Розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + q(x,t) u(x,t) = f_0(x,t) + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

$$x = (x_1, x_2), (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in S_T,$$

/1/

де $\Omega = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, Γ - границя області Ω , $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \Gamma \times [0,T]$.

На відрізку $[0,T]$ і в області Ω введемо рівномірні сітки

$$\bar{\omega}_\tau = \{t = t_j = j\tau: j = 0, 1, \dots, K, \tau = \frac{T}{K}\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{x = (x_1, x_2) = (i_1 h_1, i_2 h_2), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = 1, \alpha = 1, 2\}. \quad /2/$$

Позначимо $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, ω_h - множина внутрішніх вузлів сітки $\bar{\omega}_h$, $\gamma = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$.

Поклавши в основу адитивну модель МСА з розпаралеленням [1], побудуємо різницеву ЛОС

$$\eta_\alpha \frac{y_\alpha^{j+1} - \bar{y}^j}{\tau} + \Lambda_{\alpha, j+1} y_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} T_1 T_2 \left[f_{\alpha, \alpha}(\cdot, t) + \frac{\partial f_\alpha(\cdot, t)}{\partial x_\alpha} \right] dt, \quad /3/$$

$$(x_1, x_2) \in \omega_h, \quad j = 0, 1, \dots, K-1; \quad \alpha = 1, 2,$$

$$y_\alpha^0 = T_1 T_2 u_0(\cdot), \quad \bar{y}^j = \sum_{\alpha=1}^2 \eta_\alpha y_\alpha^j,$$

$$y_\alpha^j|_\gamma = 0, \quad j = 0, 1, \dots, K, \quad /4/$$

де

$$\Lambda_{\alpha, j+1} v = -(\alpha_\alpha^{j+1} v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \alpha_\alpha^{j+1} v, \quad \Lambda_{j+1} = \Lambda_{1, j+1} + \Lambda_{2, j+1}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$\alpha_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} q_\alpha(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_2 d\xi_1 dt,$$

$$\alpha_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_\alpha - h_\alpha}^{x_\alpha} \int_{x_3 - \frac{h_3}{2}}^{x_3 - \frac{h_3}{2} + \frac{h_3 - \alpha}{2}} k_\alpha(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_2 d\xi_1 dt,$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \eta_\alpha = 1, \quad \sum_{\alpha=1}^2 f_{\alpha, \alpha}(x, t) = f(x, t),$$

$$T_\alpha W(\cdot) = h_\alpha^{-2} \left[\int_{x_\alpha - h_\alpha}^{x_\alpha} (h_\alpha + \xi - x_\alpha) W(\xi) d\xi + \int_{x_\alpha}^{x_\alpha + h_\alpha} (h_\alpha - \xi + x_\alpha) W(\xi) d\xi \right], \quad \alpha = 1, 2.$$

Оператори T_1 і T_2 є операторами точних різницевих схем [3], і для них справедливі тотожності

$$T_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad (x_1, x_2) \in \omega_h.$$

Введемо позначення

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} u(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_2 d\xi_1, & (x_1, x_2) \in \omega_h \\ 0, & (x_1, x_2) \in \gamma. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $u_0(x) \in L_2(\Omega)$, $f_{0,\alpha}(x,t) \in L_2(Q_T)$,
 $f_\alpha(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\alpha=1,2$ і нехай виконуються умови

$$k_\alpha(x,t) \in W_{\infty}^{1,1}(Q_T), k_\alpha(x,t) \geq \nu > 0,$$

$$q_\alpha(x,t) \in W_{\infty}^{1,1}(Q_T), q_\alpha(x,t) \geq \nu_1, \alpha=1,2.$$

Тоді якщо $\tau \leq (c, h^*)^2$, $h^* = \min\{h_1, h_2\}$,

то при достатньо великому ν розв'язок різницевої ЛОС /3/, /4/ збігається до розв'язку задачі /1/, /2/ і має місце оцінка швидкості збіжності

$$\left(\tau \sum_{j=0}^{k-1} \left\| \bar{u}^{j+1} - \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u^*(t) dt \right\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq MC/h [\|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} + \\ + \sum_{\alpha=1}^2 (\|f_{0,\alpha}\|_{L_2(Q_T)} + \|f_\alpha\|_{L_2(Q_T)})],$$

де $c = \max\{c, 1\}$, M - константа, не залежна від τ, h і u .

1. Гордєзiani Д.Г., Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации // Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С.178-186. 2. Кулик А.М., Чулик І.І. Побудова і дослідження локально-одновимірних різницевих схем у класі узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29. С.23-29. 3. Макаров В.Л., Самарский А.А. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. 20. № 2. С.371-387. 4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.89

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ ОБЧИСЛЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ
ДВОВИМІРНИХ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Багато задач математичної фізики формують у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі:

$$\iint_S G(\rho) / R(\rho, M) dS_\rho = f(M), \quad M \in S,$$

де $f(M)$ - задана, а $G(\rho)$ - шукана функції; $R(\rho, M)$ - відстань між точками ρ і M евклідового простору E^3 ; $dS_\rho = (E \cdot F - G^2)^{1/2} d\alpha d\beta$, причому поверхня S задається параметричними рівняннями $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$, $z = z(\alpha, \beta)$ ($(\alpha, \beta) \in D$ - замкнутої обмеженої області в E^2), а E, F, G - коефіцієнти першої квадратичної форми

$$E = (x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2 + (z'_\alpha)^2, \quad F = (x'_\beta)^2 + (y'_\beta)^2 + (z'_\beta)^2,$$

$$G = x'_\alpha \cdot x'_\beta + y'_\alpha \cdot y'_\beta + z'_\alpha \cdot z'_\beta.$$

При наближеному розв'язуванні цього рівняння виникає проблема обчислення такого невластного інтеграла:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [A \cdot (x-x_0)^2 + 2 \cdot B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2]^{-1/2} dx dy, \quad (1)$$

де точка з координатами x_0, y_0 належить до одиничного квадрата - $(x_0, y_0) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, а A, B, C - деякі дійсні числа.

У нашій статті будується алгоритм обчислення (1), в основі якого лежить використання відомої формули [3]:

$$\begin{aligned} & \int_c^d dy \int_{a \cdot y + b}^{p \cdot y + q} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{-1/2} dx = \\ & = (y_0 - c) \cdot K(c) + (d - y_0) \cdot K(d) + \\ & + \frac{q - x_0 + p \cdot y_0}{(1+p^2)^{1/2}} L(p, q) + \frac{x_0 - b - a \cdot y_0}{(1+a^2)^{1/2}} L(a, b), \end{aligned}$$

(2)

причому $c \leq y_0 \leq d$, $a \cdot y_0 + b \leq x_0 \leq p y_0 + q$, а

$$K(t) = \ln \frac{q - x_0 + p \cdot t + [(q - x_0 + p \cdot t)^2 + (t - y_0)^2]^{1/2}}{q - x_0 + a \cdot t + [(q - x_0 + a \cdot t)^2 + (t - y_0)^2]^{1/2}},$$

$$L(t, s) = \ln \frac{d - y_0 + t \cdot (s - x_0 + t \cdot d) + (1 + t^2)^{1/2} [(s - x_0 + t \cdot d)^2 + (d - y_0)^2]^{1/2}}{c - y_0 + t \cdot (s - x_0 + t \cdot c) + (1 + t^2)^{1/2} [(s - x_0 + t \cdot c)^2 + (c - y_0)^2]^{1/2}}.$$

Зауважимо, що всі доданки у формулі /2/ невід'ємні; чисельники та знаменники у виразах під знаком логарифма також невід'ємні; вони можуть дорівнювати нулю лише у випадку, коли відповідні множники перед знаком логарифма теж дорівнюють нулю. Покажемо, яким способом можна інтеграл /1/ звести до суми інтегралів виду /2/.

Розглянемо квадратичну форму

$$S = A \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot B \cdot (x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2. \quad /3/$$

Перейдемо від системи координат XOY до X_1FY_1 , де

$F(x_0, y_0)$ - особлива точка. Виконуючи заміну змінних

$$x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0, \quad \text{одержимо}$$

$$I = \int_{-1-x_0}^{1-x_0} \int_{-1-y_0}^{1-y_0} (A \cdot x_1^2 + 2 \cdot B \cdot x_1 \cdot y_1 + C \cdot y_1^2)^{-1/2} dx_1 dy_1.$$

Далі зведемо квадратичну форму S до канонічного вигляду. З цієї метою виконаємо заміну змінних [1] /див. рисунок/:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cdot \cos \varphi - y'_1 \cdot \sin \varphi, \\ y_1 = x'_1 \cdot \sin \varphi + y'_1 \cdot \cos \varphi, \end{cases}$$

де $\varphi = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{(A-C)/2B}{\sqrt{((A-C)/2B)^2 + 1}} \right]$. Легко бачити, що $0 < \varphi < \pi/2$.

