УДК 517.946

М.І.Бадзо, Н.В.Васильєва, М.І.Іванчов

ДЕЯКІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯМ

У статті встановлено умови існування і єдиності розв"язку обернених задач знаходження сталого коефіцієнта температуропровідності. Цим питанням присвячено ряд праць, бібліографія яких наведена, наприклад, у книзі О.М.Аліфанова, Є.А.Артюхіна, С.В.Румянцева "Екстремальні методи розв"язання некоректних задач" /М., 1988/.

В області $D_T = \{(x,t): 0<x<l, 0<t<T\}$ розглянемо рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad /1/$$

з невідомим коефіцієнтом температуропровідності, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\le x\le l \qquad /2/$$

та крайовими умовами

$$\alpha_0 u(0,t) - \beta_0 u_x(0,t) = \mu(t); \qquad /3/$$

$$\alpha_1 u(l,t) + \beta_1 u_x(l,t) = \nu(t), \quad 0\le t\le T, \qquad /4/$$

де α_i, β_i приймають значення 0 або 1, причому $\alpha_i + \beta_i = 1, (i=0,1)$.

Умову перевизначення задамо у вигляді

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\beta_0 u(0,t) + \alpha_0 u_x(0,t))dt = \varkappa. \qquad /5/$$

Під розв"язком задачі /1/-/5/ будемо розуміти пару $\{a, u(x,t)\}$, де a - додатна стала, $u(x,t)$ - класичний розв"язок відповідної крайової задачі.

<u>Теорема 1</u>. Задача /1/-/5/ має принаймні один розв"язок $\{a, u(x,t)\}$, якщо виконуються умови:

1/ функції $\varphi(x), 0\le x\le l, \mu(t), \nu(t), 0\le t\le T$ неперервні і при $\alpha_0 = 1$ $\varphi(0) = \mu(0)$, при $\alpha_1 = 1$ $\varphi(l) = \nu(0)$;

2/ при $\beta_0 = 0$

$$\int_0^T \frac{\mu(0)-\mu(t)}{\sqrt{T-t}}dt \int_0^T ((\alpha_1 h + \beta_1)\varkappa + \alpha_1 \mu(t) - \nu(t))dt > 0; \qquad /6/$$

при $\alpha_0 = 0$

$$(\varkappa-\varphi(0))\int_0^T(\alpha_1+\beta_1(T-t))((\alpha_1 h+\beta_1)\mu(t)+\nu(t)-\alpha_1\varkappa)\,dt>0. \qquad /7/$$

Доведення. Розглянемо, наприклад, випадок $\beta_0=\alpha_1=0$. Припускаючи a відомим і використовуючи функцію Гріна для представлення розв"язку задачі /I/-/4/, з умови /5/ отримуемо рівняння для знаходження невідомого коефіцієнта температуропровідності

$$a=\Phi(a), \qquad /8/$$

де

$$\Phi(a)=\frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}\int_0^T(\varkappa-\nu(\tau))d\tau}\int_0^T\frac{d\tau}{(T-\tau)^{3/2}}\int_0^h\psi(\xi,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(\xi+2nh)\times$$

$$\times e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}}d\xi;\quad \psi(\xi,\tau)=\varphi(\xi)-\mu(\tau)-\xi\nu(\tau). \qquad /9/$$

Враховуючи обмеженість функції $\Phi(a)$, приходимо до висновку, що розв"язок рівняння /8/ існує, якщо

$$\Phi(0)>0. \qquad /I0/$$

Підставляючи вираз /9/ в /I0/, приходимо до умови /6/ у випадку $\alpha_1=0$. Всі інші випадки досліджуються аналогічно.

Теорема 2. Розв"язок задачі /I/-/5/ единий, якщо в області D_T функції $\varphi(x), \varphi'(x), \mu(t), \nu(t)$ неперервні і виконуються умови:

I/ при $\alpha_0=\alpha_1=1$

$$(\varphi(h)-\nu(t))\int_0^T(h\varkappa+\mu(t)-\nu(t))dt\geq 0,$$

$$(h\varphi'(x)+\mu(t)-\nu(t))\int_0^T(h\varkappa+\mu(t)-\nu(t))dt\leq 0;$$

2/ при $\alpha_0=1,\ \alpha_1=0$

$$(\varphi(h)-\mu(t)-h\nu(t))\int_0^T(\varkappa-\nu(t))dt\geq 0,$$

$$(\varphi'(x)-\nu(t))\int_0^T(\varkappa-\nu(t))dt\leq 0;$$

3/ при $\alpha_0=\alpha_1=0$

$$(\varkappa-\varphi(h)+\frac{h}{2}(\nu(t)-\mu(t)))\int_0^T(T-t)(\mu(t)+\nu(t))dt\geq 0,$$

$$(h\varphi'(x)+(h-x)\mu(t)-x\nu(t))\int_0^T(T-t)(\mu(t)+\nu(t))dt\geq 0;$$

4/ при $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$

$$(\varphi(h) - \vartheta(t)) \int_0^T (\varkappa - h\mu(t) - \vartheta(t))\,dt \geq 0,$$

$$(\varphi'(x) + \mu(t)) \int_0^T (\varkappa - h\mu(t) - \vartheta(t))\,dt < 0.$$

Доведення. Розглянемо для прикладу наведений вище випадок $\beta_0 = \alpha_1 = 0$. Очевидно, що достатньо вимагати єдиності розв"язку рівняння /8/, яка гарантується умовою

$$\Phi'(a) < 1. \qquad /11/$$

Враховуючи вираз /9/, надамо нерівності /11/ вигляду

$$\frac{1}{\int_0^T (\varkappa - \vartheta(t))\,dt} \int_0^T \frac{d\tau}{(T-\tau)^{3/2}} \int_0^h \psi(\xi,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\xi + 2nh) \times$$
$$\times \left(\frac{(\xi+2nh)^2}{2a^2(T-\tau)} - 3 \right) e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}}\, d\xi < 0. \qquad /12/$$

Для встановлення умов виконання нерівності /12/ скористаємося лемою.

