УДК 517.946

В.Г.Костенко

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Досліджуємо задачу про знаходження функцій $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_2(t)$ з умов

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \ell_1 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 0<x<h,\ t>-\infty \\ &\frac{1}{a_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \ell_2 \frac{\partial u_1}{\partial x}; \end{aligned} \qquad /1/$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)u_2\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad t>-\infty \\ &\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_1(t)u_1 + \beta_2(t)u_2\right)\Big|_{x=0} = \mu_2(t), \end{aligned} \qquad /2/$$

$$u_1(x,t)\big|_{x=h} = \nu_1(t), \quad u_2(x,t)\big|_{x=h} = \nu_2(t), \quad t>-\infty \qquad /3/$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=h} = \gamma_1(t), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=h} = \gamma_2(t). \quad t>-\infty \qquad /4/$$

Усі інші коефіцієнти та функції, що входять у вирази /1/-/4/, вважаємо заданими, аналітичними, причому a_1, a_2, ℓ_1, ℓ_2 - сталими. Для розв"язання сформульованої задачі використовуємо символічний метод*. Цим методом спочатку знайдемо в явному вигляді розв"язок задачі /1/, /3/, /4/, використавши який потім знайдемо $\alpha_1(t)$ і $\beta_2(t)$ із виразу /2/.

Застосуємо послідовно два рази інтегральний оператор

$$\mathcal{J}z = \int_h^x z(\alpha,t)\,d\alpha \qquad /5/$$

до системи рівнянь /1/ з урахуванням /3/, /4/ і введемо після цього другий оператор $B_1 z = \mathcal{J}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{J}z$. У результаті задача /1/, /3/, /4/ зведена до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\mathcal{J}B_1}{a_1}\right)u_1 + \ell_1 \mathcal{J}u_2 = \nu_1(t) + \mathcal{J}\left(\gamma_1(t) + \ell_1\nu_2(t)\right), \\ &\ell_2 \mathcal{J}u_1 + \left(1 - \frac{\mathcal{J}B_1}{a_2}\right)u_2 = \nu_2(t) + \mathcal{J}\left(\gamma_2(t) + \ell_2\nu_1(t)\right). \end{aligned} \qquad /6/$$

---

* Л е в и П. Конкретные проблемы функционального анализа. М., 1967.

Далі, формально замінюючи у виразі /6/ оператори B_1, J параметрами λ_1, λ_2 відповідно, одержуємо для нових невідомих функцій $\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2)$, $\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2)$ систему алгебраїчних рівнянь

$$\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}\right)\bar{u}_1+\ell_1\lambda_2\bar{u}_2=\nu_1(t)+\lambda_2(\gamma_1(t)+\ell_1\nu_2(t)),$$
$$\ell_2\lambda_2\bar{u}_1+\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)\bar{u}_2=\nu_2(t)+\lambda_2(\gamma_2(t)+\ell_2\nu_1(t)). \qquad /7/$$

Легко бачити, що за достатньо малих по модулю λ_1, λ_2 система /7/ має єдиний розв"язок

$$\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)\left[\lambda_2(\gamma_1(t)+\ell_1\nu_2(t))+\nu_1(t)\right]-\ell_1\lambda_2\left[\lambda_2(\gamma_2(t)+\ell_2\nu_1(t))+\nu_2(t)\right]}{1-\lambda_2\left[\frac{\lambda_1}{a_1a_2}(a_1+a_2-\lambda_1\lambda_2)+\ell_1\ell_2\lambda_1\lambda_2\right]},$$

$$\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}\right)\left[\lambda_2(\gamma_2(t)+\ell_2\nu_1(t))+\nu_2(t)\right]-\ell_2\lambda_2\left[\lambda_2(\gamma_1(t)+\ell_1\nu_2(t))+\nu_1(t)\right]}{1-\lambda_2\left[\frac{\lambda_1}{a_1a_2}(a_1+a_2-\lambda_1\lambda_2)+\ell_1\ell_2\lambda_1\lambda_2\right]} \qquad /8/$$

Формули обернення, що дають змогу по розв"язку /8/ системи /7/ знайти розв"язок задачі /1/, /3/, /4/, можна у цьому випадку зобразити у вигляді

$$u_1(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_{C_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\left\{\bar{u}_1\left(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)+\frac{1}{\lambda_2}\int_h^x e^{\frac{\tau_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_1\left(t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)d\tau_1\right\},$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_2}\int_{C_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\left\{\bar{u}_2\left(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)+\frac{1}{\lambda_2}\int_h^x e^{\frac{\tau_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_2\left(t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)d\tau_1\right\}, \qquad /9/$$