Причому $0 < \varphi < \pi/4$, якщо $\text{sign} [(A-C)/B] = 1$; $\varphi = \pi/4$,

якщо $\text{sign} [(A-C)/B] = 0$; $\pi/4 < \varphi < \pi/2$, якщо

$\text{sign} [(A-C)/B] = -1$.
В результаті $S = A' \cdot (x'_1)^2 + C' \cdot (y'_1)^2$, причому

$$I = \iint_G S^{-1/2} dx'_1 dy'_1,$$

де $A' = 0,5 \cdot (A+c + \text{sign } B \cdot (4 \cdot B^2 + (A-c)^2)^{1/2})$,

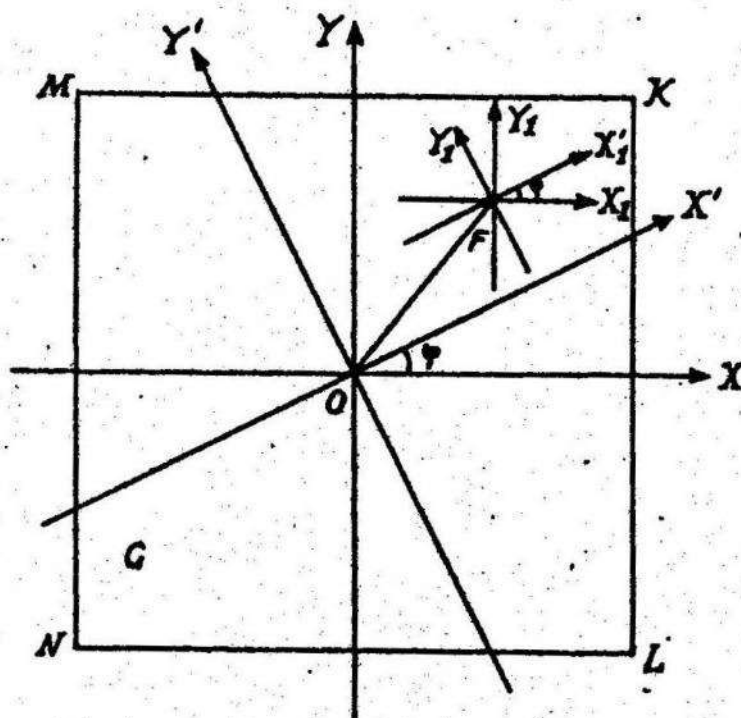
$c' = 0,5 \cdot (A+c - \text{sign } B \cdot (4 \cdot B^2 + (A-c)^2)^{1/2})$.

Оскільки для обчислення інтеграла /1/ застосовується формула /2/, то з необхідності $A > 0$ і $c > 0$. Тому обмеження, які накладаються на коефіцієнти квадратичної форми /3/, мають вигляд $A+c > 0$, $A \cdot c - B^2 > 0$.

Останні нерівності являють собою необхідні та достатні умови використання розглядуваного методу.

Зауважимо, що точка O в системі X', Y' має координати

$$\begin{cases} x'_{10} = -x_0 \cdot \cos \varphi - y_0 \cdot \sin \varphi, \\ y'_{10} = x_0 \cdot \sin \varphi - y_0 \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$



Виконавши заміну змінних $x'_1 = x' - x'_0$, $y'_1 = y' - y'_0$, одержимо

$$I = \iint_G [A' \cdot (x' - x'_0)^2 + c' \cdot (y' - y'_0)^2]^{-1/2} dx' dy',$$

причому координати особливої точки F у системі $X'OY'$ обчислюються за формулами

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 \cdot \cos \varphi + y_0 \cdot \sin \varphi, \\ y'_0 = -x_0 \cdot \sin \varphi + y_0 \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

Нарешті, зробивши згідно з працями [2, 4] заміну змінних $x' = (A')^{-1/2} \tilde{x}$, $y' = (c')^{-1/2} \tilde{y}$, одержимо

$$I = (A'c' - B'^2)^{-1/2} \iint_{\tilde{G}} [(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2]^{-1/2} d\tilde{x} d\tilde{y},$$

де область $\tilde{G}$ представляє собою деякий паралелограм. Особлива точка в системі $\tilde{X}\tilde{O}\tilde{Y}$ матиме координати

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = (A')^{1/2} \cdot (x_0 \cdot \cos \varphi + y_0 \cdot \sin \varphi), \\ \tilde{y}_0 = (c')^{1/2} \cdot (-x_0 \cdot \sin \varphi + y_0 \cdot \cos \varphi). \end{cases}$$

Оскільки у системі $X'OY'$ точки K, L, M і N лежать на колі радіуса $(2)^{1/2}$, то їх координати у системі $\tilde{X}\tilde{O}\tilde{Y}$

$$K = [(A')^{1/2} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi), (c')^{1/2} \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi)],$$

$$M = [(A')^{1/2} \cdot (\sin \varphi - \cos \varphi), (c')^{1/2} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi)],$$

$$N = [(A')^{1/2} \cdot (-\cos \varphi - \sin \varphi), (c')^{1/2} \cdot (\sin \varphi - \cos \varphi)],$$

$$L = [(A')^{1/2} \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi), (c')^{1/2} \cdot (-\cos \varphi - \sin \varphi)].$$

Запишемо рівняння прямих [1] LK, LN, NM, KM :

$$LK: \tilde{x} = (A')^{1/2} \cdot (c')^{-1/2} \cdot (\operatorname{ctg} \varphi)^{-1} \tilde{y} + (A')^{1/2} \cdot (\cos \varphi)^{-1},$$

$$LN: \tilde{x} = -(A')^{1/2} \cdot (c')^{-1/2} \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \tilde{y} - (A')^{1/2} \cdot (\sin \varphi)^{-1},$$

$$NM: \tilde{x} = (A')^{1/2} \cdot (c')^{-1/2} \cdot (\operatorname{ctg} \varphi)^{-1} \tilde{y} - (A')^{1/2} \cdot (\cos \varphi)^{-1},$$

$$KM: \tilde{x} = -(A')^{1/2} \cdot (c')^{-1/2} \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \tilde{y} + (A')^{1/2} \cdot (\sin \varphi)^{-1}.$$

Інтегрування по області $\tilde{G}$ здійснюється залежно від кута φ . Якщо $0 < \varphi < \pi/4$, то

$$I = (A \cdot C - B^2)^{1/2} \left(\int_{N\tilde{y}}^{N\tilde{y}} d\tilde{y} \int_{L\tilde{x}}^{LK} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} + \int_{N\tilde{y}}^{K\tilde{y}} d\tilde{y} \int_{NM}^{LK} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} + \int_{K\tilde{y}}^{M\tilde{y}} d\tilde{y} \int_{NM}^{KM} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} \right). \quad /4/$$

Якщо $\varphi = \pi/4$, то

$$I = (A \cdot C - B^2)^{-1/2} \left(\int_{L\tilde{y}}^0 d\tilde{y} \int_{LN}^{LK} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} + \int_0^{M\tilde{y}} d\tilde{y} \int_{NM}^{KM} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} \right). \quad /5/$$

Якщо $\pi/4 < \varphi < \pi/2$, то

$$I = (A \cdot C - B^2)^{-1/2} \left(\int_{L\tilde{y}}^{K\tilde{y}} d\tilde{y} \int_{LN}^{LK} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} + \int_{K\tilde{y}}^{N\tilde{y}} d\tilde{y} \int_{LN}^{KM} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} + \int_{N\tilde{y}}^{M\tilde{y}} d\tilde{y} \int_{NM}^{KM} \tilde{S}^{-1/2} d\tilde{x} \right). \quad /6/$$

Зауважимо, що $S = (\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2$, а $L\tilde{y}, N\tilde{y}, K\tilde{y}$ і $M\tilde{y}$ - відповідно ординати точок L, N, K і M у системі $\tilde{XO\tilde{Y}}$.

Описану методику використовували для обчислення інтеграла

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (4 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2)^{-1/2} dx dy,$$

значення якого відоме $[2, 4]$ і дорівнює 3,570. Застосування формул /4/-/6/ дає 3,571, що служить хорошим підтвердженням дієздатності відповідного програмного забезпечення.

1. Ильян В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., 1988. 2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., 1981. Т.1. 3. Остудін Б.А., Кірік О.Є. Чисельний розв'язок одного класу задач електростатики з використанням методу Боголюбова-Крилова // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1980. Вип. 16. С.36-40. 4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969. Т.1.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.89

УДК 517.946

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський

АНАЛІЗ ТОПОЛОГІЧНИХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ НЕЛІНІЙНИХ ПОВНІСТЮ ІНТЕГРОВАНІХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Нехай задана нелінійна динамічна система

$$\dot{u}_t = K[u] + \varepsilon P[u], \quad t \in \mathbb{R}, \quad /1/$$

де $u \in M \approx C^{(\infty)}(R; R)$ - гладкому нескінченномірному многовиду; $K: M \rightarrow T(M)$ - векторне поле на M , $P: M \rightarrow T(M)$ - його мале збурення; $\varepsilon > 0$. Припустимо додатково, що векторне поле $K: M \rightarrow T(M)$ гамільтонове на M і повністю інтегроване по Ліувілью. У цьому випадку відомо [2], що динамічна система /1/ при $\varepsilon = 0$ володіє нескінченно вкладеною в M ієрархією інваріантних нескінченномірних функціональних підмноговидів, що називаються багатосолітонними.

Легко показати стандартними методами джет-аналізу [3], що відповідні багатосолітонні розв'язки для /1/ при $\varepsilon = 0$ є сепаратрисними розв'язками для її особливих точок, тобто є її топологічними особливостями.

Зауваження 1. У випадку періодичності многовиду M ієрархія інваріантних скінченномірних многовидів, яка вказана вище, буде ізоморфна ієрархії скінченномірних торів.

При умові сильної гіперболічності особливих точок /1/ при $\varepsilon = 0$ ці топологічні особливості будуть являти собою так звані гетероклінічні траєкторії, або петлі, залежно від параметрів, що описують інваріантний многовид.

Виникає питання, за яких умов на збурення $P: M \rightarrow T(M)$ динамічна система буде володіти інваріантним многовидом /інва-

ріантним тором/, тобто не буде відбуватися руйнування петлевої гомоклінічної структури /1/ при $\varepsilon = 0$.

У цьому випадку справедлива теорема [1].

