де

$$\mathcal{F}(\beta)=2\beta^2\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\vartheta_1\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\Big)-$$

$$-\beta\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}e^{-\beta^2(t_1-\tau)}d\tau-\vartheta_1\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\beta^2(t_0-\tau)}d\tau\Big). \qquad /18/$$

Досліджуючи аналогічно до попереднього рівняння /17/, знаходимо, що умова існування розв"язку задачі /AB/ має вигляд

$$\Big(\vartheta_0\mu(t_1)-\vartheta_1\mu(t_0)\Big)\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau-\vartheta_1\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\Big)>0, \qquad /19/$$

а умова единості – вигляд

$$\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)\,d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\vartheta_1\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\neq 0 \qquad /20/$$

при будь-якому дійсному β.

Із способу отримання умов існування і единості розв"язку задач /A/, /B/, /AB/ випливає такий висновок: вони майже необхідні у тому розумінні, що коли вони не виконуються, то знаходяться задачі, розв"язок яких не існує або не единий. Зауважимо також, що інші крайові задачі досліджуються аналогічно.

Стаття надійшла до редколегії 22.05.89

УДК 517.956

П.Я.Пукач

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Розглядається параболічне рівняння другого порядку

$$Lu\equiv p(x,t)u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}-c(x,t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

$x=(x_1,\dots,x_n),(x,t)\in Q$, де $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, яка буде описана нижче. У праці [5] одержано умови існування та единості узагальненого розв"язку задачі Коші для рівняння /1/ у смузі $Q_T=\mathbb{R}^n\times[0,T]$ в деяких спеціальних класах функцій, що можуть певним чином зростати при $|x|\to\infty$. Для рівняння /1/ розглядається змішана задача в області Q у припущенні, що рівняння вироджується у всій площині задання початкової умови або на деякій її підмножині. Методи дослідження змішаної задачі для рівняння /1/ певним чином спираються на результати досліджень [1, 2, 7].

Опишемо область Q. Нехай Q обмежена нижньою основою $\Omega_0 \subset R^n$, верхньою основою $\Omega_T \subset R^n (T<\infty)$ та бічною поверхнею S. Позначатимемо $\Omega_\tau = Q \cap \{t=\tau\}$ та припускатимемо, що Ω_τ - зв"язна множина для довільного фіксованого τ. Через S_τ позначатимемо межу Ω_τ та припускатимемо надалі, що всяка поверхня S_t у довільній точці має дотичну площину в R^n. Нехай $\nu(\xi,t)$ одиничний вектор внутрішньої нормалі до S_t у точці $\xi \in S_t$. Локальними координатами в точці $\xi \in S_t$ назвемо прямокутну систему координат $\{y_1, \cdots, y_n\}$, так що вісь y_n напрямлена вздовж $\nu(\xi,t)$, а решта осі лежить у дотичній площині до S_t у точці ξ. Будемо вважати, що в околі довільної точки $(\xi,\tau) \in S$ ця поверхня задається рівнянням $y_n = F(y',t)$, де $\{y\}$ - локальні координати в точці ξ, $y' = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$. Припускатимемо, що $S \in C^{2,1}_{x\,t}$, тобто для довільної точки $(\xi,\tau) \in S : F(y',t) \in C^{2,1}_{y'\,t}(g_0)$ і норми $\|F\|_2^{g_0} = \left(\int_{g_0} |F|^2 dx\right)^{1/2}$ обмежені спільною константою. Тут g_0 - циліндрична область, у якій визначена функція $F(y',t)$.

Змішану задачу для рівняння /1/ в Q ставимо тепер так. Приймемо $A = \{x \in \Omega_0 : \rho(x,0) = 0\}$ та задамо початкову умову

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega_0 \setminus A. \qquad /2/$$

Крайова умова має вигляд

$$u(x,t)\big|_S = 0. \qquad /3/$$

Ззовні області Q побудуємо східчасту область $Q^* \supset Q$, що складається з m циліндрів Q_k висотою $h = T/m$, накладених один на одного так, що $Q^* = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$. Позначимо: $\Omega_k = Q_k \cap Q_{k+1}$, $\Sigma_i = \Omega_{(i-1)h} \setminus \Omega_{i-1}$, $\Omega_{(i-1)h} = Q \cap \{t=(i-1)T/m\}$, $\Omega_{i-1} = Q_{i-1} \cap Q_i$.
Через Γ_k позначимо бічну поверхню циліндра Q_k. Нехай

$$\Gamma_k \in C^4. \qquad /4/$$

Вважатимемо надалі, що

1/ $\rho(x,t) \geq \nu_0 t^\theta$, $\nu_0 > 0$, $0 < \theta < 1$; /5/

2/ $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geq \nu \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \ \nu > 0$ /6/

