УДК 517.576

О.Б.Скасків

# ПРО РІСТ НА ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ПРОМЕНЯХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай $F$ - аналітична в $\Pi_0=\{z: \operatorname{Re} z<0\}$, представлена абсолютно збіжним в $\Pi_0$ рядом Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty). \qquad /1/$$

Позначимо $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}$,

$$\rho=\varlimsup_{x\to-0}|x|\ln^+\ln M(x,F), \quad \rho^*=\varlimsup_{x\to-0}|x|\ln^+\ln|F(x)|.$$

У праці [3] встановлено, що якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty \qquad /2/$$

та $q=\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|B'(\lambda_n)|}=0$, $B(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n-z}{\lambda_n+z}$, то $\rho=\rho^*$.
Величину $q$ можна було б вважати задовільним аналогом індексу конденсації послідовності, $\delta=\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}$ [2,с.25], якщо б замість $B(z)$ використовувалася ціла функція $L(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^2\right)$, як це робиться у дослідженні [1] при вивченні поведінки в півсмузі аналітичної в $\Pi_0$ функції виду /1/. Власне, у статті А.М.Гайсина [1] порядок близькості членів послідовності $\Lambda=(\lambda_n)$ характеризується величиною

$$q_1=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}. \qquad /3/$$

Мета нашої статті - встановлення непокращуваних умов, при виконанні яких $\rho=\rho^*$. При цьому, як звичайно в таких задачах, одна з умов /див. умову /4/ / враховує швидкість зростання, а інша / $q_1=0$ / враховує порядок близькості членів послідовності $\Lambda=(\lambda_n)$. Позначимо через $A_0(\Lambda)$ - клас аналітичних в $\Pi_0$ функцій виду /1/, для яких виконується /2/ і $\delta=0$.

<u>Теорема 1.</u> Щоб для кожної функції $F\in A_0(\Lambda)$ виконувалася рівність $\rho=\rho^*$, необхідно і досить одночасного виконання умови $q_1=0$ та

$$\Delta=\varlimsup_{t\to+\infty}\ln t\sum_{\lambda_n\geq t}\frac{1}{\lambda_n}=0. \qquad /4/$$

Доведення достатності одержуємо негайно з цитованого вище результату [3] та наступної елементарної леми.

Лема. Умова $q=0$ виконується тоді і тільки тоді, коли одночасно $q_1=0$ та $\Delta=0$.

Необхідність у теоремі 1 одержуємо з наступної теореми.

Теорема 2. Для кожної послідовності $\Lambda=(\lambda_n)$, $0<\lambda_n\uparrow+\infty\,(n\to+\infty)$, що задовольняє умови /2/ і $\delta=0$, існує функція $F\in A_0(\Lambda)$, обмежена на промені $\ell=\{z=x+iy:\ y=0,\ x<0\}$, і така, що $\rho\geq q_1+\Delta$.

Для доведення теореми досить розглянути функцію $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{z\lambda_n}/(1+\lambda_n)^2 B'(\lambda_n)$ і показати, що на від"ємній півосі $\ell$ вона зображається інтегралом $F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{xt}}{(1+t)^2 B(t)}\,dt\ (x<0)$.

Зауваження 1. Відзначимо, що при вивченні асимптотичної поведінки функцій виду /1/ у півсмугах ключову роль відіграє умова /4/, при цьому використання результатів типу Вімана-Валірона дає можливість умову виду /3/ зняти. Але викладення цього факту не входить у мету даного повідомлення.

Зауваження 2. По суті, в теоремі 2 встановлена також необхідність умови $q=0$. Вкажемо також на природність умови $\delta=0$ [2, с.25].

1.Г а й с и н А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле в полуполосе // Мат. сб. 1982. Т.117. № 3. С. 412-424. 2.Л е о н т ь е в А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980. 3.С о р о к и в с к и й В.М. О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле //Укр. мат. журн. 1984. Т. 36. № 4. С.52.-528.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89