Тепер можемо знайти $z_i(x,t)$, $i=1,2$

$$z_i(x,t)=\frac{x}{2a_i\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{M_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4a_i^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

І, врахувавши вирази /9/ і /11/, $T(x,t)$, $W(x,t)$,

$$T(x,t)=\frac{A_1-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\left[z_1(x,t)-\frac{A_1-a_1^2}{A_4}z_2(x,t)\right],$$

$$W(x,t)=\frac{A_1-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\left[z_2(x,t)-\frac{A_4}{A_1-a_2^2}z_1(x,t)\right]. \qquad /17/$$

Хоч вихідна система /1/ в результаті перетворень зводиться до системи двох незв"язних рівнянь типу теплопровідності, слід врахувати, що роль "потенціалу" тут відіграє функція $z_i(x,t)$, яка є лінійною комбінацією $T(x,t)$ і $W(x,t)$. Тому по П.С.Генрі [2] фізична інтерпретація розв"язків /17/ така: кожна температурна "хвиля" супроводжується дифузійною "хвилею", яка іде з тією ж швидкістю, пропорційною температурній "хвилі", і аналогічно дифузійна "хвиля" супроводжується додатковою температурною "хвилею".

1. Іванчов М.І. Про обернену задачу визначення коефіцієнта температуропровідності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 30. С.13-16. 2. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.; Л., 1963. 3. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.89

УДК 517.956.25

Г.П.Лопушанська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ РОЗПОДІЛІВ

Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторах Соболева розглядалась у праці [6], де отримані результати грунтувались на теоремах про гомеоморфізми [1]. У даній статті з області $\Omega\subset R^n$, обмеженій замкненою поверхнею класу C^∞ для квазілінійного еліптичного рівняння

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x)u = f(x,u) \qquad /1/$$

з нескінченно диференційованими коефіцієнтами $a(x) \leq 0$, досліджується задача Діріхле, коли на границі S задано довільний розподіл Шварца. Узагальнюється методика [3-5, 9] дослідження таких узагальнених крайових задач для лінійних однорідних рівнянь.

Далі вживаємо позначення $D(\bar{\Omega}) = C^{\infty}(\bar{\Omega}), D(S) = C^{\infty}(S)$, $D'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів на $D(S)$ /простір розподілів/, (φ, F) - дія $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$. Через $\rho(x) > 0$ позначимо нескінченно диференційовану і фінітну в Ω функцію, яка дорівнює нулеві на границі S, а в околі S має порядок $dist(x, S)$, через S_ε - паралельну до S поверхню, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, якщо $x_\varepsilon = x + \varepsilon \nu(x), x \in S$ і $\nu(x)$ - орт внутрішньої нормалі на S в точці x, вважатимемо $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$ для кожної $\varphi \in D(S)$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

<u>Постановка задачі.</u> Знайти двічі неперервно диференційований всередині області Ω розв"язок $u(x)$ рівняння /1/, який на S набуває узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$, тобто задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon) \varphi(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = (\varphi, F) \qquad \forall \varphi \in D(S). \qquad /2/$$

<u>Теорема 1.</u> Нехай $f(x,u)$ - неперервна функція, диференційована по u, $f_u \geq 0$, існує не більше одного розв"язку $u(x)$ задачі /1/-/2/ такого, що $\int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha}(x) |f(x, u(x))| dx < \infty, \alpha > 0$.