для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільного вектора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.
Припускатимемо, що функції a_{ij}, a_{ij_t}, b_i – обмежені в Q, $i,j = \overline{1,n}$, причому

$\sup_Q |a_{ij}| \leq a, \ \sup_Q |a_{ij_t}| \leq a', \ \sup_Q |b_i| \leq b,$ /7/

$a > 0, a' > 0, b \geq 0$. Нехай, крім того,

$|a_{ij_{x_k}}| \leq \mu_0, \ k = \overline{1,n}, \ \mu_0 = const > 0$ /8/

$|c_t| \leq \varkappa t^{\theta-2}, \ \varkappa = const > 0.$ /9/

Введемо ще такі функції:

$\rho_1(t) = \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{Q_t} |b_{i_t}| \cdot t^{\frac{1-\theta}{2}}, \ Q_t = \Omega_\tau \times (0,t), 0 \leq t \leq T, \ 0 \leq \tau \leq t,$

$\rho_2(t) = \max_{i=\overline{1,n}} \{ \sup_{Q_t} (\rho_t + 2c) t^{1-\theta}, 0 \},$

$\rho_3(t) = \max_{i=\overline{1,n}} \{ \sup_{Q_t} (-\rho_t + 2c) t^{1-\theta}, 0 \}.$

<u>Теорема I.</u>

Нехай мають місце умови /4/-/9/, $S \in C^{2,1}_{xt}$. Крім того,

1/ $\rho_1(t) \leq M, \ M = const > 0,$

2/ $\nu_1 = \inf_{0 \leq t \leq T} \rho_2(t), \ \nu_1 > 0,$

3/ $\nu_2 = \inf_{0 \leq t \leq T} \rho_3(t), \ \nu_2 > 0,$

4/ $\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega_t} \frac{f_t^2 dx}{t^{\varkappa_0 + \theta - 1}} < +\infty, \ \varkappa_0 = \left[\frac{\nu_2}{\nu_0} \right],$

5/ $\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega_t} \frac{f^2 dx}{t^{\gamma_0 + \varkappa_0 + \theta + 1}} < +\infty, \ \gamma_0 = \left[\frac{\nu_1}{\nu_0} \right].$

6/ $f|_S = 0.$

Тоді існує розв"язок задачі /1/-/3/, що належить $H^{2,1}(Q)$.
<u>Доведення</u> базується на тому, що будується область Q^*, описана вище, та розглядається змішана задача для рівняння /1/ в області $Q^*_{\varepsilon\tau} = \{(x,t) \in Q^* : 0 < \varepsilon \leq t \leq \tau < T\}$. Для цього коефіцієнти /1/ продовжуються в Q^* [4]. Функція f продовжується в Q^* нулем. Спираючись на результати роботи [6], будуємо розв"язок змішаної задачі в $Q^*_{\varepsilon,\tau}$. Далі отримуємо в Q^*_{ε,τ_0} оцінку такого виду:

$$\|u\|_{H^{1,1}(Q^*_{\varepsilon,\tau_0})} \leq K_1 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega_t} \frac{f_t^2 dx}{t^{\varkappa_0 + \theta - 1}} + K_2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega_t} \frac{f^2 dx}{t^{\gamma_0 + \varkappa_0 + \theta + 1}}, K_1, K_2 > 0 \quad /10/$$

Враховуючи працю [3] і умови теореми I, одержуємо:

$\|u\|_{H^{2,1}}(Q^*_{\varepsilon,\tau_0}) \le K,\ K>0.$

Аналогічно одержуємо оцінку для норми u в $H^{2,1}(Q^*_{\tau_0,T})$, що не залежить від h. Отже, одержано послідовність $\{u_\varepsilon\}$ розв"язків змішаної задачі в $Q^*_{\varepsilon,T}$, залежних від ε. Прийнявши $u_\varepsilon = 0_{1,0}$ в $Q^*_{0,\varepsilon}$, отримаємо, що $\int\limits_Q f\cdot v\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{\varepsilon,T}} f\cdot v\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{0,\varepsilon}} f\cdot v\,dx\,dt,$ $v\in H^{1,0}(Q)$.

