УДК 517.948

О.В.Дима, Я.В.Микитюк

ПРО ЗБУРЕННЯ ОПЕРАТОРА ДВОСТОРОННЬОГО ЗСУВУ

Нехай S – оператор двостороннього зсуву в просторі $\ell_2(\mathbb{Z})$, тобто

$$(Sx)_n = x_{n+1}, \quad n\in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо оператор $T: \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, який діє за формулою

$$T = S + A,$$

де A – діагональний оператор:

$$(Ax)_n = a_n x_n, \quad n\in \mathbb{Z} \qquad (\{a_n\}\in \ell_\infty(\mathbb{Z})). \qquad /1/$$

Означення 1. Позначимо через $\mathcal{A}$ множину всіх операторів виду /1/, які задовольняють умови:

1/ для довільного $n\in N$ збігається ряд $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^n$;

2/ збігається ряд $\sum_1^\infty n^{-1} q_n$, де

$$q_n = \sup_{k\in N}\left(\left|\sum_{j=k}^{\infty} a_j^n\right| + \left|\sum_{j=k}^{\infty} a_{-j}^n\right|\right).$$

Основним результатом дослідження є теорема.

Теорема 1. Нехай $A\in\mathcal{A}$. Тоді оператори T і S подібні.

Доведення теореми 1 зводиться до доведення трьох лем, які формулюються нижче. Доведення самих лем ми не наводимо за браком місця.

Лема 1. Нехай $A\in\mathcal{A}$. Тоді у рівномірній операторній топології збігаються ряди $\sum_{j=1}^\infty A_j^n$, $\sum_{j=1}^\infty A_{-j}^n$, $n\in N$, де $A_j = S^j A S^{-j}$, $j\in\mathbb{Z}$. При цьому суми $Q_n^\pm = \sum_{j=1}^\infty A_{\pm j}^n$ допускають оцінку $\|Q_n^\pm\| \le q_n$.

Приймемо за означенням

$$U_n^\pm = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n} Q_n^\pm\right)\Big|_{z=0}.$$

Лема 2. Нехай $A\in\mathcal{A}$. Тоді $\sum_{n=0}^\infty \|U_n^\pm\| \le \exp\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-1} q_n\right)$.

Приймемо

$$M_+ = \sum_{n=0}^\infty S^{-n} U_n^+, \quad M_- = \sum_{n=0}^\infty U_n^- S^{-n}.$$

Лема 3. Нехай $A \in \mathcal{A}$. Тоді оператори M_+, M_- оборотні, причому мають місце рівності

$$M_+ T = S M_+ , \quad T M_- = M_- S .$$

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 512.713

Б.В.Забавський

ПРО КОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Відомо, що комутативна область Безу, множина максимальних ідеалів якої не більш ніж зчисленна, є областю елементарних дільників [3]. У даній статті узагальнюється цей результат на випадок кільця скінченно-породжених головних ідеалів.

Під кільцем R у даній статті розуміємо комутативне кільце з одиницею. Через $J(R)$ позначимо радикал Джекобсона кільця R, а через $mspec\,R$ - множину всіх максимальних ідеалів кільця R. Нагадаємо, що комутативне кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця A над R володіє діагональною редукцією, тобто якщо для A знайдуться оборотні матриці P і Q над R підходящих розмірів, що PAQ - діагональна матриця. Якщо над кільцем R довільний рядок /стовпчик/ володіє діагональною редукцією, тоді R називається правим /лівим/ кільцем Ерміта. Праве і ліве кільце Ерміта називається кільцем Ерміта. Під кільцем скінченно-породжених головних ідеалів розуміємо кільце, в якому довільний скінченно-породжений ідеал є головним. Кільце елементарних дільників міститься в класі кілець скінченно-породжених головних ідеалів [1-3].

Для довільного елемента $a \in R$ нехай

$$M(a) = \{ M \in mspec\,R \,/\, a \in M \} .$$

Теорема. Нехай R - кільце скінченно-породжених головних ідеалів, в якому $mspec\,R$ - більш ніж зчисленна множина, а для довільного $a \in R / J(R)$ множина $M(a)$ - не більш ніж зчисленна. Тоді R - кільце елементарних дільників.

Доведення. Якщо a, $b \in R / J(R)$, тоді $M(a \cdot b) = M(a) \cup M(b)$ - не більш ніж зчисленна множина. Тому $a \cdot b \in R / J(R)$. Отже, $J(R)$ - простий ідеал R. В силу теореми 2 праці [1] R - кільце Ерміта. Таким чином, для доведення теореми достатньо