<u>Доведення.</u> Якщо $u_1(x), u_2(x)$ - два розв"язки задачі, $u = u_1 - u_2$, то

$$Lu(x) \equiv f(x, u_1(x)) - f(x, u_2(x)), \; x \in \Omega \qquad /3/$$

і

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon) \varphi(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_S u(x + \varepsilon \nu(x)) \varphi(x) J_\varepsilon(x) dS = 0 \qquad /4/$$

для кожної $\varphi \in D(S)$, де $J_\varepsilon(x)$ - якобіан перетворення $x_\varepsilon = x + \varepsilon \nu(x)$. Нехай $K(\xi, x)$ - функція Гріна задачі Діріхле для оператора L, Ω_ε - область, обмежена поверхнею S_ε, тоді всередині Ω_ε для $u(x)$ вірне представлення

$$u(x)=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\mathcal{K}(\xi,x)[f(\xi,u_1(\xi))-f(\xi,u_2(\xi))]d\xi-\int\limits_{S_\varepsilon}Q_\xi\mathcal{K}(\xi_\varepsilon,x)u(\xi_\varepsilon)dS_\varepsilon,\quad x\in\Omega_\varepsilon, \qquad /5/$$

де $Q_\xi=\frac{\partial}{\partial N_\xi}-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\xi)\nu_i$, $\bar{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_n)$, $\vec{N}$ - внутрішня конормаль для оператора L [8]. У виразі /5/ переходимо до границі, коли $\varepsilon\to 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}Q_\xi\mathcal{K}(\xi_\varepsilon,x)u(\xi_\varepsilon)dS_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S}Q_\xi\mathcal{K}(\xi+\varepsilon\nu(\xi),x)J_\varepsilon(\xi)u(\xi+\varepsilon\nu(\xi))dS,$$

за лемою [2, с.95] останній вираз дорівнює

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S}Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x)u(\xi+\varepsilon\nu(\xi))J_\varepsilon(\xi)dS$, а згідно з рівністю /4/ - нулеві /тут $\varphi(\xi)=Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x)$ /. Тепер із рівності /5/, враховуючи умови теореми і властивості функції $\mathcal{K}(\xi,x)$, маємо

$$u(x)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{K}(\xi,x)[f(\xi,u_1(\xi))-f(\xi,u_2(\xi))]d\xi,\ x\in\Omega. \qquad /6/$$

Оскільки в наших припущеннях для рівняння /1/ діє принцип максимуму, то $\mathcal{K}(\xi,x)<0\ \forall\xi,x\in\Omega$, а тоді із виразу /6/ за теоремою про середнє маємо $u(x)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{K}(\xi,x)d\xi\,[f(\bar{\xi},u_1(\bar{\xi}))-f(\bar{\xi},u_2(\bar{\xi}))]$, $x\in\Omega$ або $u(x)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{K}(\xi,x)d\xi\,f_u(\bar{\xi},\bar{u}(\bar{\xi}))u(\bar{\xi})$, де $\bar{\xi}$ - деяка точка із Ω, $\bar{u}(\bar{\xi})\in(u_i(\bar{\xi}),u_j(\bar{\xi}))$, $i,j=1,2$, $i\neq j$. Із останньої рівності /оскільки $f_u\geq 0$ / отримуємо, що $u(x)\equiv 0$, $x\in\Omega$.

Теорема 2. Нехай $F\in D'(S)$, $f(x,u)$ задовольняє умови теореми 1 і, крім того,

$$\sup_{\xi\in\Omega}\int\rho^{\kappa}(x)|\mathcal{K}(\xi,x)|dx\,\rho^{-\kappa}(\xi)f_u(\xi,u(\xi))<1,$$
$$u\in C^2(\Omega),\ \int\limits_{\Omega}\rho^{\kappa}(\xi)|u(\xi)|d\xi<\infty,\quad \kappa>0, \qquad /7/$$

тоді існує єдиний розв"язок $u(x)$ задачі /1/-/2/, який задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$u(x)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{K}(\xi,x)f(\xi,u(\xi))d\xi-(Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x),F),\ x\in\Omega. \qquad /8/$$

Доведення. Використовуючи властивості функції Гріна, переконуємося, що інтегральне рівняння /8/ є еквівалентним задачі /1/-/2/. Із умови /7/ випливає існування розв"язку інтегрального рівняння /8/, яке можна знайти методом послідовних наближень

$$u_n(x)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{K}(\xi,x)f(\xi,u_{n-1}(\xi))d\xi-f_0(x),\ n=1,2,\dots,$$

де $f_0(x)=(Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x),F)$, $u_0(x)$ - довільна гладка в Ω функція, наприклад $u_0(x)=-f_0(x)$.