Оскільки $\{u_\varepsilon\}$ - обмежена в Q послідовність, то з неї в Q можна виділити слабкозбіжну підпослідовність. Маємо

$$\int\limits_Q (Lu_\varepsilon - f)v\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{0,\varepsilon}} f\cdot v\,dx\,dt = 0.$$

При $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_Q (Lu-f)v\,dx\,dt = 0,\quad v\in H^{1,0}(Q).$$

При $h\to 0$ отримаємо, що $u/_S = 0$ /див. [4] /. Тобто $u\in H^{2,1}(Q)$ - розв"язок задачі /I/-/3/.

Зауваження I.

Нехай $\sup\limits_Q |a_{ij}| \le a,\ \sup\limits_Q |a_{ij_t}| \le a',\ a\ge 0,\ a'\ge 0;$ /II/

$\rho_0(t) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{Q_t} |b_i| t^{-(\theta+1)/2},\quad 0<t\le t_0,\ 0<t_0\le T;$ /I2/

$|b_i| \le b,\ b>0,\ (x,t)\in Q_{t_0,T};$ /I3/

b_{i_t} - обмежені, коли $(x,t)\in Q_{t_0,T}$. /I4/

Теорема I*.

Нехай $\theta\ge 1$, мають місце умови /4/-/6/, /II/-/I4/, умови 2-6 теореми I, $S\in C^{2,1}_{xt}$. Якщо

1/ $\lim\limits_{t\to 0} t\cdot\rho_0(t) = 0,$

2/ $\lim\limits_{t\to 0} \rho_1(t) = 0,$

то існує розв"язок задачі /I/-/3/, що належить простору $H^{2,1}(Q)$.

Теорема 2.

Нехай область Q така, що $\Omega_{t_1}\subset\Omega_{t_2},\ t_2>t_1$ і виконуються умови I-5 теореми I. Тоді існує розв"язок задачі /I/-/3/, що належить простору $H^{2,1}(Q)$.

Означення.

Функція $u(x,t)\in H^{1,1}(Q)$ називається узагальненим розв"язком задачі /I/-/3/, якщо вона задовольняє умови /2/, /3/ та інтегральну тотожність

$$\iint_Q [\rho u_t \cdot v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \cdot v - cuv - f v]\,dx\,dt = 0$$

для довільної функції $v \in H^{1,0}(Q)$ такої, що $v|_S = 0$.

Теорема 3.

Припустимо, що, крім умов /5/, /6/, мають місце такі умови:

1/ $a \geq \sup_Q |a_{ij}|$, $i,j = \overline{1,n}$;

2/ $\nu_1 = \inf_{0 \leq t \leq T} \rho_2(t)$, $\nu_1 > 0$;

3/ $\lim_{t \to 0} \rho_0(t) = 0$, $0 \leq t \leq t_0$, $0 < t_0 \leq T$. Крім того, $|b_i| \leq b$, $b > 0$, коли $(x,t) \in Q_{t_0,T}$;

4/ $\nu_1/\nu_0 < \theta$, де ν_0 визначається співвідношенням /5/.

Тоді задача /1/-/3/ має не більше одного узагальненого розв"язку в $H^{1,1}(Q)$.

Зауваження 2. Умова $C \leq 0$, що випливає з теореми 3, є "близькою до необхідної" для єдиності узагальненого розв"язку.

Приклад. Розглядається скалярне рівняння

$$t^{\theta} u_t - a^2 u_{xx} = cu, \quad \theta > 0, \ c = c(t) = t^{\theta - 1}, \ Q -$$

прямокутник в $\mathbb{R}^2$. Розв"язок цього рівняння $u = L t e^{-\frac{\lambda a^2}{1-\theta} t^{1-\theta}} \cdot P(x)$, $L = const$, λ - власне число задачі Штурма-Ліувілля, $P(x)$ - розв"язок цієї задачі. Але $u = 0$ також є розв"язком рівняння. Отже, єдиності немає.

1. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математики, механики. 1971. № 2. С.29-35. 2. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математики, механики. 1971. № 3. С. 3-9. 3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973. 4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976. 5. Пукач П.Я. Задача Коши для вырождающегося параболического уравнения второго порядка. Львов, 1988. Рукопись деп. в УКРНИИНТИ, № 64-Ук 89. 6. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т.83. 7. Carmela Vitanza. Sulla derivata frazionaria di ordine per le soluzioni dei sistemi parabolici degeneri di ordine superiore // Bol. Unione mat. ital. 1986. T. B5. N 1. P. 197-208.

Стаття надійшла до редколегії 22.05.89