Теорема Мельникова. Якщо $\gamma_\varepsilon: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка деформація інваріантного функціоналу $\gamma_0 \in \mathcal{D}(M)$, яка є локальною константою динамічної системи /1/, то тоді може бути виконаним узагальнене співвідношення Мельникова:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \langle \text{grad } \gamma_0[u], \rho[u] \rangle = 0, \quad /2/$$

де величина $\varphi[u] = \text{grad } \gamma_0[u] \in T^*(M)$ задовольняє рівняння інваріантності Лакса:

$$L_K \varphi[u] = \varphi' K + K'^* \varphi = 0,$$

L_K – похідна Лі.

Зауваження 2. Оскільки скінченномірний інваріантний многовид описується $N \in \mathbb{Z}_+$ функціонально-незалежними інваріантними функціоналами γ_j^0 , $j = 1, N$, то необхідне виконання рівно $N \in \mathbb{Z}_+$ умов вигляду /2/ для /1/, який забезпечує неруйнування скінченномірного інваріантного многовиду /інваріантного тору/.

Умова /2/ дає гарантію того, що трансверсальні гомоклінічні орбіти для /1/ не утворюються і немає руйнування інваріантних многовидів.

І. М е л ь н и к о в В.К. Об устойчивости центра при периодическом по времени возмущении // Тр. Моск. мат. об-ва. М., 1963. С. 1-43. 2. М и т р о п о л ь с к и й Ю.А., Б о г о л ь б о в Н.Н. /мл./, П р и к а р п а т с к и й А.К., С а м о й л е н к о В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. К., 1987. 3. С а м о й л е н к о В.Г. Джет-анализ на гладких бесконечномерных функциональных многообразиях и его приложения для исследования интегрируемости нелинейных динамических систем. К., 1988. /Препринт /АН УССР. Ин-т математики, № 88.51/.

Стаття надійшла до редколегії 11.09.89

М.В.Жук

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ
МЕТОДОМ КАНТОРОВИЧА У ВИПАДКУ ОБЛАСТІ
СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Розглянемо рівняння

$$\mathcal{L}u \equiv -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \rho(x_1, x_2) u = f(x_1, x_2), \quad \rho_{ij} = \rho_{ji}, \quad /1/$$

при однорідній крайовій умові задачі Діріхле

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad /2/$$

де Γ - межа області, D складається з двох концентричних дуг і двох кривих /див. рисунок/.

Оператор $\mathcal{L}$ розглядаємов просторі $H = \mathcal{L}_2(D)$ з нормою $\|u\|^2 =$

$$= \iint_D u^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

За область визначення

$D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій

 $u(x_1, x_2)$ в області

$\bar{D} = D + \Gamma$, які задовольняють умову /2/.

Вважаємо, що оператор $\mathcal{L}$

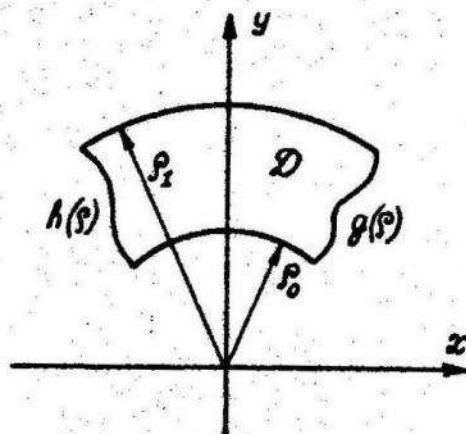
задовольняє умову рівномірної еліптичності

$$\mu_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_{ij}(x_1, x_2) \xi_i \xi_j \leq \eta_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad /3/$$

де μ_1 і $\eta_1 = \text{const} > 0$; ξ_1, ξ_2 - довільні дійсні числа;
/ x_1, x_2 / - довільна точка із $\bar{D}$.

Крім того, припускаємо, що функція $\rho(x_1, x_2)$ обмежена, тобто $\alpha \leq \rho(x_1, x_2) \leq \beta$, і при цьому виконується умова $\mu > 0$, де

$$\mu = \begin{cases} \mu_1, & \text{якщо } \alpha \geq 0, \\ \mu_1 + \alpha\beta, & \text{якщо } \alpha \leq 0. \end{cases} \quad /4/$$



У співвідношенні /4/ α - постійна, нерівності Фрідрікса [1].

Введемо простір Соболева $W_2^1(D)$ функцій $u(x_1, x_2)$, які мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом, і які задовольняють умову /2/. Норма у $W_2^1(D)$ визначається формулою

$$|u|_0^2 = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2. \quad /5/$$

Відзначимо, що простір $W_2^1(D)$ є енергетичним простором додатно визначеного оператора $Tu = -\Delta u$, що розглядається в H при $D(T) = D(\mathcal{L})$, а норма /5/ - його енергетична норма. При цьому

$$\|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} |u|_0, \quad \text{для довільного } u \in W_2^1(D), \quad [1].$$

Для довільних $u, v \in W_2^1(D)$ формально введемо білінійну форму

$$\mathcal{L}(u, v) = \iint_D \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \rho(x_1, x_2) uv \right] dx_1 dx_2. \quad /6/$$

Виходячи з /3/ і /4/, для довільного $u \in W_2^1(D)$ отримуємо

$$\mu |u|_0^2 \leq \mathcal{L}(u, u) \leq \eta |u|_0^2, \quad /7/$$

де

$$\eta = \begin{cases} \eta_1 + \beta x & , \text{ якщо } \beta \geq 0, \\ \eta_1 & , \text{ якщо } \beta \leq 0. \end{cases}$$

Узагальненням розв'язком задачі /1/-/2/ називається функція $u \in W_2^1$, для якої виконується тотожність

$$\mathcal{L}(u, v) = \iint_D f v dx_1 dx_2, \quad /8/$$

при довільній функції $v \in W_2^1$.

Перейдемо до полярної системи координат $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, у якій межа області D описується дугами радіусів $\rho = \rho_0$ і $\rho = \rho_1$, і достатньо гладкими кривими $\theta = g(\rho)$ і $\theta = h(\rho)$, причому $g(\rho) < h(\rho)$ при $0 < \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1$, тобто область D перетворюється в область

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ g(\rho) \leq \theta \leq h(\rho) \end{array} \right\}.$$

Відмітимо, що оскільки перетворення змінних $/x_1, x_2/$ на $/\rho, \theta/$ таке, що область D біоднозначно перетворюється в область D_1 , причому перетворення в обидві сторони здійснюється функціями неперервно диференційованими у відповідних замкнених областях зміни $/x_1, x_2/$ і $/\rho, \theta/$, то властивості функцій і операторів у полярних координатах зберігаються. Зауважимо, що при цьому простір $\dot{W}_2^1(D)$ перейде у простір $\dot{W}_2^1(D_1)$ з нормою

$$|u|_0^2 = \iint_{D_1} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\rho d\theta,$$

а задача /1/ запишеться у вигляді

$$\Delta u = -\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(\rho_{ij}' \frac{\partial u}{\partial x_j'} \right) + \rho u = f, \quad /1'/$$

$$\rho_{ij}' = \rho \sum_{\tau=1}^2 \sum_{s=1}^2 \rho \frac{\partial x_i'}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial x_j'}{\partial x_s}, \quad \rho = x_1', \quad \theta = x_2'.$$

Наближений розв'язок задачі /1/-/2/ згідно з методом Канторовича шукаємо у вигляді

$$u_n(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^n c_k(\rho) \varphi_k(\rho, \theta), \quad /9/$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(\rho), h(\rho)]$ функції $\varphi_k(\rho, \theta)$ задовольняють умови

$$\varphi_k(\rho, \theta) \Big|_{\theta=g(\rho)} = \varphi_k(\rho, \theta) \Big|_{\theta=h(\rho)} = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad /10/$$

і їх вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{\chi_\ell(\rho) \varphi_k(\rho, \theta)\}$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі $\dot{W}_2^1(D_1)$; при цьому функції системи $\{\chi_\ell(\rho)\}$ задовольняють умови

$$\chi_\ell(\rho) \Big|_{\rho=g_0} = \chi_\ell(\rho) \Big|_{\rho=h_0} = 0, \quad \ell=1, 2, \dots \quad /11/$$

Невідомі коефіцієнти $c_k(\rho)$ визначаємо із системи

$$\int_{g(\rho)}^{h(\rho)} (\Delta u_n - f) \varphi_i(\rho, \theta) d\theta = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad /12/$$

$$c_k(\rho) \Big|_{\rho=g_0} = c_k(\rho) \Big|_{\rho=h_0} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad /13/$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду

$$u_n(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^n a_k(\rho) \varphi_k(\rho, \theta).$$

Нехай для деякої функції $u_n(\rho, \theta) \in H_n \cap \dot{W}_2'(D_1)$ справедлива тотожність

$$\mathcal{L}(u_n, v_n) = \iint_{D_2} \rho f v_n d\rho d\theta,$$

в якій $v_n(\rho, \theta)$ довільна функція з $H_n \cap \dot{W}_2'(D_1)$. Тоді функція $u_n(\rho, \theta)$ називається узагальненим розв'язком системи методу Канторовича /12/-/13/.

Аналогічно, як і в праці [2], доводиться наступна теорема.

Теорема. Якщо виконуться умови /7/, то для довільної функції $f \in H$ задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений розв'язок $u \in \dot{W}_2'$; при довільному n система методу Канторовича, /12/-/13/ має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(\rho, \theta) \in H_n \cap \dot{W}_2'(D_1)$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u - u_n|_0 \leq c |u - v_n|_0, \quad /14/$$

де $c = \sqrt{\frac{2}{\mu}}$, а елемент $v_n = \sum_{k=1}^n a_k(\rho) \varphi_k(\rho, \theta) \in H_n \cap \dot{W}_2'(D_1)$ вибираємо таким, що реалізує мінімум функціоналу $|u - v_n|_0$.

