$2 \le p \le \frac{2n-2}{n-2}$ / p - довільне, якщо $n=2$ /. Тоді задача /1/-/3/ має не більше одного узагальненого розв"язку такого, що

$$u \in L^{\infty}((0,T); \overset{\circ}{H}{}^{1}(D) \cap L^{p}(D)),\ u_t \in L^{\infty}((0,T); L^{2}(D)).$$

Доведення цієї теореми проводиться відомим методом [5].
<u>Зауваження</u>. Аналогічно можна одержати умови коректної розв"язності задачі /2/, /3/ для рівняння

$$(t^{a} u_t)_t + b(x,t) u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t) u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} = f(x,t,u).$$

1.Барановский Ф.Т. О задаче Коши для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью //Укр. мат. журн. 1984. Т.36. № 3. С.275-282. 2.Бубнов Б.А., Врагов В.Н. К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений //Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 4. С.795-800. 3.Глазатов С.Н. О корректности смешанной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения //Сиб. мат. журн.1987. Т. 28. № 2. С.60-66. 4.Глазатов С.Н. Сильно вырождающиеся нелинейные гиперболические уравнения и вариационные неравенства //Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1984. С.49-56. 5.Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 517.946 + 511.2

І.О.Бобик, Б.Й.Пташник

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕСТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1. Крайові задачі з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь є, взагалі, некоректними. Типовим прикладом є задача Діріхле для рівняння коливань струни. Розв"язність таких задач у багатьох випадках залежить від арифметичної природи коефіцієнтів задачі та параметрів області і пов"язана з проблемою малих знаменників. Дослідження цих питань, а також огляд літератури є у праці [3].

Дана стаття розвиває та доповнює результати праць [3,4] у випадку одного класу рівнянь четвертого порядку.

Надалі використаємо такі позначення:

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ dx=dx_1\dots dx_n,\ \frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\ k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$$

$$\mu_k=(\mu_{k_1},\dots,\mu_{k_n})\in\mathbb{R}^n,\ (k,x)=k_1x_1+\dots+k_nx_n,\ \|k\|=\sqrt{k_1^2+\dots+k_n^2},$$

$$|k|=|k_1|+\dots+|k_n|,\ D=\{(t,x):t\in(0,T),\ x\in\mathbb{R}^n\};\ C_B^{(q,r)}(D)\ (r\geq q)-$$

банаховий простір функцій $u(t,x)$, q раз неперервно диференційовних по t, а також r раз неперервно диференційовних по x в $\bar{D}$ і майже періодичних в сенсі Бора по $x_1,\dots,x_n$ рівномірно відносно $t\in[0,T]$, з нормою

$$\|u\|_{C_B^{(q,r)}(\bar{D})}=\max_{\substack{|s|\leq r\\ s_0\leq q}}\ \sup_{(t,x)\in\bar{D}}\left\{\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\right\}.$$

2. В області D для рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta+b^2\right)^2u(t,x)=f(t,x),\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},\qquad /1/$$

де a, b – додатні числа, розглядаються дві крайові задачі з умовами

$$u\Big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u\Big|_{t=T}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T}=0;\qquad /2/$$

$$u\Big|_{t=0}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0}=u\Big|_{t=T}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=T}=0.\qquad /3/$$

Припустимо, що $f(t,x)\in C_B^{(0,m)}(\bar{D})(m\in\mathbb{N})$, причому

$$f(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}f_k(t)e^{(i\mu_k,x)},\quad f_k(t)=\lim_{\ell\to 0}\frac{1}{(2\ell)^n}\int_{K_\ell}f(t,x)e^{-(i\mu_k,x)}dx,$$

$$K_\ell=\{x:|x_r|\leq\ell,\ r=\overline{1,n}\},\ f_k(t)=\bar{f}_{-k}(t);\ \mu_0=(0),\ \mu_k\neq(0)(k\neq(0)).\qquad /4/$$

Розв"язки задач /1/, /2/ та /1/, /3/ будемо шукати в просторі $C_B^{(4,4)}(\bar{D})$ у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}u_k(t)e^{(i\mu_k,x)},\qquad /5/$$

де $\mu_k\in M\subset\mathbb{R}^n$, M – спектр функції $f(t,x)$. Для визначення коефіцієнтів $u_k(t)$ отримуємо крайові задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a^2\|\mu_k\|^2+b^2\right)^2 u_k(t)=f_k(t);$$

/6/

$$u_k\Big|_{t=0}=\frac{du_k}{dt}\Big|_{t=0}=u_k\Big|_{t=T}=\frac{du_k}{dt}\Big|_{t=T}=0;$$

/7/

$$u_k\Big|_{t=0}=\frac{d^2u_k}{dt^2}\Big|_{t=0}=u_k\Big|_{t=T}=\frac{d^2u_k}{dt^2}\Big|_{t=T}=0.$$

/8/

Розв"язки цих задач будемо будувати з допомогою функцій Гріна відповідних однорідних задач [2].

