Система /5/ має единий розв"язок (α_1, α_8) при

$$|a|^2 \leq \frac{8^7}{9^9}, \qquad /6/$$

який задовольняє умову

$$z'(t) \neq 0 \text{ при } |t|<1.$$

Таким чином, має місце теорема.

Теорема. Для потенціалу /3/, який задовольняє умову /6/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має единий розв"язок у класі конформних відображень /4/ круга $|t|<1$. При

$$|a|^2 > \frac{8^7}{9^9}$$

задача в цьому класі функцій розв"язку не має.

Приклад. Для потенціалу /3/ при

$$a = \sqrt{\frac{8^7}{9^9}}$$

розв"язком у класі конформних відображень /4/ є функція

$$z(t) = \sqrt{\frac{8}{9}}\, t + \frac{1}{\sqrt{72}}\, t^8.$$

Стаття надійшла до редколегії 27.12.88

УДК 517.535.4

А.Д.Кузик

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ЦІЛОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Нехай l – додатна неперервна на $[0;+\infty]$ функція. Ціла функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\, l^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!\, l^m(|z|)} : 0 \leq m \leq N\right\}. \qquad /1/$$

При $l(r) \equiv 1$ звідси маємо означення цілої функції обмеженого індексу. Вивчення властивостей цілих функцій обмеженого індексу проводиться в багатьох роботах, частина з яких присвячена дослідженню обмеженості індексу цілої функції f, яка задовольняє диференціальне рівняння

$$P_0(z)f^{(k)}(z)+P_1(z)f^{(k-1)}(z)+\ldots+P_k(z)f(z)=Q(z), \qquad /2/$$

де $P_0, \ldots, P_k$ і Q - многочлени і, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що коефіцієнт при найстаршому степені многочлена P_0 дорівнює 1. С.Шах [2] показав, що якщо $\deg P_j \leq \deg P_0$ для всіх $j = 1,2,\ldots,k$, то ціла функція f, яка задовольняє рівняння /2/, є функцією обмеженого індексу. Цей результат С.Шаха допускає наступне узагальнення.

Теорема. Якщо $\deg P_j \leq \deg P_0 + s\cdot j$, $s \in \mathbb{Z}_+$ для всіх $j = 1,2,\ldots,k$, то ціла функція f, яка задовольняє рівняння /2/, є функцією обмеженого ℓ-індексу з $\ell(r)=r^s+1$.

При доведенні цієї теореми істотно використовується таке твердження.

Лема. Нехай $f \not\equiv 0$ і $r_0 \in (0;+\infty)$. Тоді існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для z, $|z| \leq r_0$ і всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\,\ell^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!\,\ell^m(|z|)} : 0 \leq m \leq n_0\right\}. \qquad /3/$$

1. К у з ы к А.Д., Ш е р е м е т а М.Н. Целые функции ограниченного ℓ-распределения значений //Мат. заметки. 1986. Т. 39. № 1. С.3-13. 2. S h a h S.M. Entire functions satisfying a linear differential equation // J. Math. Mech. 1968. Vol. 18. P. 131-136.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.89