систем на прямой //Укр. мат. журн. 1983. Т.35. № 6. С.722-727. 3.М е л ь н и к З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Диф. уравнения. 1985. Т.21. № 2. С.246-253. 4.Н а х у ш е в А.М. Нагруженные уравнения и их приложения //Диф. уравнения. 1983. Т.19. № 1. С.86-94. 5.П т а ш н и к Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 6.С т е п а н о в а Н.В. Математические модели непрерывной культуры микроорганизмов, распределенных по возрастам и размерам //Математические модели в экологии /Горьк. ун-т. Горький, 1980. С.95-113.

Стаття надійшла до редколегії 31.10.89

УДК 517.95

Г.-В.С.Гупало

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ СИСТЕМИ ТЕПЛОВОЛОГОПЕРЕНОСУ

Розглянемо задачу знаходження коефіцієнтів і функцій $\{A_1, A_2, A_3, A_4, T(x,t), W(x,t)\}$, що задовольняють умови

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = A_3 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - A_4 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}; \qquad x>0,\ 0<t\le T_0, \qquad /1/$$

$$T(x,0)=0,\quad W(x,0)=0,\quad x\geq 0; \qquad /2/$$

$$T(0,t)=\mu(t),\quad W(0,t)=\bar{\mu}(t),\quad 0\le t\le T_0 \qquad /3/$$

і додаткові умови вигляду

$$\frac{\partial T(0,t_0)}{\partial x} = \varkappa_0,\quad \frac{\partial W(0,t_0)}{\partial x} = \bar{\varkappa}_0,$$

$$\frac{\partial T(0,t_1)}{\partial x} = \varkappa_1,\quad \frac{\partial W(0,t_1)}{\partial x} = \bar{\varkappa}_1, \qquad 0<t_0<t_1<T_0. \qquad /4/$$

Тут $T(x,t)$, $W(x,t)$ – безрозмірні потенціали тепла і вологості. Коефіцієнти A_i, $i=\overline{1,4}$, які характеризують перенос субстанції /тепла і вологості/ [2, 3], вважатимемо сталими.

Припускаємо, що функції $\mu(t)$, $\bar{\mu}(t)$ і $\mu'(t)$, $\bar{\mu}'(t)$ неперервні на $[0,T_0]$, $\mu(0)=0$, $\bar{\mu}(0)=0$, $\varkappa_0, \bar{\varkappa}_0, \varkappa_1, \bar{\varkappa}_1$ – const.

Помножимо перше рівняння із виразу /I/ на деяку сталу p, а друге на q, додамо і отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(pT+qW)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(pA_1-qA_4)T+(qA_3-pA_2)W\right]. \qquad /5/$$

Співвідношення /5/ матиме форму рівняння теплопровідності стосовно $Z(x,t)=pT(x,t)+qW(x,t)$ при умові, що

$$\frac{pA_1-qA_4}{p}=\frac{qA_3-pA_2}{q}=a^2. \qquad /6/$$

Із виразу /6/ одержуємо для a рівняння

$$a^4-a^2(A_1+A_3)+A_1A_3+A_2A_4=0,$$

тобто

$$a_i^2=\frac{1}{2}\left[(A_1+A_3)+(-1)^i\sqrt{(A_1+A_3)^2-4(A_1A_3-A_2A_4)}\right],\quad i=1,2. \qquad /7/$$

Кожному значенню a_i^2 $/i=1,2/$ будуть відповідати свої p_i і q_i. Отже, система /I/ з урахуванням виразів /5/-/7/ набуде вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1(x,t)}{\partial t}&=a_1^2\frac{\partial^2 z_1(x,t)}{\partial x^2},\\ \frac{\partial z_2(x,t)}{\partial t}&=a_2^2\frac{\partial^2 z_2(x,t)}{\partial x^2};\end{aligned} \qquad /8/$$

$$z_i(x,t)=p_iT(x,t)+q_iW(x,t),\quad i=1,2. \qquad /9/$$

Визначимо сталі p_i і q_i, $i=1,2$. Через те, що a_1^2 і a_2^2 зв"язані співвідношеннями

$$a_1^2+a_2^2=A_1+A_3,\quad a_1^2a_2^2=A_1A_3-A_2A_4, \qquad /10/$$

то два з чотирьох рівнянь /6/ повинні бути незалежними. Отже, дві сталі можемо вибрати довільно, візьмемо $p_1=q_2=1$, тоді з виразу /6/ матимемо

$$q_1=\frac{A_1-a_1^2}{A_4},\qquad p_2=\frac{A_4}{A_1-a_2^2}. \qquad /11/$$

Виконавши такі ж перетворення з початковими, крайовими і додатковими умовами /2/-/4/, як з системою /I/ для функцій $z_i(x,t)$, $i=1,2$, отримаємо умови

$$z_i(x,0)=0,\quad x\geq 0, \qquad /12/$$

$$z_i(0,t) = M_i(t), \quad 0 \leq t \leq T_0,$$

/13/

$$\frac{\partial z_i(0,t_0)}{\partial x} = K_i^0, \quad \frac{\partial z_i(0,t_1)}{\partial x} = K_i^1, \quad 0 < t_0 < t_1 < T_0.$$

/14/

Тут $M_i(t) = p_i \mu(t) + q_i \bar{\mu}(t)$, $K_i^0 = p_i \varkappa_0 + q_i \bar{\varkappa}_0$, $K_i^1 = p_i \varkappa_1 + q_i \bar{\varkappa}_1$.

