$$\alpha_1(t) = \frac{\mu_1(t) - \alpha_2(t)\,u_2(0,t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}}{u_1(0,t)},$$

$$\beta_2(t) = \frac{\mu_2(t) - \beta_1(t)\,u_1(0,t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}}{u_2(0,t)},$$

якщо $u_1(0,t);\ u_2(0,t) \neq 0.$

Стаття надійшла до редколегії 31.10.89

УДК 517.956

І.Я.Кміть

НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У ТРИВИМІРНИХ ОБЛАСТЯХ

Нелокальні задачі для гіперболічних систем зі змінними коефіцієнтами достатньою мірою розроблені лише у випадку двох незалежних змінних [1-4, 6]. Для більшої кількості незалежних змінних одержано ряд результатів тільки у випадку коефіцієнтів, які залежать лише від часу [5].

В області $\Omega = \{(x,y,t): 0<x<\ell, -\infty<y<+\infty, 0<t<T\}$ розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$u_{it} - \lambda_i(x,t)u_{ix} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{jy} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_j = F_i(x,y,t),\ (i=\overline{1,n}) \tag{1}$$

з початковими

$$u_i\Big|_{t=0} = \varphi_i(x,y),\ (i=\overline{1,n}) \tag{2}$$

та крайовими

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)u_j\Big|_{x=0} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t)u_j\Big|_{x=\ell} = \gamma_i(y,t),\ (i=\overline{1,n}) \tag{3}$$

умовами. Будемо вважати, що в усій розглядуваній області система /1/ гіперболічна, тобто λ_i дійсні функції від x, t; усі $\lambda_i(x,t)$ різні і їх можна перенумерувати в порядку зростання: $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \le \ldots \le \lambda_n$, $0 \le k \le n$. Припустимо, що функції $a_{ij}, b_{ij}, \lambda_i, F_i, \Phi_i, \gamma_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ відомі та неперервні по всіх своїх аргументах, а також неперервно диференційовані по x.

Введемо такі позначення:

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1k} & \beta_{1,k+1} \ldots \beta_{1n} \\ \alpha_{21} \ldots \alpha_{2k} & \beta_{2,k+1} \ldots \beta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nk} & \beta_{n,k+1} \ldots \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \det \Gamma(t),$$

$$A(y) = \frac{1}{g(0)}\left[\frac{g'(0)}{g(0)}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ji}(0) - \sum_{j=1}^{n}\Gamma'_{ji}(0)\right] \times$$

$$\times \left[\gamma_j(y,0) - \sum_{s=k+1}^{n}\alpha_{js}(0)\Phi_s(0,y) - \sum_{s=1}^{k}\beta_{js}(0)\Phi_s(l,y)\right],$$

$$B(\rho)(x,y) = \sum_{s=k+1}^{n}\rho'_{js}(0)\Phi_s(0,y)\frac{1}{\lambda_i(x,0)} -$$

$$-\sum_{s=k+1}^{n}\rho_{js}(0)\Phi'_{sx}(0,y) + \sum_{s=k+1}^{n}\rho_{js}(0)F_s(0,y,0)\frac{1}{\lambda_i(x,0)} -$$

$$-\sum_{s=k+1}^{n}\rho_{js}(0)\frac{1}{\lambda_i(0,0)}\sum_{p=1}^{n}c_{sp}(x,0)\Phi_p(x,y),$$

$$C(x,y) = \frac{1}{\lambda_i(x,0)}\left[\Phi_i(x,y) - \sum_{j=1}^{n}c_{ij}(x,0)\Phi_j(x,y)\right],$$

$$v_s(x,t,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}u_s(x,y,t)e^{iy\sigma}dy,$$

$$f_s(x,t,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} F_s(x,y,t)e^{iy\sigma}dy,$$

$$\varphi_s(x,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_s(x,y)e^{iy\sigma}dy,$$

$$\rho_s(t,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_s(y,t)e^{iy\sigma}dy,$$

$$c_{sj}=b_{sj}-i\sigma a_{sj},$$

де Γ_{ji} $(j=\overline{1,k})$ – алгебраїчне доповнення елемента α_{ji} і Γ_{ji} $(j=\overline{k+1,n})$ – алгебраїчне доповнення елемента β_{ji} матриці Γ.

