divisor rings and pole assignability // Commun. Algeb. 1984. Vol. 12. P. 2987-3003.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 512.552.12

Б.В.Забавський, М.Я.Комарницький

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МАКСИМАЛЬНИХ І ПРОСТИХ ІДЕАЛІВ КОМУТАТИВНОЇ ОБЛАСТІ БЕЗУ

Дана стаття присвячена вивченню максимальних і простих ідеалів комутативної області Безу. Відзначимо, що спектр областей Безу досліджувався також у працях [3,5].

Нагадаємо, що комутативна область цілісності з одиницею, в якій довільний скінченно-породжений ідеал є головним, називається комутативною областю Безу. Надалі слово "комутативна" пропускатимемо. Локальна область Безу називається кільцем нормування. Область Безу називається адекватною, якщо для будь-яких елементів a, $b\in R\setminus 0$ існують такі елементи r, $s\in R$, що $a=r\cdot s$, $rR+bR=R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R+bR$ – властивий [4]. Ідеал J кільця R називається ідемпотентним, якщо $J=J^2$. Через $mspec\,R$ позначатимемо множину всіх максимальних ідеалів кільця R, а для довільного $m\in mspec\,R$ через R_m позначатимемо локалізацію R щодо мультиплікативно замкненої множини $R\setminus m$.

Твердження 1. Якщо в неідемпотентному максимальному ідеалі m області Безу R знайдеться елемент $x\notin m^2$, який не міститься в жодному іншому ідеалі $m'\in mspec\,R$, то m є головним ідеалом.

Доведення. Якщо $xR\neq m$, то існує елемент $y\in m$, який не лежить в xR. Нехай $xR+yR=zR$. Звідси $x=zx_0$. Очевидно, $z\in m$. Оскільки $x\notin m^2$, то $x_0\notin m$. Так як x не міститься в жодному іншому максимальному ідеалі, то x_0 – оборотний елемент кільця R. Отже, $yR\subsetneq xR$. Отримане протиріччя з вибором елемента y доводить твердження.

Твердження 2. Для довільних двох різних максимальних ідеалів

$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ області Безу R з включення $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{n}$, $k \in N$ випливає рівність $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

<u>Доведення</u>. Очевидно, $R/\mathfrak{n}$ – поле. Якщо $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = R$, то з включення $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{n}$ випливає, що $\bar{m}^k = \bar{0}$ в $R/\mathfrak{n}$ для будь-якого $m \in \mathfrak{m}$. Це неможливо, тому $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

<u>Твердження 3</u>. Нехай R – кільце нормування і $\mathfrak{m} \in mspec\, R$. Тоді або $\mathfrak{m}$ – головний, або $\mathfrak{m}$ – ідемпотентний.

<u>Доведення</u>. Нехай $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. Оскільки ідеали кільця нормування утворюють ланцюг, то для довільного $m \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ маємо такі включення $\mathfrak{m}^2 \subset mR \subset \mathfrak{m}$. Оскільки R – локальне, то ідеал mR не міститься в жодному іншому максимальному ідеалі. В силу твердження 1 ідеал $\mathfrak{m}$ – головний.

<u>Наслідок 1</u>. Для будь-якого максимального ідеалу $\mathfrak{m}$ області Безу має місце одна з трьох можливостей:

1/ $\mathfrak{m}$ – головний;

2/ $\mathfrak{m}$ – ідемпотентний;

3/ справедливе включення $\mathfrak{m} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{n} \in mspec\, R \setminus \mathfrak{m}} \mathfrak{n}$.

<u>Наслідок 2</u>. У півлокальній області Безу кожний максимальний ідеал головний або ідемпотентний.

Справді, у півлокальному кільці включення $\mathfrak{m} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{n} \in mspec\, R \setminus \mathfrak{m}} \mathfrak{n}$ неможливе, оскільки максимальний ідеал, який міститься в об"єднанні скінченного числа максимальних ідеалів, збігається хоча б з одним із них.

<u>Означення</u>. Назвемо максимальний ідеал $\mathfrak{m}$ кільця R локально головним, якщо ідеал $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ є головним в $R_{\mathfrak{m}}$.