Якщо координатну систему функцій $\{\varphi_k(\rho, \theta)\}$ вибрати в одному із виглядів

$$\bar{\varphi}_k(\rho, \theta) = \sin \frac{k\pi(\theta - g(\rho))}{h(\rho) - g(\rho)}, \quad \tilde{\varphi}_k(\rho, \theta) = \theta^{k'}(\theta - g(\rho))(\theta - h(\rho)), \quad /15/$$

$k=1, 2, \dots,$

то при умові неперервності перших похідних узагальненого розв'язку вихідної задачі та існування других похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}$, сумованих з квадратом, буде справедлива оцінка

$$|u - u_n|_0 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Накладаючи умови на похідні більш високого порядку, можна отримати більш високий порядок малості [3].

1. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 2. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование скорости сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. 3. К а н т о р о в и ч Л.В., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1962.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.89

УДК 519.6

Л.Л.Роман

ЗБІЖНІСТЬ РЕКУРСИВНОГО МЕТОДУ З ПАМ'ЯТТЮ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Для розв'язування задачі

$$f(x) \rightarrow \min, x \in E^n$$

/1/

E^n -мірний евклідів простір, дослідимо метод

$$x_0 = z_0^{(0)} = \bar{x}_0,$$

$$z_n^{(i+1)} = z_n^{(i)} - [f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(z_n^{(i)}),$$

$$i = 0, 1, \dots, t-1,$$

$$x_{n+1} = z_{n+1}^{(0)} = z_n^{(t)},$$

$$\bar{x}_{n+1} = x_{n+1} - \frac{1}{2} [f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(x_n),$$

/2/

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

побудований на базі методу [1, 3].

Достатні умови збіжності методу дає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ сильно випукла на E^n , $f \in C^3$ і мають місце умови $\|f'''(x)\| \leq R$,

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \leq L \|x - y\|, x, y \in E^n, R, L = \text{const} > 0.$$

Початкове наближення x_0 вибирається так, що

$$q_0 / (1 - q_0(3 + q_0)/2) \leq 1, q = Cq_0 < 1, q_0 = \ell \|f'(x_0)\| / m,$$

де $\frac{m}{2} = \alpha > 0$ - константа сильної випуклості,

$$\ell^2 = \frac{5}{4} \frac{R^2}{m^2} + \frac{2}{3} \frac{L}{m}, C^{t+1} = \left[\frac{R}{2\ell m} (3 + q_0) \right]^{t-1}.$$

Тоді послідовність X_n , визначена по /2/, збігається до точки мінімуму X_* функції $f(x)$ на E^n , при цьому має місце оцінка

$$\|X_n - X_*\| \leq \frac{1}{c\ell} q^{D_n}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad /3/$$

де

$$D_0=1, \quad D_1=t+1, \quad D_k=(t+1)D_{k-1}+D_{k-2}, \quad k=2,3,\dots \quad /4/$$

Порядок збіжності послідовності /2/ визначається із співвідношення

$$\rho = t+1 + \frac{1}{\rho}. \quad /5/$$

Доведення. Існування і єдиність точки X_* випливає із властивостей сильно випуклих функцій [2]. Доведемо оцінку /3/, попередньо показавши

$$\begin{aligned} \|f'(X_k)\| &\leq q^{D_k-1} \|f'(X_0)\|, \\ \|X_{k+1} - X_k\| &\leq \frac{2}{m} \|f'(X_k)\|, \\ \|\bar{X}_{k+1} - \bar{X}_k\| &\leq \frac{5}{2} \frac{\|f'(X_k)\|}{m}, \\ k &= 0,1,2,\dots \end{aligned} \quad /6/$$

Відзначимо, що із /2/ випливає

$$f'(Z_0^{(n)}) = f'(Z_0^{(n)}) - f'(X_0) - f''(\bar{X}_0)(Z_0^{(n)} - X_0). \quad /7/$$

Використавши розклад $f'(Z_0^{(n)})$ за формулою Тейлора у правій частині /7/ і провівши відповідні перетворення, одержимо

$$f'(Z_0^{(n)}) = \int_0^1 (1-t) f''(X_0 + t(Z_0^{(n)} - X_0))(Z_0^{(n)} - X_0) dt. \quad /8/$$

Із властивостей сильно випуклих функцій [2] випливає, що

$$\| [f''(x)]^{-1} \| \leq 1/m, \quad x \in E^n$$

Врахувавши цей факт і умови теореми, одержимо оцінку

$$\|f'(Z_0^{(n)})\| \leq \frac{R}{2m^2} \|f'(X_0)\|^2. \quad /9/$$

Скориставшись формулою

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 f'(y + t(x-y))(x-y) dt$$

і /2/, запишемо

$$\begin{aligned} f'(z_0^{(i+1)}) &= f'(z_0^{(i)}) + \int_0^1 f''(z_0^{(i)} + t(z_0^{(i+1)} - z_0^{(i)})) dt (z_0^{(i+1)} - z_0^{(i)}) = \\ &= \int_0^1 [f''(\bar{x}_0) - f''(z_0^{(i)} + t(z_0^{(i+1)} - z_0^{(i)}))] [f'(\bar{x}_0)] f'(z_0^{(i)}) dt. \end{aligned}$$

Згідно з умовами теореми одержуємо

$$\|f'(z_0^{(i+1)})\| \leq \frac{R}{m} \left[\|z_0^{(i)} - \bar{x}_0\| + \frac{1}{2} \|z_0^{(i+1)} - z_0^{(i)}\| \right] \cdot \|f'(z_0^{(i)})\|. \quad /10/$$

Із /10/ і умов теореми маємо оцінки

$$\begin{aligned} \|f'(z_0^{(2)})\| &\leq \left(\frac{R}{2m^2}\right)^2 (3+q_0) \|f'(x_0)\|^3 \\ \|f'(z_0^{(t)})\| &\leq \left(\frac{R}{2m^2}\right)^t (3+q_0)^{t-1} \|f'(x_0)\|^{t+1}. \end{aligned} \quad /11/$$

Тепер одержимо оцінки для точки x_1 .

Легко помітити, що

$$\|f'(x_1)\| = \|f'(z_0^{(t)})\| \leq C^{t+1} \frac{R}{2m^2} \|f'(x_0)\| \leq \frac{C}{2} q_0^t \|f'(x_0)\| = q_0^{D_1-1} \|f'(x_0)\|,$$

оскільки

$$\frac{R}{2 \cdot m} \leq \frac{R}{m \sqrt{\frac{5}{4} \frac{R^2}{m^2}}} < 1;$$

і

$$\frac{C}{2} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{R}{2 \ell m} (3+q_0) \right]^{\frac{1}{t+1}} \leq \frac{1}{2} \sqrt[t+1]{2} < 1.$$

Крім того,

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| &\leq \|z_0^{(t)} - z_0^{(t-1)}\| + \dots + \|z_0^{(1)} - x_0\| \leq \frac{1}{m} \left[1 + \frac{1}{2} q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 (3+q_0) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} q_0\right)^{t-1} (3+q_0)^{t-2} \right] \|f'(x_0)\| \leq \left[1 + \frac{1}{2} \frac{q_0}{1 - \frac{q_0}{2} (3+q_0)} \right] \cdot \frac{\|f'(x_0)\|}{m} < \frac{2}{m} \|f'(x_0)\|, \\ \|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| &\leq \|\bar{x}_1 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{2} \frac{\|f'(x_1)\|}{m} + \frac{2}{m} \|f'(x_0)\| \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{\|f'(x_0)\|}{m}. \end{aligned}$$

Враховавши, що сам метод починає працювати з точки x_1 , перевіримо виконання умов /6/ для точки x_2 . Аналогічно /8/.

для $f'(z_i^{(n)}), f'(\bar{x}_i)$ одержимо

$$\begin{aligned} f'(z_i^{(n)}) &= \frac{1}{2} f''(x_i) (z_i^{(n)} - x_i)^2 - f''(x_i) (\bar{x}_i - x_i) + \delta_{1,1} - \delta_{2,1}, \\ \delta_{1,1} &= \int_0^1 (1-t) [f''(x_i + t(z_i^{(n)} - x_i)) - f''(x_i)] (z_i^{(n)} - x_i)^2 dt, \\ \delta_{2,1} &= \int_0^1 [f''(x_i + t(\bar{x}_i - x_i)) - f''(x_i)] (\bar{x}_i - x_i) (z_i^{(n)} - x_i) dt. \end{aligned} \quad /12/$$

Із врахуванням /2/ із /12/ слідує

$$\begin{aligned} f'(z_i^{(n)}) &= \frac{1}{2} f'''(x_i) [f''(\bar{x}_0)]^{-1} f'''(\theta_0) (\bar{x}_0 - \bar{x}_i) (z_i^{(n)} - x_i)^2 + \delta_{1,1} - \delta_{2,1}, \\ \bar{x}_i &\leq \theta_0 \leq \bar{x}_0. \end{aligned} \quad /13/$$

Оцінимо /13/, враховуючи умови теореми

$$\begin{aligned} \|f'(z_i^{(n)})\| &\leq \frac{R^2}{2m} \|\bar{x}_i - \bar{x}_0\| \|z_i^{(n)} - x_i\|^2 + \frac{L}{6} \|z_i^{(n)} - x_i\|^3 + \frac{L}{2} \|\bar{x}_i - x_i\| \|z_i^{(n)} - x_i\| \leq \\ &\leq \left[\frac{5}{4} \cdot \frac{R^2}{m^2} + \frac{L}{m^3} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) q^{D_i-1} \right] \|f'(x_0)\| \cdot \|f'(x_i)\|^2 \leq \frac{C^2}{m^2} \|f'(x_0)\| \cdot \|f'(x_i)\|^2. \end{aligned} \quad /14/$$