3. Розв"язки задач /6/, /7/ та /6/, /8/ будемо позначати відповідно $u_k(t)$ і $\tilde{u}_k(t)$, а відповідні характеристичні визначники та функції Гріна - $\Delta(\mu_k)$, $\mathcal{G}_k(t,\xi)$ та $\tilde{\mathcal{G}}_k(t,\xi)$, $\tilde{\Delta}(\mu_k)$. Позначимо $L=\sqrt{a^2\|\mu_k\|^2+b^2}$. Тоді фундаментальна система розв"язків однорідного рівняння, що відповідає рівнянню /6/, запишеться так:

$$y_{k1}=e^{iLt},\quad y_{k2}=te^{iLt},\quad y_{k3}=e^{-iLt},\quad y_{k4}=te^{-iLt}.$$

/9/

Розглянемо спочатку задачу /6/, /7/. Вона є однозначно розв"язною тоді і тільки тоді, коли $\Delta(\mu_k)\equiv \det\|U_j(y_{kp})\|_{j,p=1}^{4}\neq 0$, де U_j $(j=\overline{1,4})$ - оператори граничних умов /7/. Проводячи обчислення, знаходимо

$$\Delta(\mu_k)=-4\sin^2 LT+4L^2T^2,$$

/10/

звідки випливає, що $\Delta(\mu_k)\neq 0,\ \forall\mu_k\in\mathbb{R}^n$. Тому $\forall\mu_k\in\mathbb{R}^n$ існує функція Гріна $\mathcal{G}_k(t,\xi)$, а розв"язок задачі /6/, /7/ представляється у вигляді

$$u_k(t)=\int_0^T \mathcal{G}_k(t,\xi)f_k(\xi)d\xi,$$

/11/

$$\mathcal{G}_k(t,\xi)=g_k(t,\xi)-\frac{1}{\Delta(\mu_k)}\Big\{U_1(g_k)\big[e^{iL(t-2T)}(-iLt+1)+e^{-iL(t-2T)}(iLt+1)+$$
$$+e^{iLt}(L^2T^2+2L^2Tt-3iLt-2iLT-1)+e^{-iLt}(L^2T^2+2L^2Tt+2iLT-iLt-1)\big]-$$
$$-U_2(g_k)\big[e^{iLt}(2iLT^2-2iLTt+t)+e^{-iLt}(-2iLT^2+2iLTt+t)\big]+U_3(g_k)\times$$
$$\times\big[e^{iL(t-T)}(L^2Tt+iLT+iLt-1)+e^{-iL(t-T)}(L^2Tt-iLt-iLT-1)+e^{iL(t+T)}\times$$
$$\times(iLT-iLt+1)+e^{-iL(t+T)}(-iLT+iLt+1)\big]-U_4(g_k)\big[e^{iL(t+T)}(T-t)+e^{-iL(t+T)}(T-t)+$$
$$+e^{iL(t-T)}(2iLTt-T+t)+e^{-iL(t-T)}(-2iLTt+T+t)\big]\Big\},$$

/12/

$$g_k(t,\xi)=\frac{sign(t-\xi)}{8L^3}\left[e^{iL(t-\xi)}(-Lt+L\xi-i)+e^{-iL(t-\xi)}(-Lt-L\xi+i)\right], \qquad /13/$$

$$\left.\begin{aligned} &U_1(g_k)=\frac{1}{8L^3}(L\xi-i)(e^{iL\xi}-e^{-iL\xi}),\\ &U_2(g_k)=-\frac{i\xi}{8L}(e^{iL\xi}-e^{-iL\xi}),\\ &U_3(g_k)=\frac{1}{8L^3}\left[e^{iL(T-\xi)}(-LT+L\xi-i)+e^{-iL(T-\xi)}(-LT-L\xi+i)\right],\\ &U_4(g_k)=\frac{i}{8L}\left[e^{iL(T-\xi)}(\xi-T)+e^{-iL(T-\xi)}(\xi+T)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad /14/$$

4. На основі сказаного вище отримуємо таке твердження:

<u>Теорема 1.</u> Задача /1/, /2/ не може мати двох різних розв"язків із класу $C_B^{(4,4)}(D)$.

Доведення випливає з єдиності розвинення майже періодичної функції в ряд Фур"є.

