обобщенной эллиптической граничной задачи // Диф. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С.518-521. 6. Крейн С.Г., Симонов А.С. Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 6. С.1226-1229. 7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 8. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957. 9. Szmydt Z. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzati // Atti.Accad. naz. Lincei. Rend. Cl.Sci.fis.mat. e natur. 1962. Vol. 32. N 3. P. 867-872.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.89

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ КРАЙОВОЇ УМОВИ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу про знаходження функцій $u(x,t)$, $\vartheta(t)$ з умов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in D = \{x,t : 0<x<\ell,\ 0<t<T,\ \ell, T>0\},$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(\ell,t) = \vartheta(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\int_0^\ell \alpha(x,t) u(x,t)\,dx = h(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Тут a, ℓ, T – задані додатні параметри; f, μ, α – задані функції. Задачі на визначення крайових умов для змішаних задач виникають у сейсміці [2].

Природно припускати, що виконуються умови узгодження в кутових точках області $\bar{D}$:

$$\mu(0) = \mu'(0) = \vartheta(0) = \vartheta'(0) = h(0) = h'(0) = 0. \tag{6}$$

<u>Теорема</u>. Припустимо, що 1/ функція f неперервна по сукупності змінних і один раз неперервно диференційована по x в області $\bar{D}$; 2/ функція μ один раз, а h – два рази

неперервно диференційовані на $[0,T]$; 3/ функція α двічі неперервно диференційована в $\bar{G}$ і $\alpha(\ell,t)\neq 0,\quad 0\le t\le T$;
4/ виконуються умови /6/.

Тоді задача /1/-/5/ має єдиний розв"язок $u(x,t)\in C^2(\bar{D})$, $\vartheta(t)\in C^1[0,T]$. При цьому функція u може мати розриви першого роду других похідних вздовж характеристик $x=at,\ x=\ell-at$.

Доведення. Розіб"ємо прямокутник D на три частини:
$\bar{D}=\bar{D}_1\cup\bar{D}_0\cup\bar{D}_2=\{x,t:0\le x\le at,\ 0\le t\le T\}\cup\{x,t:at\le x\le$ $\le\ell-at,\ 0\le t\le T\}\cup\{x,t:\ell-at\le x\le\ell,\ 0\le t\le T\}$.

В D_1 і D_0 зобразимо рівняння у вигляді еквівалентної системи рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=v(x,t),\quad \frac{\partial v}{\partial t}-a\frac{\partial v}{\partial x}=f(x,t), \qquad /7/$$

а в D_2

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}=v(x,t),\quad \frac{\partial v}{\partial t}+a\frac{\partial v}{\partial x}=f(x,t). \qquad /8/$$

Тоді, інтегруючи /7/-/8/ вздовж характеристик [1] і виключаючи потім функцію v з одержаних співвідношень, однозначно одержимо для будь-якої точки $(x,t)\in\bar{D}$:

$$u(x,t)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}d\xi\int_0^{\frac{\xi+at-x}{2a}}f(\xi-a\tau,\tau)d\tau; \qquad /9/$$

$(x,t)\in\bar{D}_1$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}d\xi\int_0^{\frac{\xi+at-x}{2a}}f(\xi-a\tau,\tau)d\tau; \qquad /10/$$

$(x,t)\in\bar{D}_0$

$$u(x,t)=\vartheta\left(t+\frac{x-\ell}{a}\right)-\frac{1}{2a}\int_{2\ell-at-x}^{x-at}d\xi\int_0^{\frac{at-\xi+x}{2a}}f(\xi+a\tau,\tau)d\tau \qquad /11/$$

$(x,t)\in\bar{D}_2$

Для визначення $\vartheta(t)$ підставимо /9/-/11/ у додаткову умову /інтегральне перевизначення/ /5/. В результаті маємо

$$\int_{\ell-at}^{\ell}\alpha(x,t)\,\vartheta\left(t+\frac{x-\ell}{a}\right)dx=G_1(t),\ 0\le t\le T,$$

де

$$G_1(t)=h(t)-\int_0^{at}\alpha(x,t)\,\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)dx-$$

$$-\int\limits_0^{at}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_0^{\tau}\alpha(x,t)f(a(2\tau-s-t)+x,s)\,ds\,d\tau\,dx-$$

$$-\int\limits_{at}^{l-at}\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\tau}\alpha(x,t)f(a(2\tau-s-t)+x,s)\,ds\,d\tau\,dx-$$

$$-\int\limits_{l-at}^{l}\int\limits_{t+\frac{x-l}{a}}^{t}\int\limits_0^{\tau}\alpha(x,t)f(a(s-2\tau+t)+x,s)\,ds\,d\tau\,dx.$$

Або

$$\int\limits_0^t\alpha(a(\tau-t)+l,t)\,\vartheta(\tau)\,d\tau=\frac{1}{a}G_1(t),\quad 0\le t\le T.$$

Звідси

$$\vartheta(t)=G(t)+\int\limits_0^t K(t,\tau)\,\vartheta(\tau)\,d\tau,\quad 0\le t\le T,$$

де $G(t)=(a\alpha(l,t))^{-1}G_1'(t)$, $K(t,\tau)=$

$$=a\frac{\partial\alpha(a(\tau-t)+l,t)}{\partial x}-\frac{\partial\alpha(a(\tau-t)+l,t)}{\partial t},\quad 0\le t\le T.$$

Нехай тепер $R(t,\tau)$ - резольвента ядра $K(t,\tau)$. Тоді

$$\vartheta(t)=G(t)+\int\limits_0^t R(t,\tau)\,G(\tau)\,d\tau,\quad 0\le t\le T. \qquad /12/$$

Отже, шуканий розв"язок задачі /1/-/5/ дається формулами /9/-/12/. Теорема доведена.

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып. 3. С.87-104. 2. С у ч к о в М.В., Ф е д о т о в А.П. О решении одной задачи для волнового уравнения // Функциональные методы в задачах математической физики: Сб. науч. тр. 1985. С.64-67.

Стаття надійшла до редколегії 07.03.89

5-2498