Теорема I. Якщо виконуються зроблені вище припущення та наступні умови:

1/ $\int_{-\infty}^{\infty}|F_i|dy<\infty, \int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_i|dy<\infty, \int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_i|dy<\infty, \; i=\overline{1,n};$

2/ $\det\Gamma(t)\neq 0 \quad \forall t\in[0,T];$

3/ $$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\max_{s,x,t}|f_s|+\max_{s,x,t}|f'_{sx}|+|\sigma|\max_{s,x,t}|f_s|+$$
$$+\max_{s,x}|\varphi_s|+\max_{s,x}|\varphi'_{sx}|+|\sigma|\max_{s,x}|\varphi_s|+$$
$$+\max_{s,t}|\rho_s|+\max_{s,t}|\rho'_{st}|+|\sigma|\max_{s,t}|\rho_s|\Big)\times$$
$$\times e^{K(\max_{s,j,x,t}|b_{sj}|+|\sigma|\max_{s,j,x,t}|a_{sj}|)-iy\sigma}d\sigma<\infty,$$

де K – деяка константа, що не залежить від s,j,x,t;

4/ виконуються умови узгодженості:

а/ $$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(0)\Phi_j(0,y)+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(0)\Phi_j(\ell,y)=\gamma_i(y,0) \quad (i=\overline{1,n}),$$

б/ $$\frac{1}{\lambda_i(0,0)}A(y)+\frac{1}{g(0)}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ji}(0)\Big[-\gamma'_{jt}(y,0)\frac{1}{\lambda_i(0,0)}+$$

$$+ B(\alpha)(0,y) + B(\beta)(0,y)] + C(0,y) = \Phi'_{ix}(0,y)$$

$$(i=\overline{1,k}),$$

$$\frac{1}{\lambda_i(\ell,0)} A(y) + \frac{1}{g(0)} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ji}(0) \Big[-\gamma'_{jt}(y,0) \frac{1}{\lambda_i(\ell,0)} +$$

$$+ B(\alpha)(\ell,y) + B(\beta)(\ell,y)] + C(\ell,y) = \Phi'_{ix}(\ell,y), \ (i=\overline{k+1,n}),$$

то задача /1/-/3/ в області Ω має єдиний класичний розв"язок - такий, що $|U| \xrightarrow[|y| \to +\infty]{} 0$.

<u>Доведення.</u> Основними етапами доведення є такі:
1/ застосовуючи до виразів /1/-/3/ перетворення Фур"є по y , приходимо до еквівалентної їй задачі:

$$V_{it} - \lambda_i V_{ix} + \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j = f_i, \ (i=\overline{1,n}), \qquad /1'/$$

$$V_i \Big|_{t=0} = \varphi_i(x,\sigma), \ (i=\overline{1,n}), \qquad /2'/$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t) V_j \Big|_{x=0} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t) V_j \Big|_{x=\ell} = \rho_i(t,\sigma), \ (i=\overline{1,n}); \qquad /3'/$$

2/ використовуючи метод характеристик, зводимо /1'/, /2'/, /3'/ до системи інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду;
3/ використовуємо метод послідовних наближень.

Справедлива аналогічна теорема в області

$$\Omega = \{(x,y,t): 0<x<\ell, \ 0<y<+\infty, \ 0<t<T\}.$$

Розглянемо задачу /1/-/3/ в області $\Omega_0 = \{(x,y,t): 0<x<\ell, \ 0<y<a, \ 0<t<T\}$ із збереженням усіх зроблених вище припущень.

Позначимо через

$$\bar{U}_s^{\ell} = \int_0^a u_s e^{i\frac{2\pi \ell y}{a}} dy,$$

$$\bar{f}_s^{\ell} = \int_0^a F_s e^{i\frac{2\pi \ell y}{a}} dy,$$

$$\bar{\varphi}_s^{\,l} = \int_0^a \Phi_s e^{i\frac{2\pi l y}{a}} dy,$$

$$\bar{\rho}_s^{\,l} = \int_0^a \gamma_s e^{i\frac{2\pi l y}{a}} dy.$$

Має місце така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються зроблені вище припущення і умови:

1/ функції F_i, Φ_i, γ_i мають лише скінченне число максимумів і мінімумів по y на $[0,a]$;

2/ $\det \Gamma(t) \neq 0, \forall t \in [0,T]$;