Провівши перетворення аналогічно. /10/ і використавши умови теореми, одержимо

$$\begin{aligned} \|f'(z_i^{(2)})\| &\leq \frac{R}{2m^2} (3+q_0) \frac{C^2}{m^2} \|f'(x_0)\| \cdot \|f'(x_i)\|^3, \\ \|f'(z_i^{(t)})\| &\leq \left[\frac{R}{2m^2} (3+q_0) \right]^{t-1} \frac{C^2}{m^2} \|f'(x_0)\| \cdot \|f'(x_i)\|^{t+1}. \end{aligned} \quad /15/$$

Звідси

$$\begin{aligned} \|f'(x_2)\| = \|f'(z_i^{(t)})\| &\leq C^{t+1} \left(\frac{C}{m} \|f'(x_0)\| \right)^{t+1} q^{(t+1)(D_i-1)} \|f'(x_0)\| \leq \\ &\leq q^{(t+1)} q^{(t+1)(D_i-1)} \|f'(x_0)\| = q^{(t+1)D_i} \|f'(x_0)\| = q^{D_i-1} \|f'(x_0)\|. \end{aligned} \quad /16/$$

Крім цього, запишемо

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_i\| &\leq \|z_i^{(t)} - z_i^{(t-1)}\| + \dots + \|z_i^{(1)} - x_i\| \leq \frac{\|f'(x_i)\|}{m} \left(1 + \frac{1}{2} q_0^2 + \dots + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{2} \right)^{t-1} q_0^t (3+q_0)^{t-2} \right) \leq \frac{\|f'(x_i)\|}{m} \left(1 + \frac{q_0}{2} \frac{q_0}{1 - \frac{q_0}{2}(3+q_0)} \right) \leq 2 \frac{\|f'(x_i)\|}{m}, \\ \|\bar{x}_2 - \bar{x}_i\| &\leq \frac{1}{2} \frac{\|f'(x_2)\|}{m} + \frac{3}{2} \frac{\|f'(x_i)\|}{m} + \frac{1}{2} \frac{\|f'(x_i)\|}{m} \leq \frac{5}{2} \frac{\|f'(x_i)\|}{m}. \end{aligned}$$

Використавши метод математичної індукції, одержимо оцінки

$$\|f'(x_n)\| \leq \left[\frac{R}{2m^2} (3+q_0) \right]^{n-1} \frac{L^2}{m^2} \|f'(x_{n-2})\| \|f'(x_{n-1})\|^{L+1} \leq$$

$$\leq q^{D_n-1} \|f'(x_0)\| \leq \frac{m}{cL} q^{D_n},$$

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2 \frac{\|f'(x_{n-1})\|}{m},$$

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-2}\| \leq \frac{5}{2} \frac{\|f'(x_{n-1})\|}{m}. \quad /17/$$

Отже, нерівності /6/ доведені.

Доведемо оцінку /3/. З властивостей сильно випуклих функцій [2]

маємо $\|x_n - x_*\| \leq \|f'(x_n)\| / m$.

Врахувавши першу оцінку /17/, одержимо оцінку /3/

$$\|x_n - x_*\| \leq q^{D_n} / cL.$$

Із /17/ можемо записати рівняння /5/ для визначення порядку збіжності методу. Теорема доведена.

1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1968. № 5. С. 38-39. 2. В а с и л ь е в Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980. 3. Щ е р б и н а Ю.М., Г о л у б Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам'яттю для мінімізації функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984. Вип. 22. С.3-7.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.89

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо таку нелінійну граничну задачу:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y = a(x)f(y) + g(x), \quad /1/$$

$$y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B; \quad /2/$$

$$A^2 + B^2 \neq 0, \quad |\alpha| < +\infty, \quad |\beta| < +\infty.$$

Будемо припускати, що задача /1/-/2/ має єдиний розв'язок, тобто для цієї задачі виконуються відповідні умови теорем існування та єдиності [1]. Зокрема, будемо припускати $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $a(x)$ неперервними на проміжку $[\alpha, \beta]$, причому $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, а $f(y)$ неперервна при $-\infty < y < +\infty$ і задовольняє умову Ліпшица для будь-яких y та $\tilde{y}$ з області визначення

$$|f(y) - f(\tilde{y})| \leq N |y - \tilde{y}|. \quad /3/$$

На основі /1/-/2/ введемо таку лінійну задачу:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\tilde{y}}{dx} \right] - [q(x) + \kappa a(x)] \tilde{y} = q(x), \quad /4/$$

$$\tilde{y}(\alpha) = A, \quad \tilde{y}(\beta) = B; \quad /5/$$

$$\text{де } \kappa = \frac{f(A)}{A}, \quad , \text{ коли } A \neq 0; \quad /6/$$

$$\text{або } \kappa = \frac{f(B)}{B}, \quad , \text{ коли } B \neq 0. \quad /6'/$$

Звичайними міркуваннями легко довести таку нерівність для рівниці розв'язків $y(x)$ та $\tilde{y}(x)$ задач /1/-/2/ та /4/-/5/ відповідно [2; 3]:

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \frac{[N + |\frac{f(A)}{A}|] \cdot C}{1 - NC} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |\tilde{y}(x) - A|, \quad /7/$$

де

$$C = \max_{x \in [\alpha, \beta]} \int_{\alpha}^{\beta} |a(x)| \cdot |G(x, \xi)| d\xi,$$

$G(x, \xi)$ - функція Гріна задачі

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x) y(x) = q(x); \quad y(\alpha) = y(\beta) = 0.$$

При виведенні /7/ використана умова $NC < 1$, виконання якої також входить у число обмежень на параметри задачі /1/-/2/, тобто на функції, граничні умови та довжину проміжку $[\alpha, \beta]$.

Якщо $A = 0$, то в /4/ та /7/ слід сталу A замінити на B .

Зовсім аналогічно можна побудувати лінеаризований аналог для граничної задачі

$$\frac{d}{dx} \left[\rho(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y = a(x)f(y') + g(x); \quad /8/$$

$$y'(\alpha) = A, \quad y'(\beta) = B, \quad A^2 + B^2 \neq 0. \quad /9/$$

У цьому випадку наближений розв'язок можна ввести таким чином:

$$\frac{d}{dx} \left[\rho(x) \frac{d\tilde{y}}{dx} \right] - q(x)\tilde{y} - a(x)K\tilde{y} = g(x); \quad /10/$$

$$\tilde{y}(\alpha) = A, \quad \tilde{y}'(\beta) = B, \quad /11/$$

де $K = \frac{f(A)}{A}$, , коли $A \neq 0$,

або $K = \frac{f(B)}{B}$, , коли $B \neq 0$.

Всі запропоновані тут наближені схеми проходять також у випадку, коли граничні умови мають вигляд

$$y'(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B$$

або $y(\alpha) = A, \quad y'(\beta) = B$.

Близькість наближеного та точного розв'язків при цьому оцінюється за вищевказаною схемою. На закінчення відзначимо, що дана стаття є продовженням праць [2; 3].

Приклад. Розглянемо нелінійну задачу

$$y'' + 9y = 3(2y)^{\frac{1}{3}}; \quad /12/$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad /13/$$

Точним розв'язком /12/-/13/ є функція

$$y = \frac{1}{2} \sin^3 x. \quad /14/$$

Наближений розв'язок /12/-/13/ за вищевказаною лінеаризацією
будується на основі такого рівняння:

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y} = 0; \quad /15/$$

$$\tilde{y}(0) = 0, \quad \tilde{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad /16/$$

Тому

$$\tilde{y} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi \sqrt{3}}{2}} \sin \sqrt{3} x. \quad /17/$$

Близькість цих розв'язків оцінюється функцією

$$Z(x) = \frac{1}{2} \left(\sin^3 x - \frac{\sin \sqrt{3} x}{\sin \frac{\pi \sqrt{3}}{2}} \right).$$

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциаль-
ным уравнениям. М., 1961. 2. Мартиненко Марія Д.,
Мартиненко Михайло Д. Про модифікований метод екві-
валентної лінеаризації для звичайних диференціальних рівнянь
першого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988.
Вип. 29. С.40-42. 3. Мартиненко Марія Д., Марти-
ненко Михайло Д. Еквівалентна лінеаризація для рівнянь
Льснара // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 29.
С.42-45.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.88

УДК 519.21

І.Д.Квіт

СПОДІВАНЕ ЗАЛИШКОВЕ НАПРАЦОВАННЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ з функцією розподілу
ймовірностей $P\{\xi \leq t\} = F(t)$ і густиною $p(t) = F'(t)$,
яка описує напрацювання технічної одиниці до відмови, має обме-
жене математичне сподівання

$$E\xi = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} \{1 - F(t)\} dt = \int_0^{\infty} R(t) dt, \quad /1/$$

де $R(t) = 1 - F(t)$ - надійність у момент t .

Тантисем τ_{ω} порядку ω назовемо розв'язок рівняння

$$\int_0^{\tau_{\omega}} R(t) dt = \omega \int_{\tau_{\omega}}^{\infty} R(t) dt, \quad \omega > 0. \quad /2/$$

Але, згідно з означенням /1/,

$$\int_0^{\tau_{\omega}} R(t) dt + \int_{\tau_{\omega}}^{\infty} R(t) dt = E \xi \quad /3/$$

Таким чином, тантіль τ_{ω} поділяє середнє напрацювання на дві частини:

$$S_1(\omega) = \int_0^{\tau_{\omega}} R(t) dt \quad /4/$$

- напрацювання за час τ_{ω} та

$$S_2(\omega) = \int_{\tau_{\omega}}^{\infty} R(t) dt \quad /5/$$

- сподіване залишкове напрацювання після моменту τ_{ω} .

Враховуючи позначення /4/ і /5/, запишемо тотожність /3/ у вигляді

$$\frac{S_1(\omega)}{E \xi} + \frac{S_2(\omega)}{E \xi} = 100\%, \quad /6/$$

де перший доданок виражає напрацювання за час τ_{ω} , а другий - сподіване залишкове напрацювання в процентах до середнього напрацювання.