де C_1, C_2 – кола достатньо малих радіусів з центрами у нулі і розміщені в комплексних площинах λ_1, λ_2. Враховуючи, що при цьому

$$\frac{1}{1-\lambda_2\left[\frac{\lambda_1}{a_1a_2}(a-\lambda_1\lambda_2)+\ell_1\ell_2\lambda_2\right]}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_n^i C_{n-i}^j\frac{a^{n-i-j}(\ell_1\ell_2)^i}{(a_1a_2)^{n-i}}\lambda_1^{n-i+j}\lambda_2^{n+i+j},$$

/10/

де $a=a_1+a_2$, а також використовуючи теорію лишків, перетворюємо вираз /9/ з урахуванням /8/, /10/ у степеневі ряди

$$u_1(x,t) = \nu_1(t) + \gamma_1(t)(x-h) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}}\left\{\nu_1^{(n-i+j)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+j)}}{[2(n+j)]!} + \gamma_1^{(n-i+j)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+j)+1}}{[2(n+j)+1]!}\right\} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}}\left\{\left(l_1 l_2 \nu_1^{(n-i+j)}(t) + \frac{1}{a_2}\nu_1^{(n-i+j+1)}(t) + l_1 \gamma_2^{(n-i+j)}(t)\right)\frac{(x-h)^{2(n+j+1)}}{[2(n+j+1)]!} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_2}\left(l_1 \nu_2^{(n-i+j+1)}(t) + \gamma_1^{(n-i+j+1)}(t)\right)\frac{(x-h)^{2(n+j)+3}}{[2(n+j)+3]!}\right\},$$

$$u_2(x,t) = \nu_2(t) + \gamma_2(t)(x-h) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}}\left\{\nu_2^{(n-i+j)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+j)}}{[2(n+j)]!} + \gamma_2^{(n-i+j)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+j)+1}}{[2(n+j)+1]!}\right\} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}}\left\{\left(l_1 l_2 \nu_2^{(n-i+j)}(t) + \frac{1}{a_1}\nu_2^{(n-i+j+1)}(t) +\right.\right.$$

$$\left.+ l_2 \gamma_1^{(n-i+j)}(t)\right)\frac{(x-h)^{2(n+j+1)}}{[2(n+j+1)]!} + \frac{1}{a_1}\left(l_2 \nu_1^{(n-i+j+1)}(t) +\right.$$

$$\left.\left.+ \gamma_2^{(n-i+j+1)}(t)\right)\frac{(x-h)^{2(n+j)+3}}{[2(n+j)+3]!}\right\}.$$

Безпосередньою перевіркою легко довести, що /II/ дійсно є розв"язком задачі /I/, /3/, /4/ і тим самим /9/ – формулами обернення застосованого тут символічного методу.

Тепер із виразу /II/ знаходимо $u_1(0,t)$, $u_2(0,t)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}$ і, користуючись ними, з виразу /2/ визначаємо $\alpha_1(t)$ і $\beta_2(t)$ формулами

3-2498

$$\alpha_1(t) = \frac{\mu_1(t) - \alpha_2(t)\, u_2(0,t) - \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}}{u_1(0,t)},$$

$$\beta_2(t) = \frac{\mu_2(t) - \beta_1(t)\, u_1(0,t) - \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}}{u_2(0,t)},$$

якщо $u_1(0,t)$; $u_2(0,t) \neq 0$.

Стаття надійшла до редколегії 31.10.89

УДК 517.956

І.Я.Кміть

НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У ТРИВИМІРНИХ ОБЛАСТЯХ

Нелокальні задачі для гіперболічних систем зі змінними коефіцієнтами достатньою мірою розроблені лише у випадку двох незалежних змінних [1-4, 6]. Для більшої кількості незалежних змінних одержано ряд результатів тільки у випадку коефіцієнтів, які залежать лише від часу [5].

В області $\Omega = \{(x,y,t): 0<x<l, -\infty<y<+\infty, 0<t<T\}$ розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$u_{it} - \lambda_i(x,t)\, u_{ix} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{jy} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\, u_j = F_i(x,y,t), \quad (i=\overline{1,n}) \qquad /1/$$

з початковими

$$u_i\big|_{t=0} = \varphi_i(x,y), \quad (i=\overline{1,n}) \qquad /2/$$

та крайовими

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\, u_j\Big|_{x=0} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t)\, u_j\Big|_{x=l} = \gamma_i(y,t), \quad (i=\overline{1,n}) \qquad /3/$$

умовами. Будемо вважати, що в усій розглядуваній області система /1/ гіперболічна, тобто λ_i дійсні функції від x, t; усі $\lambda_i(x,t)$ різні і їх можна перенумерувати в порядку зростан-