Розглянемо питання існування розв"язку задачі /1/, /2/, який формально представляється рядом

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}\int_0^T g_k(t,\xi)f_k(\xi)d\xi\cdot e^{(i\mu_k,x)}. \qquad /15/$$

Припустимо, що для всіх векторів $\mu_k\in M$ виконуються нерівності

$$c_1\|k\|^{\sigma}\leq\|\mu_k\|\leq c_2\|k\|^{\sigma},\quad c_1>0,\ c_2>0,\ \sigma>0. \qquad /16/$$

Зауважимо, що виділений умовами /16/ клас майже періодичних функцій містить в собі всі періодичні функції.

Очевидно, що

$$\max_{0\leq t\leq T}|f_k(t)|\leq c_3\|\mu_k\|^{-m}\|f(t,x)\|_{C_B^{(0,m)}(\bar{D})} \qquad /17/$$

і для всіх /крім скінченного числа/ векторів $\mu_k\in M$ виконуються нерівності

$$\Delta(\mu_k)\geq c_4\|\mu_k\|^2. \qquad /18/$$

<u>Теорема 2</u>. Нехай $f(t,x)\in C_B^{(0,m)}(\bar{D})$, де $m>2+n/\sigma$, і нехай виконуються умови /16/. Тоді існує єдиний розв"язок задачі /1/, /2/ з простору $C_B^{(4,4)}(\bar{D})$, який неперервно залежить від $f(t,x)$ і представляється формулою /15/.

Доведення. На основі формул /12/-/15/, а також оцінок /16/-/18/ одержуємо, що

$$\|u(t,x)\|_{C_B^{(4,4)}(\mathcal{D})} \le C_5 \|f(t,x)\|_{C_B^{(0,m)}(\mathcal{D})} \sum_{|k|\ge 0} \|\mu_k\|^{2-m} \le C_6 \|f(t,x)\|_{C_B^{(0,m)}(\mathcal{D})}, \qquad /19/$$

із нерівності /19/ випливає доведення теореми.

5. Розглянемо тепер задачу /1/, /3/, розв"язок якої будемо позначати $\tilde{u}(t,x)$. Характеристичний визначник $\tilde{\Delta}(\mu_k)$ задачі /6/, /8/

$$\tilde{\Delta}(\mu_k) = 8iL^2 \sin 2LT. \qquad /20/$$

Із виразу /20/ та теореми про єдиність розвинення майже періодичної функції в ряд Фур"є випливає наступне твердження.

Теорема 3. Для єдиності розв"язку задачі /1/, /3/ в класі функцій з $C_B^{(4,4)}(\mathcal{D})$ із заданим спектром M необхідно і достатньо, щоб для всіх $\mu_k \in M$ виконувалась умова

$$2T\sqrt{a^2\|\mu_k\|^2 + b^2} \ne m\pi, \quad \forall m \in N. \qquad /21/$$

Зауваження. Множина значень T, для яких умова /21/ не виконується при фіксованих a і b, є зчисленна.

Припустимо, що має місце єдиність розв"язку задачі /1/, /3/. Тоді для кожного $\mu_k \in M$ задача /6/, /8/ однозначно розв"язна, і розв"язок задачі /1/, /3/ формально представляється рядом

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} \int_0^T \tilde{\varphi}_k(t,\xi) f_k(\xi)\, d\xi \cdot e^{(i\mu_k, x)}, \qquad /22/$$

$$\tilde{\varphi}_k(t,\xi) = g_k(t,\xi) - \frac{1}{4L\sin 2LT}\Big\{\tilde{U}_1(g_k)\big[e^{iLt}(-L^2t + iL) + e^{iL(t-2T)}(L^2t + 2iL) -$$
$$- e^{-iLt}(L^2t + 2iL) + e^{-iL(t-2T)}(L^2t - 2iL)\big] - \tilde{U}_2(g_k)\big[t(e^{iLt} + e^{-iLt}) -$$
$$- t(e^{iL(t-2T)} + e^{-iL(t-2T)})\big] + \tilde{U}_3(g_k)\big[(L^2T - L^2t - iL)(e^{iL(t-T)} + e^{iL(t+T)})\big] -$$
$$- \tilde{U}_4(g_k)\big[-e^{iL(t-T)}(T+t) + e^{iL(t-T)}(-T+t) + e^{-iL(t-T)}(T+t) +$$
$$+ e^{-iL(t+T)}(T-t)\big]; \qquad /23/$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{U}_1(g_k)=U_1(g_k),\quad \tilde{U}_3(g_k)=U_3(g_k),\\ &\tilde{U}_2(g_k)=\frac{L\xi+i}{8L}\left(e^{-iL\xi}+e^{iL\xi}\right),\\ &\tilde{U}_4(g_k)=\frac{1}{8L}\left[e^{iL(T-\xi)}(LT-L\xi-i)+e^{-iL(T-\xi)}(LT+L\xi+i)\right]\end{aligned}\right\}\qquad /24/$$