Рівність /2/, записана у вигляді

$$\frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)} = \omega : 1, \quad /7/$$

вказує на те, що пряма $t = \tau_{\omega}$ поділяє площу, обмежену графіком надійності $R(t)$ та осями координат, на дві частини: ліву та праву, у пропорції $\omega : 1$. Зокрема, при $\omega = 1/9, 1/3, 1, 3$ і 9 відповідно маємо перший децильний тантіль $\tau_{1/9}$, перший квартильний тантіль $\tau_{1/3}$, медіанний тантіль τ_1 , третій квартильний тантіль $\tau_{4/3}$ і дев'ятий децильний тантіль τ_9 .

Приклад. Нехай

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\nu}}, \quad t > 0, (\theta > 0, \nu > 0).$$

Тоді

$$E \xi = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\nu}} dt = \theta \Gamma\left(\frac{1}{\nu} + 1\right), \quad S_1(\omega) = \frac{\theta}{\nu} \gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_{\omega}}{\theta}\right)^{\nu}\right), \quad S_2(\omega) = \frac{\theta}{\nu} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_{\omega}}{\theta}\right)^{\nu}\right),$$

де

$$\gamma(a, t) = \int_0^t e^{-x} x^{a-1} dx, \quad \Gamma(a, t) = \int_t^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

- неповні гама функції: $\gamma(a, t) + \Gamma(a, t) = \Gamma(a)$ - повна
 гама функція; $a > 0$. Тангентне рівняння /7/

$$\frac{\gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\nu\right)} = \omega$$

зводиться до вигляду

$$\frac{\gamma\left(\frac{1}{\nu}, \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} = \frac{\omega}{\omega+1}.$$

Зліва маємо функцію розподілу ймовірностей випадкової змінної $\chi_{\frac{1}{\nu}}$

$$\mathcal{P}\left\{\chi_{\frac{1}{\nu}} \leq \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\nu\right\}.$$

Але випадкова змінна $\chi_{\frac{1}{\nu}}$ еквівалентна випадковій змінній $\frac{1}{\nu} F_{\frac{2}{\nu}, \infty}$. Таким чином,

$$\mathcal{P}\left\{F_{\frac{2}{\nu}, \infty} \leq \nu \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\nu\right\} = \frac{\omega}{\omega+1}.$$

Звідси

$$\mathcal{P}\left\{F_{\frac{2}{\nu}, \infty} \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right) > \left[\nu \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\nu\right]^{-1}\right\} = \frac{\omega}{\omega+1}, \quad 0 < \omega < 1,$$

$$\mathcal{P}\left\{F_{\frac{2}{\nu}, \infty} \left(\frac{1}{\omega+1}\right) > \nu \left(\frac{\tau_\omega}{\theta}\right)^\nu\right\} = \frac{1}{\omega+1}, \quad \omega \geq 1.$$

/8/

Співвідношення /8/ дозволяють використати таблиці [1] для визначення тангенту τ_ω заданого порядку ω .

Зазначимо, що при $\nu = 1$, тобто у випадку експонентного напрацювання

$$F_\xi = \theta, \quad S_1(\omega) = \theta(1 - e^{-\frac{\tau_\omega}{\theta}}), \quad S_2(\omega) = \theta e^{-\frac{\tau_\omega}{\theta}},$$

і тангентне рівняння /7/

$$e^{\frac{\tau_\omega}{\theta}} - 1 = \omega$$

має розв'язок

$$\tau_\omega = \theta \ln(1 + \omega).$$

/9/

При $\nu = 2$, тобто у випадку напрацювання Релея, обчислення виразів /4/ і /5/ зводиться до знаходження вартості відповідного

інтеграла стандартної нормальної випадкової змінної або інтеграла похибок. Наприклад, для деяких ω тантилі τ_ω і відповідні їм сподівані залишкові напрацювання $S_2(\omega)$ та $S_2(\omega)/E\xi$ при $\sigma = 10000$ і $\nu = 2$ подано нижче:

ω	τ_ω	$S_2(\omega)$	$\frac{S_2(\omega)}{E\xi}, \%$
1/9	889	7976	90
1/4	1791	7090	80
1/3	2253	6735	75
1/2	2961	6026	67
1	4769	4431	50
2	6900	3013	33
3	8134	2233	25
4	9062	1772	20
9	11631	886	10

Зокрема, напрацювання за час 4769 таке ж, як і сподіване залишкове напрацювання після моменту 4769.

Зауважимо, що поняття тантилю, визначене рівнянням /2/, переноситься на варіаційний ряд. Справді, нехай

$$t_1, \dots, t_j, \dots, t_n \quad /10/$$

варіаційний ряд незалежних спостережень над абсолютно неперервною додатною випадковою змінною ξ , що має обмежене математичне сподівання. Емпіричний аналог надійності $R(t)$, що фігурує у формулі /2/, згідно з літературою [2], задається виразом

$$\hat{R}(t) = 1 - \frac{0,7}{n+0,4} \frac{t}{t_1}, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

$$\hat{R}(t) = \frac{n+0,7-j}{n+0,4} - \frac{1}{n+0,4} \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad (j=1, \dots, n-1). \quad /11/$$

Площа, обмежена графіком функції /11/, складається з n суміжних трапецій. Площа S_K однієї трапеції дорівнює

$$S_K = \frac{a_K + a_{K+1}}{2} (t_{K+1} - t_K), \quad (K=0, 1, \dots, n-1).$$

де

$$\alpha_k = \frac{n+0,7-k}{n+0,4}, \quad (k=1, \dots, n-1), \quad \alpha_0=1, \quad t_0=0.$$

Тантилем τ_ω порядку ω варіаційного ряду /10/ назовемо елемент t_j , який задовольняє систему нерівностей

$$\sum_{k=0}^{j-2} S_k < \omega \sum_{k=j-1}^{n-1} S_k, \quad \sum_{k=0}^{j-1} S_k \geq \omega \sum_{k=j}^{n-1} S_k, \quad \omega > 0. \quad /12/$$

Після спрощення система нерівностей /12/ набуває вигляду

$$\begin{aligned} (t_1 + \dots + t_{j-1}) + (n-j+1+0,2)t_{j-1} &< \omega \{[(t_j - t_{j-1}) + \dots + (t_n - t_{j-1})] + 0,2(t_n - t_{j-1})\}, \\ (t_1 + \dots + t_j) + (n-j+0,2)t_j &\geq \omega \{[(t_{j+1} - t_j) + \dots + (t_n - t_j)] + 0,2(t_n - t_j)\}, \quad \omega > 0. \end{aligned} \quad /13/$$

Знехтувавши у нерівності /13/ доданками з коефіцієнтом 0,2, дістанемо систему нерівностей з праці [3]

$$\begin{cases} (t_1 + \dots + t_{j-1}) + (n-j+1)t_{j-1} < \omega [(t_j - t_{j-1}) + \dots + (t_n - t_{j-1})], \\ (t_1 + \dots + t_j) + (n-j)t_j \geq \omega [(t_{j+1} - t_j) + \dots + (t_n - t_j)], \quad \omega > 0. \end{cases} \quad /14/$$

Звідси $\tau_\omega = t_j$. Зокрема, якщо варіаційний ряд /10/ представляє напрацювання до відмови n однотипних технічних одиниць і якщо $\tau_1 = t_j$, то дістанемо тотожність

$$[(t_1 + \dots + t_j) + (n-j)t_j] + [(t_{j+1} - t_j) + \dots + (t_n - t_j)] = t_1 + \dots + t_n. \quad /15/$$

Тотожність /15/ вказує на те, що повне напрацювання n однотипних технічних одиниць $S = t_1 + \dots + t_n$ складається з $S_1(t) = [(t_1 + \dots + t_j) + (n-j)t_j]$ - сумарного напрацювання за час t_j та $S_2(t) = [(t_{j+1} - t_j) + \dots + (t_n - t_j)]$ - залишкового напрацювання після моменту t_j . Тотожність /15/, поділена сторонами на $t_1 + \dots + t_n$, виражає відповідне напрацювання в процентах.

Приклад. Знайти медіанний тантиль варіаційного ряду
 21 37 51 64 77 90 103 118 134 152 176 205 256
 Тотожність /15/ для даного варіаційного ряду набуває
 вигляду

$$[(t_1 + \dots + t_4) + 9t_4] + [(t_5 - t_4) + \dots + (t_{13} - t_4)] = t_1 + \dots + t_{13},$$

тобто $749 + 735 = 1484$. Отже, медіанний тантиль $\tau_7 = t_4 = 64$.
 Сумарне напруцювання за час $t = 64$ наближено таке ж, як і
 залишкове напруцювання після моменту $t = 64$.

1. Мардя К., Земроц П. Таблиці F -розподіле-
 ний. М., 1984. 2. Квіт І.Д. Методичні вказівки до курсу
 "Теорія надійності". Львів, 1982. 3. Квіт І.Д. Тантиль //
 Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип.31. С.33-35.

Стаття надійшла до редколегії 21.12.88

УДК 519.21

Р.Т.Мисак

ЗНАХОДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ МАТРИЦІ-РЕГУЛЯРИЗАТОРА ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Найбільш розповсюдженою моделлю обробки даних результатів
 спостережень є лінійна модель

$$\vec{y} = X\vec{c} + \vec{\varepsilon}, \quad /1/$$

де $\vec{y}$ - n -мірний вектор спостережень, $X = (x_{ij}), j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}$ -
 задана матриця; $\vec{\varepsilon}$ - n -мірний випадковий вектор похибок,
 $M\vec{\varepsilon} = 0, M\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}' = R$. Крім того, нехай невідомий m -мірний век-
 тор $\vec{c}$ задовольняє нерівність

$$(Q, \vec{c}, \vec{c}) < \gamma,$$

де Q - додатно визначена матриця розміру $m \times m, 0 < \gamma < \infty$.
 Надалі будемо вважати, що розмірності векторів і матриць є та-
 кими, при яких мають місце всі операції матричної алгебри.