Теорема 3. Для існування розв"язку задачі /1/-/2/ необхідно і досить, щоб існувало число $k>0$ таке, що

$$\int_{\Omega}\rho^k(x)|u(x)|dx+\int_{\Omega}\rho(x)|f(x,u(x))|dx<\infty. \qquad /9/$$

Теорема доводиться за тією ж схемою, що аналогічна теорема [3] у випадку лінійного однорідного рівняння.

Зауваження. Число k зв"язане з порядком узагальненої функції F [2]. Якщо відомий порядок F, то виконання умов теорем 1,2 досить вимагати для довільної двічі неперервно диференційованої всередині області Ω функції $u(x)$, яка задовольняє /9/.

Теорема 4. Нехай $F\in D'(S)$, $f(x,u)$ – неперервна в $\Omega\times R^1$, диференційована по u функція, $f_u\geq 0$, для кожної двічі неперервно диференційованої всередині Ω функції $u(x)$, яка задовольняє умову /9/, існує $\int_{\Omega}\omega(\xi,x)f(\xi,u(\xi))d\xi \overset{df}{=} A_f(x,u)$ і виконується /7/ при заміні $\mathcal{X}(\xi,x)$ на $|\omega(\xi,x)-\int_S B_\omega(t,x)\omega(\xi,t)dS_t|$, де $\omega(\xi,x)$ - фундаментальна функція оператора L, $B_\omega(t,x)$ - розв"язок інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi(t)+\int_S Q_t\,\omega(t,\xi)\varphi(\xi)dS_\xi=Q_t\,\omega(t,x),\quad t\in S,\ x\in\Omega.$$

Тоді існує єдиний розв"язок задачі /1/-/2/, і він задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$u(x)=A_f(x,u)-\int_S B_\omega(t,x)A_f(t,u)dS_t+(B_\omega(t,x),F),\ x\in\Omega.$$

Теорема 5. Нехай $F\in D'(S)$, $f(x,u)$ задовольняє умови теорем 1,2. Двічі неперервно диференційована всередині Ω функція $u(x)$ є розв"язком задачі /1/-/2/ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє тотожність

$$\int_{\Omega}L^*\psi(x)u(x)dx=\int_{\Omega}\psi(x)f(x,u(x))dx-(Q\psi,F)\quad \forall\psi\in X(\bar\Omega), \qquad /10/$$

$$X(\bar\Omega)=\{\varphi\in D(\bar\Omega):\varphi|_S=0,\ \exists k>0,\ L^*\varphi(x)=0(\rho^k(x)),\ x\to x_0\in S\},$$

L^* - формально спряжений оператор до L.

Доведення. Нехай $u(x)$ - розв"язок задачі /1/-/2/. Із теореми 3 випливає існування $\int_{\Omega}L^*\psi(x)u(x)dx$ для кожної $\psi\in X(\bar\Omega)$. Підставляємо в ліву частину /10/ замість $u(x)$ вираз справа у /8/, маємо

$$\int_{\Omega} L^{*}\psi(x)u(x)dx = \int_{\Omega} L^{*}\psi(x)dx \int_{\Omega} \mathcal{K}(\xi,x) f(\xi,u(\xi))d\xi - \int_{\Omega} L^{*}\psi(x)(Q_{\xi}\mathcal{K}(\xi,x),F)dx$$

$$= \int_{\Omega} f(\xi,u(\xi))d\xi \int_{\Omega} L^{*}\psi(x)\mathcal{K}(\xi,x)dx - \left(\int_{\Omega} L^{*}\psi(x)Q_{\xi}\mathcal{K}(\xi,x)dx, F\right)$$

А враховуючи властивості функції Гріна [5], прийдемо до правої частини /10/.

