4/ при $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1$

$$\int_0^T (x - h\mu(\tau) - \vartheta(\tau))\,d\tau > 0,$$

$$\mu'(t) \le 0,\quad \vartheta'(t) \le 0,\quad \varphi''(x) \le 0.$$

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89

УДК 517.946

М.І.Іванчов, І.Я.Лучко

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D_T = \{(x,t): 0 < x < \infty,\ 0 < t < T\}$ для рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} + b u_x \qquad /1/$$

/ a, b - сталі/ з умовами

$$u(x,0) = \varphi(x),\quad 0 \le x < \infty, \qquad /2/$$

$$-u_x(0,t) = \mu(t),\quad 0 \le t \le T \qquad /3/$$

розглянемо такі задачі:

/A/ знайти коефіцієнт a при умові

$$u(0,t_0) = \vartheta_0,\quad 0 < t_0 \le T; \qquad /4/$$

/B/ знайти коефіцієнт b при умові /4/;

/AB/ знайти обидва коефіцієнти a і b, якщо виконується умова /4/ та умова

$$u(0,t_1) = \vartheta_1,\quad 0 < t_0 < t_1 \le T. \qquad /5/,$$

Припустимо, що функції $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ та $(x\varphi'(x))'$ є неперервними і обмеженими при $0 \le x < \infty$, $\mu(t)$- неперервна при $0 \le t \le T$, причому

$$-\mu(0) = \varphi'(0). \qquad /6/$$

Для встановлення умов існування і единості розв"язку задач /A/ і /B/ використаемо представлення розв"язку прямої задачі /1/-/3/ за допомогою функції Гріна*. Підставивши це представлення в умову /4/, отримаємо рівняння

$$\Phi(a,b) = 1, \qquad /7/$$

де

$$\Phi(a,b)=\frac{1}{\vartheta_0}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{b\sqrt{t_0}}{2a}}^{\infty}\varphi(bt_0+2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\frac{b^2(t_0-\tau)}{4a^2}}d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{b}{a^2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{b\eta}{a^2}}d\eta\int\limits_{\frac{\eta-bt_0}{2a\sqrt{t_0}}}^{\infty}\varphi(bt_0-\eta+2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz-\frac{b}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int\limits_{\frac{b\sqrt{t_0-\tau}}{2a}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right).$$

Досліджуючи поведінку $\Phi(a,b)$ при $a\to 0$ та $a\to\infty$, приходимо до висновку, що задача /A/ має розв"язок, якщо виконуються умови

$$\left(\varphi(bt_0)-\vartheta_0\right)\int\limits_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau<0 \qquad \text{при } b\geq 0, \qquad /8/$$

$$\left(\varphi(0)-\vartheta_0-b\int\limits_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\right)\int\limits_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau<0 \qquad \text{при } b<0. \qquad /9/$$

Знайшовши, що

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{1}{\vartheta_0\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\frac{b^2(t_0-\tau)}{4a^2}}d\tau+\frac{2}{a}\int\limits_0^{\infty}\left(\xi\varphi'(\xi)\right)'e^{\frac{b\xi}{a^2}}d\xi\int\limits_{\frac{\xi+bt_0}{2a\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right),$$

отримуємо умову единості розв"язку задачі /A/:

$$\mu(t)\left(x\varphi'(x)\right)'\geq 0 \qquad \text{при } 0\leq x<\infty,\ 0\leq t\leq T. \qquad /10/$$

Досліджуючи аналогічно поведінку функції $\Phi(a,b)$ при $b\to-\infty$ і $b\to+\infty$, знаходимо умови існування розв"язку задачі /B/:

$$\left(\lim_{x\to\infty}\varphi(x)-\vartheta_0\right)\int\limits_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau<0. \qquad /11/$$

---

* П о л о ж і й Г.М. Рівняння математичної фізики. К., 1959.

Відзначимо, що при цьому можна встановити умови, при яких задача /В/ буде мати додатний або від"ємний розв"язок. Так, якщо виконується умова

$$\left(\vartheta_0-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz\right)\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau>0, \qquad /12/$$

то задача /В/ має від"ємний розв"язок, якщо ж має місце умова

$$\left(\vartheta_0-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz\right)\left(\lim_{x\to\infty}\varphi(x)-\vartheta_0\right)>0, \qquad /13/$$

то існує додатний розв"язок задачі /В/. Звідси випливає, зокрема, що задача /В/ має два розв"язки - додатний і від"ємний, якщо виконуються одночасно умови /12/ і /13/.

Для встановлення умов єдиності розв"язку задачі /В/ знайдемо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{1}{\vartheta_0\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\xi\varphi'(\xi)e^{\frac{b\xi}{a^2}}d\xi\int_{\frac{\xi+bt_0}{2a\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\frac{b\sqrt{t_0-\tau}}{2a}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right). \qquad /14/$$

З рівняння випливає, що умова

$$\mu(t)\,\varphi'(x)\leq 0 \quad \text{при} \quad 0\leq t\leq T,\ 0\leq x<\infty \qquad /15/$$

забезпечує єдиність розв"язку задачі /В/.

Перейдемо до задачі /АВ/. Припускаючи, що $\varphi(x)\equiv 0$, і підставляючи розв"язок задачі /1/-/3/ в умови /4/ і /5/, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих a і β, де $\beta=\frac{b}{2a}$:

$$\begin{cases}\vartheta_0=\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\beta^2(t_0-\tau)}d\tau-2\beta\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right),\\[2ex] \vartheta_1=\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^{t_1}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}e^{-\beta^2(t_1-\tau)}d\tau-2\beta\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right).\end{cases} \qquad /16/$$

Виключаючи звідси a, приходимо до рівняння

$$\mathcal{F}(\beta)=0, \qquad /17/$$

2-2498

де

$$\mathcal{F}(\beta)=2\beta^2\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\vartheta_1\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\Big)-$$

$$-\beta\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}e^{-\beta^2(t_1-\tau)}d\tau-\vartheta_1\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\beta^2(t_0-\tau)}d\tau\Big). \qquad /18/$$

Досліджуючи аналогічно до попереднього рівняння /17/, знаходимо, що умова існування розв"язку задачі /АВ/ має вигляд

$$\big(\vartheta_0\mu(t_1)-\vartheta_1\mu(t_0)\big)\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau-\vartheta_1\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\Big)>0, \qquad /19/$$

а умова єдиності – вигляд

$$\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)\,d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\vartheta_1\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\neq 0 \qquad /20/$$

при будь-якому дійсному β.

Із способу отримання умов існування і єдиності розв"язку задач /А/, /В/, /АВ/ випливає такий висновок: вони майже необхідні у тому розумінні, що коли вони не виконуються, то знаходяться задачі, розв"язок яких не існує або не єдиний. Зауважимо також, що інші крайові задачі досліджуються аналогічно.

Стаття надійшла до редколегії 22.05.89

УДК 517.956

П.Я.Пукач

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Розглядається параболічне рівняння другого порядку

$$Lu\equiv p(x,t)u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}-c(x,t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

$x=(x_1,\dots,x_n),(x,t)\in Q$, де $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, яка буде описана нижче. У праці [5] одержано умови існування та єдиності узагальненого розв"язку задачі Коші для рівняння /1/ у смузі $Q_T=\mathbb{R}^n\times[0,T]$ в деяких спеціальних класах функцій, що можуть певним чином зростати при $|x|\to\infty$. Для