Але в деяких реальних задачах велику складність становить
 проблема домогтися того, щоб випадковий вектор $\vec{\varepsilon}$ задоволь-
 няв накладені на нього умови або визначення коваріаційної матри-

ні R . Тому будемо вважати, що $\bar{\epsilon}$ обмежений і належить деякій області Ω_{ϵ} евклідового простору.

Припустимо, що невідомий вектор $\bar{c}$ і вектор похибок $\bar{\epsilon}$ задовольняють умову

$$(Q_1 \bar{c}, \bar{c}) + (Q_2 \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}) \leq \gamma, \quad /2/$$

де Q_1, Q_2 - додатно визначені матриці. Позначимо через L множину додатно визначених дійсних симетричних матриць, R_1 - множину дійсних матриць, R_2 - множину дійсних векторів відповідних розмірностей; $L \subset R_1$.

Розглянемо регуляризовану оцінку $\bar{c}$ методу найменших квадратів у випадку поганої обумовленості системи /1/

$$\tilde{\bar{c}} = (A + X'X)^{-1} X' \bar{y}, \quad /3/$$

де додатно визначена симетрична матриця-регуляризатор A така, що $A + X'X > 0$ і мінімізує величину $\|\tilde{\bar{c}} - \bar{c}\|^2$, $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$.

Теорема. Якщо Q невинроджена матриця, де

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},$$

то $\min_{A \in L} \max_{\bar{\epsilon}, \bar{c}: (Q_1 \bar{c}, \bar{c}) + (Q_2 \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}) \leq \gamma} \|\tilde{\bar{c}} - \bar{c}\|^2 = \gamma \lambda_1 \{\hat{B} Q^{-1} \hat{B}'\}$, /4/

$$\hat{B} = [(\hat{A} + X'X)^{-1} \hat{A}, -(\hat{A} + X'X)^{-1} X'], \quad Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix}; \quad Q_1, Q_2 \in R,$$

де λ_1 - максимальне власне число матриці $\hat{B} Q^{-1} \hat{B}'$. Якщо власне число λ_1 однократне для всіх $A \in G$, де G - множина розв'язків рівняння /4/, то його розв'язки є розв'язками рівняння

$$(X'X \tilde{Q}_1 \hat{A} + X' \tilde{Q}_2 X)(\hat{A} + X'X)^{-1} \bar{e}, \bar{e}' = 0, \quad /5/$$

де $\bar{e}$ - власний вектор, що відповідає власному числу λ_1 .

Доведення. Будемо шукати оцінку невідомого вектора $\bar{c}$ у вигляді лінійного перетворення $\bar{y}$:

$$\hat{\bar{c}} = T \bar{y} + \bar{t}.$$

Розглянемо мінімаксну задачу

$$\min_{T \in R_1, \bar{t} \in R_2} \max_{\bar{c}, \bar{t}: (Q_1 \bar{c}, \bar{c}) + (Q_2 \bar{t}, \bar{t}) \leq \gamma} \|\bar{c} - T\bar{y} - \bar{t}\|^2 =$$

$$= \min_{T \in R_1, \bar{t} \in R_2} \max_{\bar{c}, \bar{t}: (Q_1 \bar{c}, \bar{c}) + (Q_2 \bar{t}, \bar{t}) \leq \gamma} \|(I - TX)\bar{c} - T\bar{t} - \bar{t}\|^2.$$

Введемо матриці B, Q і вектор $\bar{\xi}$ таким чином:

$$B = [(I - TX), -T],$$

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{t} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді отримаємо

$$\min_{T \in R_1, \bar{t} \in R_2} \max_{\bar{\xi}: (Q\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leq \gamma} \|B\bar{\xi} - \bar{t}\|^2.$$

Можна показати, що мінімум по $\bar{t}$ досягається при $\hat{\bar{t}} = 0$.

Дійсно,

$$\max_{\bar{\xi}: (Q\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leq \gamma} \|B\bar{\xi} - \bar{t}\|^2 = (B\bar{\xi}, B\bar{\xi}) + 2|(B\bar{\xi}, \bar{t})| +$$

$$+ (\bar{t}, \bar{t}) \geq \max_{\bar{\xi}: (Q\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leq \gamma} \|B\bar{\xi}\|^2,$$

оскільки максимум досягається при від'ємних $\bar{\xi}$.

Таким чином, оцінка невідомого вектора набуде вигляду

$$\hat{\bar{c}} = \hat{T} \hat{\bar{y}}.$$

Як відомо, оцінка, отримана за регуляризованим методом найменших квадратів, визначається формулою

$$\hat{\bar{c}} = (A + X'X)^{-1} X' \bar{y}.$$

Прийmemo $\hat{T} = (\hat{A} + X'X)^{-1} X'$ і розглянемо задачу

$$\min_{A \in L} \max_{\bar{\xi}: (Q\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leq \gamma} \|B\bar{\xi}\|^2 = \min_{A \in L} \max_{\bar{\xi}: (Q\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leq \gamma} (B' B \bar{\xi}, \bar{\xi}),$$

де B має вигляд

$$B = [(I - (A + X'X)^{-1} X'X), -(A + X'X)^{-1} X'] = [(A + X'X)^{-1} A, -(A + X'X)^{-1} X'].$$

Як відомо,

$$\max_{\bar{\xi}: (Q\bar{\xi}, \bar{\xi}) \leq \gamma} (B' B \bar{\xi}, \bar{\xi}) = \gamma \lambda, \{Q^{-1/2} B' B Q^{-1/2}\}.$$

Знайдемо тепер рівняння для шуканої матриці $\hat{A}$. У випадку однократності власного числа $\lambda, \{BQ^{-1}B\}$ отримаємо, що $\hat{A}$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right) (\gamma \lambda, \{B(\hat{A} + \beta \Theta) Q^{-1} B' (\hat{A} + \beta \Theta)\})_{\beta=0} = 0,$$

де Θ - довільна матриця, β - дійсний параметр. При цьому було враховано, що $\lambda, \{BQ^{-1}B'\} = \lambda, \{Q^{-1/2}B'BQ^{-1/2}\}$.

Враховуючи формули збурень для власних чисел і враховуючи, що

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\gamma \lambda, \left\{ \frac{1}{\det Q} [(\hat{A} + \beta \Theta + x'x)'(\hat{A} + \beta \Theta) \tilde{Q}, (\hat{A} + \beta \Theta + x'x)^{-1} - (\hat{A} + \beta \Theta + x'x)'x' \tilde{Q}_2 x (\hat{A} + \beta \Theta + x'x)^{-1}] \right\} \right)_{\beta=0} = 0.$$

Взявши похідну по напрямку від власного числа λ , отримаємо

$$\gamma \frac{1}{\det Q} \left([-(\hat{A} + x'x)^{-1} \Theta (\hat{A} + x'x)^{-1} \hat{A} \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} (\hat{A} + x'x)^{-1} \hat{A} \tilde{Q}, x \right. \\ \left. \times \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} \Theta (\hat{A} + x'x)^{-1} + (\hat{A} + x'x)^{-1} \Theta \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} + (\hat{A} + x'x)^{-1} x \right. \\ \left. \times \hat{A} \tilde{Q} \Theta (\hat{A} + x'x)^{-1} + (\hat{A} + x'x)^{-1} \Theta (\hat{A} + x'x)^{-1} x' \tilde{Q}_2 x (\hat{A} + x'x)^{-1} + \right. \\ \left. + (\hat{A} + x'x)^{-1} x' \tilde{Q}_2 x (\hat{A} + x'x)^{-1} \Theta (\hat{A} + x'x)^{-1}] \tilde{e}, \tilde{e}' \right) = 0,$$

де $\tilde{e}$ - власний вектор, що відповідає власному числу λ ,

$$Sp [-(\hat{A} + x'x)^{-1} \Theta (\hat{A} + x'x)^{-1} \hat{A} \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} + (\hat{A} + x'x)^{-1} x \times \\ \times \Theta \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} + (\hat{A} + x'x)^{-1} \Theta (\hat{A} + x'x)^{-1} x' \tilde{Q}_2 x (\hat{A} + x'x)^{-1}] \tilde{e}, \tilde{e}' = 0.$$

Звідси

$$Sp \Theta [-(\hat{A} + x'x)^{-1} \hat{A} \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{e}, \tilde{e}' (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} x \times \\ \times \tilde{e}, \tilde{e}' (\hat{A} + x'x)^{-1} + (\hat{A} + x'x)^{-1} x' \tilde{Q}_2 x (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{e}, \tilde{e}' (\hat{A} + x'x)^{-1}] = 0.$$

Враховуючи довільність матриці Θ , отримаємо

$$-\hat{A} \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{e}, \tilde{e}' + (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{Q} \hat{A} (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{e}, \tilde{e}' + \\ + x' \tilde{Q}_2 x (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{e}, \tilde{e}' = 0;$$

$$(x'x \tilde{Q} \hat{A} + x' \tilde{Q}_2 x) (\hat{A} + x'x)^{-1} \tilde{e}, \tilde{e}' = 0.$$

Ми отримали спектральне рівняння для матриці-регуляризатора $\hat{A}$, яке в загальному випадку не має розв'язків у явному вигляді.