Нехай тепер $u(x)$ задовольняє тотожність /10/. Якщо взяти $\psi\in D(\Omega)$, то із /10/ отримаємо, що $u(x)$ – узагальнений розв"язок рівняння /1/, а, враховуючи гіпоеліптичність оператора L і умови на $f(x,u)$, дістаємо, що $u(x)$ – класичний розв"язок цього рівняння. Тепер для довільної $\psi\in X(\bar{\Omega})$ записуємо ліву частину /10/ як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} L^{*}\psi(x)u(x)dx$ і перетворюємо за формулою Гріна для Ω_{ε}; враховуючи тотожність /10/, отримуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{\varepsilon}}\left(Q\psi(x_{\varepsilon})u(x_{\varepsilon}) - \psi(x_{\varepsilon})\frac{\partial u(x_{\varepsilon})}{\partial N}\right)dS_{\varepsilon} = (Q\psi,F) \quad \forall\psi\in X(\bar{\Omega}). \qquad /11/$$

За лемою [7] для кожної $\varphi\in D(S)$ існує $\psi\in X(\bar{\Omega})$ така, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} Q\psi(x_{\varepsilon}) = \varphi(x)$ / $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(x_{\varepsilon}) = 0$ за означенням простору $X(\bar{\Omega})$/. Переходячи у лівій частині /11/ до інтегрування по S і враховуючи лему [2, с.95], маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S}\varphi(x)J_{\varepsilon}(x)u(x+\varepsilon\nu(x))dS = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{\varepsilon}}\varphi(x_{\varepsilon})u(x_{\varepsilon})dS_{\varepsilon} \quad \forall\varphi\in D(S),$$

тобто /11/ і /2/ співпадають.

Зауважимо, що у випадку $f(x,u)\equiv 0$ необхідність дещо іншим методом доведена у праці [4].

Отримані результати узагальнюються на випадок нормальних крайових задач для квазілінійних гіпоеліптичних рівнянь, у тому числі з розривними на гладких поверхнях всередині області Ω коефіцієнтами.

1. Березанский Ю.М., Крейн С.Г., Ройтберг Я.А. Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1963. Т.148. № 4. С.745-748. 2. Гельфанд И.И., Шилов Г.Е. Пространства основных обобщенных функций. М., 1958. 3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле //Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843-846. 4. Гупало Г.-В. С., Лопушанська Г.П. Задача Діріхле для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу в просторі узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Вип. 24. Сер. мех.-мат. 1985. с. 16-20. 5. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. Об одном представлении решения

обобщенной эллиптической граничной задачи // Диф. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С.518-521. 6. Крейн С.Г., Симонов А.С. Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 6. С.1226-1229. 7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 8. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957. 9. Szmydt Z. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzati // Atti.Accad. naz. Lincei. Rend. Cl.Sci.fis.mat. e natur. 1962. Vol. 32. N 3. P. 867-872.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.89

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ КРАЙОВОЇ УМОВИ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу про знаходження функцій $u(x,t)$, $\nu(t)$ з умов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in D = \{x,t : 0<x<\ell,\ 0<t<T,\ \ell, T>0\},$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(\ell,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\int_0^\ell \alpha(x,t)\, u(x,t)\, dx = h(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Тут a, ℓ, T – задані додатні параметри; f, μ, α – задані функції. Задачі на визначення крайових умов для змішаних задач виникають у сейсміці [2].

Природно припускати, що виконуються умови узгодження в кутових точках області $\bar{D}$:

$$\mu(0) = \mu'(0) = \nu(0) = \nu'(0) = h(0) = h'(0) = 0. \tag{6}$$

Теорема. Припустимо, що 1/ функція f неперервна по сукупності змінних і один раз неперервно диференційована по x в області $\bar{D}$; 2/ функція μ один раз, а h – два рази