УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ МАЙЖЕ ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

У ряді праць [1-4] вивчалися різні задачі для гіперболічних рівнянь, які вироджуються на площині задання початкових даних. Досліджувалися питання існування, єдиності та гладкості розв"язків.

У даній статті розглямемо для рівняння

$$(t^a u_t)_t + bu_t - \Delta u + c|u|^{p-2}u = f(x,t) \qquad /1/$$

змішану задачу

$$u(x,t)=0,\ (x,t)\in S; \qquad /2/$$

$$u(x,0)=0,\ x\in D \qquad /3/$$

в області $Q=D\times(0,T)$. Тут D - обмежена область в R^n з межею $\partial D\in C^1$, $S=\partial D\times(0,T)$, $b=const$, $c=const$.

Введемо позначення

$$V=\{u(x,t):\ u\in H^1(Q)\cap L^p(Q),\ u|_S=0\}.$$

Функцію $u(x,t)\in V$ будемо називати узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/, якщо вона задовольняє умову /3/ і рівність

$$\int_Q\Big[\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - t^a u_t v_t + bu_t v + c|u|^{p-2}uv\Big]dxdt = \int_Q fv\,dxdt, \qquad /4/$$

для довільної $v(x,t)\in V,\ v(x,T)=0$.

Теорема 1. Нехай $a>0,\ b\geq 0,\ c\geq 0,\ p\geq 2$, $f,\ t^{\frac{1-a}{2}}f\in L^2(Q)$. Тоді задача /1/-/3/ має хоча б один узагальнений розв"язок $u(x,t)$, причому

$$u\in L^\infty((0,T);H^1(D)\cap L^p(D)),\ u_t\in L^\infty((0,T);L^2(D)).$$

Доведення. Нехай $\{w_j\}$ лінійно незалежна і скрізь щільна сукупність гладких функцій у просторі $H^1(D)\cap L^p(D)$. Розглямемо послідовність функцій

$$u_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)W_i(x), \quad m=1,2,3,\dots,$$

де $g_{im}(t)$ визначаються як розв"язки задачі

$$\int_D \Big[(t^a u_{mt})_t W_j + b\, u_{mt} W_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial W_j}{\partial x_i} +$$

$$+ c|u_m|^{p-2} u_m W_j - f W_j\Big] dx = 0, \quad j=1,\dots,m; \qquad /5/$$

$$g_{im}\left(\frac{1}{m}\right)=0, \quad g'_{im}\left(\frac{1}{m}\right)=0, \quad i=1,\dots,m. \qquad /6/$$

Легко переконатися в тому, що розв"язок задачі /5/, /6/ існує на всьому проміжку $[\frac{1}{m}, T]$. Продовжимо функції $u_m(x,t)$ нулем на область $\{(x,t): x\in D, 0<t<\frac{1}{m}\}$ і залишимо для продовженої функції те ж саме позначення. Тоді для $u_m(x,t)$ в області Q можна одержати оцінку

$$\int_D \Big[(u_{mt})^2 + \sum_{i=1}^{n}(u_{mx_i})^2 + |u_m|^p\Big]dx + \int_Q \Big[(u_{mt})^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(u_{mx_i})^2 + |u_m|^p\Big]dxdt \le C\int_Q t^{-a} f^2(x,t)\,dxdt, \qquad /7/$$

причому стала C не залежить від m.

Користуючись нерівністю /7/, можемо вибрати з послідовності $\{u_m(x,t)\}$ підпослідовність $\{u_s(x,t)\}$, яка має наступні властивості:

1/ $u_s \to u$ $*$ - слабо в $L^\infty((0,T); \overset{\circ}{H}{}^1(D)\cap L^p(D))$;
2/ $u_{st} \to u_t$ $*$ - слабо в $L^\infty((0,T); L^2(D))$;
3/ $u_s \to u$ сильно в $L^2(Q)$ і майже скрізь;
4/ $u_s \to u$ слабо в $H^1(Q)$;
5/ $|u_s|^{p-2}u_s \to |u|^{p-2}u$ $*$ - слабо в $L^\infty((0,T); L^q(D))$.

Тут $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. Далі легко переконатися, що знайдена функція $u(x,t)$ буде узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/ з відповідними властивостями.

Розглянемо тепер питання єдиності узагальненого розв"язку задачі /1/-/3/.

<u>Теорема 2</u>. Нехай $0<a\le 1, - b>0, c\ge 0,$

$2 \le p \le \frac{2n-2}{n-2}$ / p - довільне, якщо $n=2$ /. Тоді задача /1/-/3/ має не більше одного узагальненого розв"язку такого, що

$$u \in L^{\infty}((0,T); \overset{\circ}{H}{}^{1}(D) \cap L^{p}(D)),\ u_t \in L^{\infty}((0,T); L^{2}(D)).$$

Доведення цієї теореми проводиться відомим методом [5].

<u>Зауваження</u>. Аналогічно можна одержати умови коректної розв"язності задачі /2/, /3/ для рівняння

$$(t^{a} u_t)_t + b(x,t)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)\, u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} = f(x,t,u).$$

1.Барановский Ф.Т. О задаче Коши для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью //Укр. мат. журн. 1984. Т.36. № 3. С.275-282. 2.Бубнов Б.А., Врагов В.Н. К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений //Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 4. С.795-800. 3.Глазатов С.Н. О корректности смешанной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения //Сиб. мат. журн.1987. Т. 28. № 2. С.60-66. 4.Глазатов С.Н. Сильно вырождающиеся нелинейные гиперболические уравнения и вариационные неравенства //Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1984. С.49-56. 5.Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 517.946 + 511.2

І.О.Бобик, Б.Й.Пташник

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕСТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1. Крайові задачі з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь є, взагалі, некоректними. Типовим прикладом є задача Діріхле для рівняння коливань струни. Розв"язність таких задач у багатьох випадках залежить від арифметичної природи коефіцієнтів задачі та параметрів області і пов"язана з проблемою малих знаменників. Дослідження цих питань, а також огляд літератури є у праці [3].