Лема 3. Нехай $A \in \mathcal{A}$. Тоді оператори M_+, M_- оборотні, причому мають місце рівності

$$M_+ T = S M_+ , \; T M_- = M_- S .$$

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 512.713

Б.В.Забавський

ПРО КОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Відомо, що комутативна область Безу, множина максимальних ідеалів якої не більш ніж зчисленна, є областю елементарних дільників [3]. У даній статті узагальнюється цей результат на випадок кільця скінченно-породжених головних ідеалів.

Під кільцем R у даній статті розуміємо комутативне кільце з одиницею. Через $J(R)$ позначимо радикал Джекобсона кільця R, а через $mspec\, R$ – множину всіх максимальних ідеалів кільця R. Нагадаємо, що комутативне кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця A над R володіє діагональною редукцією, тобто якщо для A знайдуться оборотні матриці P і Q над R підходящих розмірів, що PAQ – діагональна матриця. Якщо над кільцем R довільний рядок /стовпчик/ володіє діагональною редукцією, тоді R називається правим /лівим/ кільцем Ерміта. Праве і ліве кільце Ерміта називається кільцем Ерміта. Під кільцем скінченно-породжених головних ідеалів розуміємо кільце, в якому довільний скінченно-породжений ідеал є головним. Кільце елементарних дільників міститься в класі кілець скінченно-породжених головних ідеалів [1-3].

Для довільного елемента $a \in R$ нехай

$$M(a) = \{ M \in mspec\, R \,/\, a \in M \}.$$

Теорема. Нехай R – кільце скінченно-породжених головних ідеалів, в якому $mspec\, R$ – більш ніж зчисленна множина, а для довільного $a \in R / J(R)$ множина $M(a)$ – не більш ніж зчисленна. Тоді R – кільце елементарних дільників.

Доведення. Якщо a, $b \in R / J(R)$, тоді $M(a \cdot b) = M(a) \cup M(b)$ – не більш ніж зчисленна множина. Тому $a \cdot b \in R/J(R)$. Отже, $J(R)$ – простий ідеал R. В силу теореми 2 праці [1] R – кільце Ерміта. Таким чином, для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями виду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR+bR+cR=R$. Доведемо, що матриця A володіє діагональною редукцією. В силу теореми 3 праці [1] можемо вважати, що $J(R)=0$. Розглянемо множину $M(a)$. Нехай $M(a)= \{M_1, \ldots, M_k, \ldots\}$. Оскільки $aR+bR+cR=R$, то можна обмежитися випадком, коли $b \notin M_1$. Дійсно, якщо $b \in M_1$, то $b+c \notin M_1$, оскільки $aR+bR+cR=R$.
Тоді в силу рівності

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b+c & c \end{pmatrix} = B$$

достатньо довести, що матриця B володіє діагональною редукцією. Отже, нехай $b \notin M_1$. Розглянемо ідеал $aR+bR=a_1R$. Очевидно, що $a_1 \notin M_1$. В силу того, що R - кільце Ерміта, існує оборотна матриця P , що

$$A_1 = PA = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

де $a_1R+b_1R+c_1R=R$ і $a_1 \notin M_1$. За аналогією можна вважати, що $b_1 \notin M_2$ і $a_1R+b_1R=a_2R$, де $a_2 \notin M_2$. Продовжуючи ці міркування, отримаємо множину матриць A_k виду

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

де $a_k \notin M_k$ і $a_{k-1}R \subset a_kR$ для довільного $k=1,2\ldots$
Тим самим побудовано ланцюг ідеалів

/1/ $aR \subset a_1R \subset \cdots \subset a_kR \subset \ldots$

Нехай $J=\cup a_iR$. Оскільки $aR \subset J$, то для довільного максимального ідеалу M з включення $J \subset M$ випливає, що $M \in M(a)$. Тому знайдеться номер k , для якого $M=M_k$. Але це неможливо, оскільки в ланцюгу /1/ існує ідеал a_kR , який задовольняє умову, що $a_k \notin M_k$. Тим самим доведено, що $J=R$, тобто ланцюг /1/ скінченний. А це означає, що матриця A володіє діагональною редукцією. Теорема доведена.

1. Henriksen M. Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math. J. 1955/56. Vol. 3. P. 159-163.
2. Kaplasky J. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 66. P. 464-491. 3. Naude C., Naude G., Brewer J.W. On Bezout domains, elementary

divisor rings and pole assignability // Commun. Algeb. 1984. Vol. 12. P. 2987-3003.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 512.552.12

Б.В.Забавський, М.Я.Комарницький

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МАКСИМАЛЬНИХ І ПРОСТИХ ІДЕАЛІВ КОМУТАТИВНОЇ ОБЛАСТІ БЕЗУ

Дана стаття присвячена вивченню максимальних і простих ідеалів комутативної області Безу. Відзначимо, що спектр областей Безу досліджувався також у працях [3,5].

Нагадаємо, що комутативна область цілісності з одиницею, в якій довільний скінченно-породжений ідеал є головним, називається комутативною областю Безу. Надалі слово "комутативна" пропускатимемо. Локальна область Безу називається кільцем нормування. Область Безу називається адекватною, якщо для будь-яких елементів a, $b \in R \setminus 0$ існують такі елементи r, $s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ – властивий [4]. Ідеал J кільця R називається ідемпотентним, якщо $J = J^2$. Через $mspec\, R$ позначатимемо множину всіх максимальних ідеалів кільця R, а для довільного $\mathfrak{m} \in mspec\, R$ через $R_{\mathfrak{m}}$ позначатимемо локалізацію R щодо мультиплікативно замкненої множини $R \setminus \mathfrak{m}$.

<u>Твердження 1</u>. Якщо в неідемпотентному максимальному ідеалі $\mathfrak{m}$ області Безу R знайдеться елемент $x \notin \mathfrak{m}^2$, який не міститься в жодному іншому ідеалі $\mathfrak{m}' \in mspec\, R$, то $\mathfrak{m}$ є головним ідеалом.

<u>Доведення</u>. Якщо $xR \neq \mathfrak{m}$, то існує елемент $y \in \mathfrak{m}$, який не лежить в xR. Нехай $xR + yR = zR$. Звідси $x = zx_0$. Очевидно, $z \in \mathfrak{m}$. Оскільки $x \notin \mathfrak{m}^2$, то $x_0 \notin \mathfrak{m}$. Так як x не міститься в жодному іншому максимальному ідеалі, то x_0 – оборотний елемент кільця R. Отже, $yR \subsetneq xR$. Отримане протиріччя з вибором елемента y доводить твердження.

<u>Твердження 2</u>. Для довільних двох різних максимальних ідеалів