<u>Теорема 1</u>. Кожний неідемпотентний максимальний ідеал $\mathfrak{m}$ області Безу R є локально головним.

<u>Доведення</u>. Нехай це не так. Оскільки $R_{\mathfrak{m}}$ – кільце нормування, то в силу твердження 3 $\mathfrak{m}^2 R_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}}$. В силу неідемпотентності $\mathfrak{m}$ існує елемент $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Оскільки $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^2 R_{\mathfrak{m}}$, то $a = m\frac{r}{s}$, де $m \in \mathfrak{m}^2$, $s \notin \mathfrak{m}$. Звідси $as = mr$. Нехай $aR + mR = bR$. Тоді $a = a_0 b$, $m = m_0 b$. Оскільки a, $m \in \mathfrak{m}$, то $b \in \mathfrak{m}$. Покажемо, що $m_0 \in \mathfrak{m}$. Якщо це не так, то $\mathfrak{m} + m_0 R = R$. Звідси $t + m_0 c = 1$, де $t \in \mathfrak{m}$, $c \in R$. Тому $bt + bm_0 c = b$. Оскільки $bt \in \mathfrak{m}^2$ і $bm_0 = m \in \mathfrak{m}^2$, то $b \in \mathfrak{m}^2$. Це неможливо, оскільки $a \notin \mathfrak{m}^2$ і $a = ba_0$. Отже, $m_0 \in \mathfrak{m}$. Таким чином із рівності $as = mr$ отримаємо $a_0 s = m_0 r$. Ми вже довели, що $m_0 \in \mathfrak{m}$, а тому $a_0 s \in \mathfrak{m}$. Але $s \notin \mathfrak{m}$ і, отже, $a_0 \in \mathfrak{m}$. Останнє неможливо, оскільки $a \notin \mathfrak{m}^2$ по умові з $a = ba_0 \in \mathfrak{m}^2$. Врешті-решт

отримаемо, що рівність $m^2R_m = mR_m$ неможлива. Отже, m – локально головний ідеал кільця R.

Твердження 4. Нехай P – простий ідеал області Безу. Тоді ідеал $P^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$ е простим.

Доведення. Якщо P ідемпотентний, то $P^\infty = P$, і твердження очевидне. Покажемо, що з умови $P^2 \neq P$ випливае умова $P^n \neq P^{n+1}$ при будь-якому натуральному n. Справді, якщо $P^n = P^{n+1}$, то для довільного ненульового елемента $p \in P$ існуе такий елемент $p' \in P$, що $p^n = p'^{n+1} \cdot r$, де $r \in R$. Взявши замість p' найбільший спільний дільник елементів p і p', можемо вважати, що $p = p's$. Тоді отримаемо $p'^n s^n = p'^{n+1} r_2$, або, що те саме, $s^n = p' r \in P$. Звідси $s \in P$ і $p = p's \in P^2$. Тому $P = P^2$, що суперечить припущенню. Отже, ланцюг