Лема. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ - неперервні на $[a,b]$ функції, $f(x)$ - неспадна, $f(b) \geq 0$, $g(a) < 0$. Якщо

$$\int_a^b g(x)\,dx < 0,$$

то

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx < 0.$$

Зауваження. Якщо $g(a) = 0$, то слід вимагати виконання умови $g'(a) < 0$ або $g(x) \leq 0$ на деякому проміжку $[a, a+\varepsilon]$.

Умову 2 теореми 2 отримуємо безпосереднім застосуванням леми до нерівності /12/.

Умови єдиності розв"язку задачі /1/-/5/ можна одержати в іншому вигляді. Покажемо це у випадку $\beta_0 = \alpha_1 = 0$.

Зауважуючи, що

$$\frac{1}{(T-\tau)^{3/2}} \left(\frac{(\xi+2nh)^3}{2a^2(T-\tau)} - 3(\xi+2nh) \right) e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}} =$$

$$= 4a^2(T-\tau)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{T-\tau}}\, e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}}\right),$$

та інтегруючи в /I2/ по частинах, зведемо умову единості розв"язку рівняння /8/ до вигляду

$$\frac{1}{\int\limits_0^T(\varkappa-\nu(\tau))d\tau}\left(\int\limits_0^T (T-\tau)(\varphi(0)-\mu(\tau))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2h^2}{a^2(T-\tau)}}\times\right.$$

$$\times\frac{d\tau}{\sqrt{T-\tau}}+\sqrt{T}\int\limits_0^h(\varphi'(\xi)-\nu(0))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2T}}\,d\xi\,+$$

$$\left.+\int\limits_0^T\frac{d\tau}{\sqrt{T-\tau}}\int\limits_0^h\frac{\partial}{\partial\tau}\Big((T-\tau)(\varphi'(\xi)-\nu(\tau))\Big)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}}\,d\xi\right)<0. \qquad /I3/$$

Звідси легко отримати умови единості розв"язку у випадку $\beta_0 = \alpha_1 = 0$. Аналогічно досліджуються випадки інших крайових умов.

Теорема 3. При неперервних функціях $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \mu(t), \mu'(t), \nu(t), \nu'(t)$ задача /I/-/5/ не може мати більше одного розв"язку, якщо в області $\bar{D}_T$ виконуються умови:

I/ при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$

$$\int\limits_0^T(h\varkappa+\mu(\tau)-\nu(\tau))d\tau>0, \qquad \varphi''(x)\le 0,$$

$$\big((T-t)\mu(t)\big)'\ge 0, \qquad \big((T-t)(\nu(t)-\mu(t))\big)'\le 0;$$

2/ при $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0$

$$\int\limits_0^T(\varkappa-\nu(\tau))d\tau>0, \qquad \varphi''(x)\le 0,$$

$$\big((T-t)(\mu(t)-\mu(0))\big)'\ge 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\big((T-t)(\varphi'(x)-\nu(t))\big)\le 0;$$

3/ при $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$

$$\int\limits_0^T(T-\tau)(\mu(\tau)+\nu(\tau))d\tau>0,\ \ x\nu'(t)-(2h-x)\mu'(t)\le 0,$$

$$h(\varkappa-\varphi(x))-x\left(h-\frac{x}{2}\right)\mu(t)+\frac{x^2}{2}\nu(t)\ge 0;$$

4/ при $\alpha_0 = 0, \ \alpha_1 = 1$

$$\int_0^T (x - h\mu(\tau) - \vartheta(\tau))\,d\tau > 0,$$

$$\mu'(t) \le 0, \ \ \vartheta'(t) \le 0, \ \ \varphi''(x) \le 0.$$

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89

УДК 517.946

М.І.Іванчов, І.Я.Лучко

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D_T = \{(x,t): 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ для рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} + b u_x \qquad /1/$$

/ a, b - сталі/ з умовами

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x < \infty, \qquad /2/$$

$$-u_x(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T \qquad /3/$$

розглянемо такі задачі:

/A/ знайти коефіцієнт a при умові

$$u(0,t_0) = \vartheta_0, \quad 0 < t_0 \le T; \qquad /4/$$

/B/ знайти коефіцієнт b при умові /4/;

/AB/ знайти обидва коефіцієнти a і b, якщо виконуються умова /4/ та умова

$$u(0,t_1) = \vartheta_1, \quad 0 < t_0 < t_1 \le T. \qquad /5/,$$

Припустимо, що функції $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ та $(x\varphi'(x))'$ є неперервними і обмеженими при $0 \le x < \infty$, $\mu(t)$- неперервна при $0 \le t \le T$, причому

$$-\mu(0) = \varphi'(0). \qquad /6/$$