В результаті ми прийшли до обернених задач для рівняння типу теплопровідності для визначення $\{a_i, z_i(x,t)\}$, $i=1,2$.

Задача /8/, /12/-/14/ досліджена у праці [1], в якій встановлено необхідну умову існування коефіцієнта температуропровідності і отримано формули для знаходження a_i, $z_i(x,t)$. Використовуючи ці результати і вираз /10/, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення a_i, $i=1,2$, A_i, $i=\overline{1,4}$

$$\begin{cases} a_i = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, K_i^0} \displaystyle\int_0^{t_0} \dfrac{M_i'(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}\, d\tau, & \\ & i=1,2, \\ a_i = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, K_i^1} \displaystyle\int_0^{t_1} \dfrac{M_i'(\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}\, d\tau, & \\ A_1 + A_3 = a_1^2 + a_2^2, & \\ A_1 A_3 - A_2 A_4 = a_1^2 a_2^2. & \end{cases}$$

/15/

Розв"язуючи систему /15/, знаходимо

$$a_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4(\mathcal{J}_1 \bar{\mathcal{J}}_0 - \mathcal{J}_0 \bar{\mathcal{J}}_1)(\varkappa_1 \bar{\varkappa}_0 - \varkappa_0 \bar{\varkappa}_1)}}{2(\varkappa_1 \bar{\varkappa}_0 - \varkappa_0 \bar{\varkappa}_1)},$$

$$A_1 = \frac{a_1^2(\bar{\varkappa}_0 a_1 - \bar{\mathcal{J}}_0)(\mathcal{J}_0 - a_2 \varkappa_0) - a_2^2(\bar{\varkappa}_0 a_2 - \bar{\mathcal{J}}_0)(\mathcal{J}_0 - a_1 \varkappa_0)}{(a_1 - a_2)(\bar{\varkappa}_0 \mathcal{J}_0 - \varkappa_0 \bar{\mathcal{J}}_0)},$$

$$A_4 = \frac{(A_1 - a_2^2)(\bar{\varkappa}_0 a_2 - \bar{\mathcal{J}}_0)}{\mathcal{J}_0 - a_2 \varkappa_0},$$

/16/

$$A_3 = a_1^2 + a_2^2 - A_1, \quad A_2 = \frac{a_1^2 a_2^2 - A_1 A_3}{A_4},$$

де

$$\mathcal{J}_j = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_j} \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{t_j - \tau}}\, d\tau, \quad \bar{\mathcal{J}}_j = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_j} \frac{\bar{\mu}'(\tau)}{\sqrt{t_j - \tau}}\, d\tau, \quad j = 0,1,$$

$$B = \varkappa_1 \bar{\mathcal{J}}_0 - \bar{\varkappa}_1 \mathcal{J}_0 + \bar{\varkappa}_0 \mathcal{J}_1 - \varkappa_0 \bar{\mathcal{J}}_1.$$

Тепер можемо знайти $z_i(x,t)$, $i=1,2$

$$z_i(x,t)=\frac{x}{2a_i\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{M_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a_i^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

І, врахувавши вирази /9/ і /11/, $T(x,t)$, $W(x,t)$,

$$T(x,t)=\frac{A_1-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\left[z_1(x,t)-\frac{A_1-a_1^2}{A_4}z_2(x,t)\right],$$

$$W(x,t)=\frac{A_1-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\left[z_2(x,t)-\frac{A_4}{A_1-a_2^2}z_1(x,t)\right]. \qquad /17/$$

Хоч вихідна система /1/ в результаті перетворень зводиться до системи двох незв"язних рівнянь типу теплопровідності, слід врахувати, що роль "потенціалу" тут відіграє функція $z_i(x,t)$, яка є лінійною комбінацією $T(x,t)$ і $W(x,t)$. Тому по П.С.Генрі [2] фізична інтерпретація розв"язків /17/ така: кожна температурна "хвиля" супроводжується дифузійною "хвилею", яка іде з тією ж швидкістю, пропорційною температурній "хвилі", і аналогічно дифузійна "хвиля" супроводжується додатковою температурною "хвилею".

1.Іванчов М.І. Про обернену задачу визначення коефіцієнта температуропровідності //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 30. С.13-16. 2.Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.; Л., 1963. 3.Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.89

УДК 517.956.25

Г.П.Лпушанська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ РОЗПОДІЛІВ

Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторах Соболева розглядалась у праці [6], де отримані результати грунтувались на теоремах про гомеоморфізми [1]. У даній статті з області $\Omega\subset R^n$, обмеженій замкненою поверхнею класу C^∞ для квазілінійного еліптичного рівняння