$$P \supset P^2 \supset P^3 \supset \ldots \supset P^n \supset \ldots$$

строго спадае. Тому для довільного елемента $a \in P \setminus P^\infty$ існуе і единий номер $\nu(a)$, такий, що $a \in P^{\nu(a)}$ і $a \notin P^{\nu(a)+1}$. Доведемо тепер, що P^∞ – простий ідеал. Нехай a, $b \in R$, $a \notin P^\infty$, $b \notin P^\infty$, але $ab \in P^\infty$. Тоді $a = p_1^{\nu(a)} \cdot u$, де $u \notin P$, і $b = p_2^{\nu(b)} v$, де $v \notin P$, причому $p_1 \in P \setminus P^2$ і $p_2 \in P \setminus P^2$. Звідси $ab = p_1^{\nu(a)} p_2^{\nu(b)} \cdot u \cdot v$ і $uv \notin P$. Оскільки $ab \in P^\infty$, то $ab \in P^k$ для будь-якого натурального числа k. Візьмемо $k_0 > \nu(a) + \nu(b)$. Тоді $p_1^{\nu(a)} p_2^{\nu(b)} u \cdot v \in P^{k_0}$, тобто $p_1^{\nu(a)} p_2^{\nu(b)} u \cdot v = p_3^{k_0} \cdot r$, $r \in R$. Нехай $p_1R + p_2R + p_3R = p_4R$, тоді $p_1 = p_4\alpha$, $p_2 = p_4\beta$, $p_3 = p_4\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ і $p_4^{\nu(a)} p_4^{\nu(b)} \alpha^{\nu(a)} \beta^{\nu(b)} u \cdot v = p_4^{k_0-\nu(a)-\nu(b)} \cdot r' \in P$. Звідси $\alpha^{\nu(a)} \beta^{\nu(b)} u \cdot v = p_4^{k_0-\nu(a)-\nu(b)} r' \in P$. Оскільки u, $v \neq P$, то $\alpha^{\nu(a)} \beta^{\nu(b)} \in P$. Тим самим або $\alpha \in P$, або $\beta \in P$. Це значить, що $p_1 \in P^2$ або $p_2 \in P^2$, що суперечить вибору елементів p_1 і p_2.

Твердження 5. Нехай R – область Безу і $P_1 \supsetneqq P_2$ – прості ідеали. Тоді $P_1P_2 = P_2$.

Доведення. Виберемо систему твірних ідеалу P_1, які не належать ідеалу P_2, тобто $P_1 = \{d_\alpha\}_{\alpha \in J}$, де $d_\alpha \in P_2$ для довільного $\alpha \in J$. Якщо $p_2 \in P_2$, то маемо $p_2 = d_\alpha r \in P_2$. Оскільки $d_\alpha \notin P_2$, то $r \in P_2$. Таким чином, $p_2 \in P_2P_1$, тобто $P_2 \subset P_1P_2$. Обернене включення очевидне, і тому $P_2 = P_2P_1$. Твердження доведено.

Умова Безу у твердженні суттева. Якщо кільце R – це $R = P[x,y]$, де P – поле. Тоді $P_2 = (x) \subset (x,y) = P_1$, але $P_2P_1 \neq P_2$.

Наведемо приклади областей Безу R, у яких кожен максимальний ідеал m є не ідемпотентним і не головним, а отже, володіє властивістю

$$m \subsetneq \bigcup_{n \in mspecR \setminus m} n$$

1. Нехай R - кільце цілих аналітичних функцій, а S - множина цілих функцій, які задаються многочленами. Очевидно, що S - мультиплікативно замкнена множина. Тоді $R_{S^{-\infty}}$ має потрібні властивості. Те, що R_S є кільцем Безу і що $\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n \in specR$ для кожного неголовного максимального ідеалу m, доведено у дослідженні [4].

2. Нехай R - ультрастепінь не адекватної області Безу з безмежним максимальним спектром, у якій немає ідемпотентних максимальних ідеалів щодо неголовного ультрафільтру. Нехай S - множина всіх факторіальних елементів області R. Очевидно, що S - мультиплікативно замкнена множина. Тоді R_S - область Безу з вказаною властивістю, яка не є адекватною. Приклад неадекватної області Безу, в якій кожний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, побудований у статті [2]. Вона володіє потрібними нам властивостями.

Актуальність наведених прикладів мотивована змістом праці [1].

1. B r a n d a l W. Constructing Bezout domains // Rocky Mountain J. Math. 1976. Vol. 6. N 3. P. 383-399. 2. B r e w e r J., C o n r a d P., M o n t g o m e r y P. Lattice ordered groups and a conjecture for adequate domains // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. N 3. P. 31-35.
3. F i s c h e r T.S. The prime spectrum of a Bezout ring // Commun. Alg. 1978. Vol. 6. P. 1715-1739. 4. H e n r i k s e n M. On the prime ideals of the ring of entire functions // Pacif. J. Math. 1953. Vol. 3. N 3. P. 711-720. 5. L e w i s W.J., O h m J. The ordering of specR. // Can. J. Math. 1976. Vol. 28. N 3. P. 820-835.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.89