Зауважимо, що ряд /22/ в загальному випадку може розбігатися, оскільки вираз $\sin 2LT$, будучи відмінним від нуля, може ставати як завгодно малим для нескінченної множини значень $\mu_k\in M$. Оцінимо знизу величину $|\sin 2LT|$, використовуючи нерівність $\sin x>(2/\pi)x,\ (0<x<\pi/2)$:

$$|\sin 2LT|>\frac{2}{\pi}\pi\left|\frac{2T}{\pi}L-m\right|=\frac{2T}{\pi}\|k\|^{\sigma}\left|2\sqrt{a^2\left(\frac{\|\mu_k\|}{\|k\|^{\sigma}}\right)^2+\frac{b^2}{\|k\|^{2\sigma}}}-\frac{\pi}{T}\frac{m}{\|k\|^{\sigma}}\right|,\qquad /25/$$

де $m=m(\mu_k)$ таке ціле число, що $\left|\frac{2T}{\pi}\sqrt{a^2\|\mu_k\|^2+b^2}-m\right|<\frac{1}{2}$.

Теорема 4. Нехай виконуються умови єдиності розв"язку задачі /1/, /3/ і нехай існують такі додатні константи C і γ, що нерівність

$$\left|2\sqrt{a^2\left(\frac{\|\mu_k\|}{\|k\|^{\sigma}}\right)^2+\frac{b^2}{\|k\|^{2\sigma}}}-\frac{\pi}{T}\frac{m}{\|k\|^{\sigma}}\right|>\frac{C}{\|k\|^{\gamma}}\qquad /26/$$

виконується для всіх /крім скінченного числа/ сукупностей цілих чисел $k_1,\dots,k_n$, m. Якщо $f(t,x)\in C_B^{(3,\alpha)}(\bar{D})$, де $\alpha>2+(n+\gamma)/\sigma$, то існує розв"язок задачі /1/, /3/ з простору $C_B^{(4,4)}(\bar{D})$, який неперервн залежить від $f(t,x)$ і представляється рядом /22/.

Доведення. Із формул /13/, /22/-/24/ та оцінок /16/, /17/, /25/, /26/ випливає, що

$$\|\tilde{u}(t,x)\|_{C_B^{(4,4)}(\bar{D})}\le C_7\|f(t,x)\|_{C_B^{(0,\alpha)}(\bar{D})}\sum_{|k|\ge 0}\|k\|^{\gamma-\sigma}\|\mu_k\|^{3-\alpha}\le C_8\|f(t,x)\|_{C_B^{(3,\alpha)}(\bar{D})},\qquad /27/$$

звідси випливає доведення теореми.

Лема. Нехай $\Phi(k)=\Phi(k_1,\dots,k_n)$ - обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність $\left|\Phi(k)-\frac{md}{\|k\|^{\sigma}}\right|<\frac{1}{\|k\|^{n+\sigma+\varepsilon}}$ $(0<\varepsilon<1)$ для майже всіх /в сенсі міри Лебега/ чисел $d>0$ має не більше ніж скінченне число розв"язків у цілих числах $k_1,\dots,k_n, m$ $(|m|+\|k\|\ne 0)$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 2.4 з праці [3, гл.I].

На основі теорем 3,4 та леми дістаємо наступне твердження.

Теорема 5. Якщо $f(t,x)\in C_B^{(3,\alpha)}(\bar{D})$, де $\alpha>3+2n/\sigma$, то для майже всіх /в сенсі міри Лебега/ значень $T>0$ і довільних фіксованих $a>0$ і $b>0$ задача /1/, /3/ має єдиний розв"язок в класі функцій із $C_B^{(4,4)}(\bar{D})$, який неперервно залежить від $f(t,x)$.

Висновок. Ми бачимо, що задачі /1/, /2/ та /1/, /3/, які є близькі за постановкою, мають суттєво різну природу. Якщо для першої з них існує єдиний розв"язок для довільних додатних a, b і T, то для другої задачі розв"язність має місце не для всіх наборів параметрів a, b, T і є нестійкою щодо цих параметрів.

Нарешті зауважимо, що в періодичному випадку при $n = 1$ існування єдиного розв"язку задачі /1/, /2/ випливає з результатів роботи [1].

1. Д а в т я н М.Д. Общие краевые задачи для гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками //Изв. АН АрмССР. Математика. 1974. Т. 9. № 4. С.269-284. 2. Н а й м а р к М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 3. П т а ш н и к Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 4. П т а ш н и к Б.Й., Ш т а б а л ю к П.И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным //Диф. уравнения. 1986. Т.22. № 4. С.669-678.

Стаття надійшла до редколегії 21.09.89

УДК 517.948

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ $U_\ell(z)=\frac{1}{z}+\frac{a_k}{z^k}$, $k=9,10,11$.

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в відшуканні плоскої однозв"язної області D , при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z=z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область D площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z=z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ .