УДК 517.948

М.Й.Михалюк

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ $U_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^8}$

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв"язну область D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z=z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область D площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння*

$$\sigma z_*(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{u_e(z(\tau))d\tau}{\tau-t},\quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$u_e(z)=-\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z},\quad z_*(t)=\overline{z\left(\frac{1}{\bar t}\right)},\quad |t|<1. \qquad /2/$$

У даній статті розглядається випадок, коли

$$u_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^8}, \qquad /3/$$

де a - комплексне число, $\sigma=1$.

Розв"язок задачі будемо шукати у вигляді

$$z(t)=\alpha_1 t+\alpha_8 t^8,\quad \alpha_1>0. \qquad /4/$$

Підставляючи вирази /4/, /3/ в /1/, отримуємо нелінійну систему рівнянь

$$\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{\alpha_1}-\frac{8a\alpha_8}{\alpha_1^9}\\ \bar\alpha_8=\frac{a}{\alpha_1^8}.\end{cases} \qquad /5/$$

---

* Див. посилання на літературу у попередній статті.

Система /5/ має єдиний розв"язок (α_1, α_8) при

$$|a|^2 \leq \frac{8^7}{9^9}, \qquad /6/$$

який задовольняє умову

$$z'(t) \neq 0 \text{ при } |t|<1.$$

Таким чином, має місце теорема.

Теорема. Для потенціалу /3/, який задовольняє умову /6/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має єдиний розв"язок у класі конформних відображень /4/ круга $|t|<1$. При

$$|a|^2 > \frac{8^7}{9^9}$$

задача в цьому класі функцій розв"язку не має.

Приклад. Для потенціалу /3/ при

$$a = \sqrt{\frac{8^7}{9^9}}$$

розв"язком у класі конформних відображень /4/ є функція

$$z(t) = \sqrt{\frac{8}{9}}\, t + \frac{1}{\sqrt{72}}\, t^8.$$

Стаття надійшла до редколегії 27.12.88

УДК 517.535.4

А.Д.Кузик

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ℓ-ІНДЕКСУ ЦІЛОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Нехай ℓ - додатна неперервна на $[0;+\infty]$ функція. Ціла функція f називається $[\,1\,]$ функцією обмеженого ℓ-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\,\ell^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!\,\ell^m(|z|)} : 0 \leq m \leq N\right\}. \qquad /1/$$

При $\ell(r) \equiv 1$ звідси маємо означення цілої функції обмеженого індексу. Вивчення властивостей цілих функцій обмеженого індексу проводиться в багатьох роботах, частина з яких присвячена дослід-