3/ $$\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\max |\bar{f}_{ix}^{\,l\prime}| + l\max |\bar{f}_i^{\,l}| + \max_{i,x} |\bar{\varphi}_{i,x}^{\,l}| + l\max |\bar{\varphi}_i^{\,l}| + \max |\bar{\rho}_{it}^{\,l\prime}| + l\max |\bar{\rho}_i^{\,l}| \Big) \times e^{K(\max|b_{ij}| + l\max|a_{ij}|)} < \infty,$$

де K - деяка константа, що не залежить від i, x, t;

4/ виконуються умови узгодженості:

а/ $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(0)\,\Phi_j(0,y) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(0)\,\Phi_j(l,y) = \gamma_i(y,0) \quad (i=\overline{1,n}),$$

б/ $$\frac{1}{\lambda_i(0,0)} A(y) + \frac{1}{g(0)} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ji}(0) \Big[\frac{-\gamma_{jt}'(y,0)}{\lambda_i(0,0)} + B(\alpha)(0,y) + B(\beta)(0,y) \Big] + c(0,y) = \Phi_{ix}'(0,y), \quad (i=\overline{1,k}),$$

$$\frac{1}{\lambda_i(l,0)} A(y) + \frac{1}{g(0)} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ji}(0) \Big[-\frac{\gamma_{jt}'(y,0)}{\lambda_i(l,0)} + B(\alpha)(l,y) + B(\beta)(l,y) \Big] + c(l,y) = \Phi_{ix}'(l,y), \quad (i=\overline{k+1,n}),$$

то задача /1/-/3/ в області Ω_0 має єдиний класичний розв"язок - такий, що

$$u(x,0,t) = u(x,a,t).$$

1. Мельник З.О. Об одной общей смешанной задаче // Докл. АН СССР. 1964. Т.157. № 5. С.1039-1042. 2. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и

систем на прямой //Укр. мат. журн. 1983. Т.35. № 6. С.722-727. 3.М е л ь н и к З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Диф. уравнения. 1985. Т.21. № 2. С.246-253. 4.Н а х у ш е в А.М. Нагруженные уравнения и их приложения //Диф. уравнения. 1983. Т.19. № 1. С.86-94. 5.П т а ш н и к Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 6.С т е п а н о в а Н.В. Математические модели непрерывной культуры микроорганизмов, распределенных по возрастам и размерам //Математические модели в экологии /Горьк. ун-т. Горький, 1980. С.95-113.

Стаття надійшла до редколегії 31.10.89

УДК 517.95

Г.-В.С.Гупало

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ СИСТЕМИ ТЕПЛОВОЛОГОПЕРЕНОСУ

Розглянемо задачу знаходження коефіцієнтів і функцій $\{A_1, A_2, A_3, A_4, T(x,t), W(x,t)\}$, що задовольняють умови

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = A_3 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - A_4 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}; \quad x>0,\ 0<t\le T_0, \qquad /1/$$

$$T(x,0)=0,\ W(x,0)=0,\ x\geqslant 0; \qquad /2/$$

$$T(0,t)=\mu(t),\ W(0,t)=\bar{\mu}(t),\ 0\le t\le T_0 \qquad /3/$$

і додаткові умови вигляду

$$\frac{\partial T(0,t_0)}{\partial x}=\varkappa_0,\quad \frac{\partial W(0,t_0)}{\partial x}=\bar{\varkappa}_0,\quad 0<t_0<t_1<T_0.$$
$$\frac{\partial T(0,t_1)}{\partial x}=\varkappa_1,\quad \frac{\partial W(0,t_1)}{\partial x}=\bar{\varkappa}_1, \qquad /4/$$

Тут $T(x,t)$, $W(x,t)$ – безрозмірні потенціали тепла і вологості. Коефіцієнти A_i, $i=\overline{1,4}$, які характеризують перенос субстанції /тепла і вологості/ [2, 3], вважатимемо сталими.

Припускаємо, що функції $\mu(t)$, $\bar{\mu}(t)$ і $\mu'(t)$, $\bar{\mu}'(t)$ неперервні на $[0,T_0]$, $\mu(0)=0, \bar{\mu}(0)=0, \varkappa_0, \bar{\varkappa}_0, \varkappa_1, \bar{\varkappa}_1 - const$.