1. Гирко В.Л. Многомерный статистический анализ. К., 1988.
2. Гирко В.Л., Мысак Р.Т., Онша Ю.М. Уравнение Риккати для матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов // Вычисл. и прикл. математика. 1988. Вып. 64. С.135-137.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 06.06.89

УДК 519.21

І.Д.Квіт, Є.В.Москвяк

НЕПОВНА ЗРІЗАНА ВИБІРКА

Розглянемо незалежні напрацювання n однотипних пристроїв упродовж деякого часу, наприклад, протягом гарантійного періоду. Нехай за цей час одержано повний запис напрацювань до відмови

F і частковий запис напрацювань до зупинки S . Позначимо через n_F кількість відмов, через n_S - кількість зареєстрованих зупинок, а через n_L - кількість втрачених зупинок; $n_F + n_S + n_L = n$. На основі даної неповної зрізаної вибірки оцінимо перший дециль, тобто напрацювання, більше від якого витримує 90 % пристроїв.

Припустимо, що розподіл n_L втрачених зупинок такий самий, як розподіл n_S зареєстрованих зупинок. Перерозподілимо n_L неспостережених зупинок рівномірно між n_S спостереженими значеннями зупинок. Тому кожне спостережене значення зупинки має додаткову масу n_L / n_S разом з її власною спостереженою масою 1. Отже, кожна з n_F відмов неповної зрізаної вибірки має масу 1, а кожна з n_S зареєстрованих зупинок - масу $1 + n_L / n_S$.

Варіаційний ряд даної неповної зрізаної вибірки напрацювань запишемо у вигляді

$$t(\bar{i}, n) \leq \dots \leq t(\bar{j}, n) \leq \dots \leq t(\bar{n}_F + n_S, n), \quad (1)$$

де j -е за величиною $t(j, n)$ позначає напрацювання до відмови F або зареєстрованої зупинки S . Якщо $t(\bar{j}, n)$

позначає напрацювання до відмови F , то j виражає середній ранг цієї відмови. Метод обчислення сподіваних рангів відмов у зрізаному емпіричному варіаційному ряді описано, наприклад, у праці [1]. Зазначимо, що при цьому у формулі для обчислення приросту рангу відмови число пристроїв за розгляданою множиною зупинених пристроїв обчислюємо як число відмов F плюс помножене на $1 + n_L/n_S$ число зупинок S і, отже, ця сума, як правило, дробова. Надалі в ряді /1/ нас цікавитимуть лише $t(j, n)$, відповідні n_F напрацюванням до відмови.

Вузлові точки медіанної полігонної емпіричної функції розподілу [1] для вибірки обсягу n при n_F відмовах, n_S зареєстрованих зупинках і n_L незареєстрованих зупинках мають вигляд

$$\left(t(\bar{j}, n), \frac{\bar{j} - 0,3}{n + 0,4} \right), \quad (j = 1, 2, \dots, n_F), \quad /2/$$

де $t(\bar{j}, n)$ - моменти фактичних відмов, а $\bar{j}$ - сподіваний ранг j -ї відмови. Серед ординат точок /2/ знайдемо дві сусідні, одну меншу, а другу більшу від 0,1. На основі одержаних відповідних двох абсцис за допомогою лінійної інтерполяції дістаємо оцінку першого дециля.

Інший метод оцінки першого дециля розглянуто в праці [4]. Якщо вважати, що неповна зрізана вибірка напрацювань /1/ взята з популяції, яка має абсолютно неперервну функцію розподілу $F(t; \theta)$ і густину $f(t; \theta) = F'(t; \theta)$, залежну від вектора невідомих параметрів θ , то, оцінивши параметри методом максимуму правдоподібності на основі функції правдоподібності

$$L = \left\{ \prod_{i=1}^{n_F} f(t_{iF}; \theta) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{n_S} [1 - F(t_{jS}; \theta)]^{1 + n_L/n_S} \right\}, \quad /3/$$

де t_{iF} - моменти відмов, а t_{jS} - моменти зареєстрованих зупинок, одержимо оцінку першого дециля D_1 , як розв'язок рівняння $F(D_1; \theta) = 0,1$.

Приклад. Для даних [4] при $n = 77$, $n_F = 9$, $n_S = 17$ і $n_L = 51$ одержано наступний неповний зрізаний варіаційний ряд з вказаними рангами відмов

70F	1	779F	7,2	1258S	
149F	2	905S		1280S	
190F	3	964S		1362S	
247F	4	1072S		1373F	11,92
283F	5	1100S		1413S	
442F	6	1117S		1590F	18,528
573S		1124S		1602S	
704S		1156S		1771S	
757S		1168S			

З рівняння $\frac{r - 0,3}{77 + 0,4} = 0,1$ дістаємо $r = 8,04$. Це

число є між рангами 7,2 і 11,92, яким відповідають напрацювання 779 і 1373. Лінійна інтерполяція дає число 885 за оцінку першого дециля. Зазначимо, що в праці [4] одержано число 939,7 з 90 %-ним інтервалом довір'я /340; 1539/. Наш метод оцінки першого дециля не вимагає знання явного виразу розподілу популяції, для якої маємо неповну зрізану вибірку, та зв'язаної з цим великої кількості обчислень і, отже, є непараметричним.

Зауваження 1. Для перевірки гіпотези про те, що неповна зрізана вибірка з варіаційним рядом /1/ взята з популяції, що має абсолютно неперервну функцію розподілу ймовірностей $F(t)$, використовуємо методику, описану та проілюстровану в праці [2].

Зауваження 2. Для перевірки гіпотези про те, що дві незалежні неповні зрізані вибірки незалежних напрацювань з приблизно однаковою пропорцією $n_F : n_S : n_L$ однорідні, використовуємо методику, описану та проілюстровану в праці [3].

Зауваження 3. Аналогічно до того, як оцінюється перший дециль, можна оцінювати інші низькі квантілі, наприклад, перший октиль, перший секстиль тощо. Якщо зареєстровано всі зупинки, $n_L = 0$, то $n_F + n_S = n$ і обчислення оцінювачів низьких квантилів відповідно спрощується.

Зауваження 4. Мала вибірка повинна бути повною, середня вибірка може бути трохи зрізаною, велика вибірка може бути не повною зрізаною. Якщо кількість спостережень від кількох до кільканадцяти – мала вибірка, то від кільканадцяти до кількадесяти – середня вибірка, а більша від кількадесяти – велика вибірка. Наприклад, при застосуванні критеріїв χ^2 -квадрат і Колмогорова-Смирнова вибірки повинні бути великі, $n \geq 50$.

1. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності", Львів, 1982. 2. К в і т І.Д. Емпіричний і гіпотетичний зрізані варіаційні ряди // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип. 27. С.47-50. 3. К в і т І.Д., М о с к в я к Є.В. Порівняння двох зрізаних вибірок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип. 27. С.50-52.
4. Suzuki K. Estimation of Lifetime Parameters from Incomplete Field Data // *Techometrics*. 1985. Vol. 27. p.263-271.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.86

З М І С Т

Савула Я.Г., Дубовик А.В., Паук Н.М. Крайова і варіаційна задачі зі штрафом комбінованої моделі плоскої теорії пружності.....	3
Шинкаренко Г.А. Постановка та розв'язу- ваність початково-крайових задач електров'язкопруж- ності.....	10
Сипа І.М. Числове моделювання температурних полів у складових оболонках методом скінченних еле- ментів.....	17
Муха І.С. Чисельна схема розв'язання задач нелінійного деформування твердих тіл при наявності по- чаткових переміщень.....	22
Ліхачов В.О., Флейшман Н.П. Тиск жорсткого штапу на пружний шар.....	26
Коссяк О.С. Чисельний аналіз умов спряжен- ня складових оболонок зі скінченною зсувною жорсткіс- тю.....	31
Коркуна М.Д., Кузик А.М., Чу- лик І.І. Дослідження швидкості збіжності методу сумарної апроксимації в класі $W_2^{10}(Q_T)$	37
Гарасим Я.С., Остудін Б.А. Дослі- дження алгоритму обчислення одного класу двовимірних невласних інтегралів.....	40
Припула М.М., Прикарпатсь- кий А.К. Аналіз топологічних сингулярностей нелі- нійних повністю інтегрованих динамічних систем.....	45
Жук М.В. Наближене розв'язування задачі Діріхле методом Канторовича у випадку області спеціального виду	47
Роман Л.Л. Збіжність рекурсивного методу з пам'яттю для мінімізації функцій.....	51
Мартиненко Марія Д. Еквівалентна лінеари- зація для деяких нелінійних граничних задач другого по- ряду.....	55
Квіт І.Д. Сподіване залишкове напруження....	58
Мисак Р.Т. Знаходження спектрального рівняння для матриці-регуляризатора оцінки розв'язку деякої сис- теми лінійних рівнянь.....	63
Квіт І.Д., Москвяк Є.В. Неповна зрізана вибірка.....	67

Сборник научных трудов

Министерство высшего и среднего
специального образования УССР

В Е С Т Н И К
Львовского университета

Серия механико-математическая
Издается с 1965 г.

В ы п у с к 33

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Издательство при Львовском государственном университете
/290000 Львов-центр, ул. Университетская, 1/

Львовская областная книжная типография.
290000 Львов, ул. Стефаника, 11.
/На украинском языке/

Художній редактор В.Д.Ц е й т і н
Технічний редактор С.Д.Д о в б а
Коректор К.Г.Л о г в и н е н к о

Н/К

Підп. до друку 17.11.89. БГ 11376. Формат 60x84/16.
Папір друк. № 3. Умовн. друк. арк. 4,18. Умовн. фєрб.-вїдб. 4,41.
Обл.-вїд. арк. 3,8. Тираж 600 прим. Вид. № 1991.
Зам. 3464. Цїна 75 к. Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня,
290000 Львів, вул. Стефаника, 11.

75 к.

ISSN 0201-758X. 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1990, вип. 33, 1—72.