УДК 512.8

В.Р.Зелиско

ПРО ФАКТОРИЗАЦІЮ РЕГУЛЯРНИХ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Нехай $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ - регулярний симетричний матричний многочлен степеня $2r$, де $A_i \in M_n(\mathbb{C})$, тобто [4] $A(x) = A^{\triangledown}(x)$, $A^{\triangledown}(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i A_i^* x^i$, A_i^* - ермітово спряжена матриця до A_i.

Відомо, що для $A(x)$ існують такі оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$, що

$$P(x)\,A(x)\,Q(x) = S(A) = diag(\mathcal{E}_1(x), \dots, \mathcal{E}_n(x)), \qquad /1/$$

де $\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Матрицю $S(A)$ називають формою Сміта матричного многочлена $A(x)$, а многочлени $\mathcal{E}_i(x)$ - його інваріантними множниками.

Припустимо, що кожний інваріантний множник $\mathcal{E}_i(x)$ або не має коренів на уявній осі, або має їх, але кратність кожного такого кореня - парне число. Тоді форму Сміта $S(A)$ можна зобразити у вигляді

$$S(A) = diag(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))\, I\, diag(\varphi_1^{\triangledown}(x), \dots, \varphi_n^{\triangledown}(x)), \qquad /2/$$

де $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $I = diag(\pm 1, \dots \pm 1)$.

Таку факторизацію форми Сміта $S(A)$ матричного многочлена $A(x)$ називають допустимою.

<u>Теорема</u>. Нехай $S(A)$ володіє допустимою факторизацією виду /2/. Тоді для $A(x)$ має місце факторизація

$$A(x) = B(x)\, C\, B^{\triangledown}(x), \qquad /3/$$

де $B(x)$ - унітальний матричний многочлен степеня r з формою Сміта $\Phi = diag(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, а C - неособлива ермітова матриця, причому $B(x)$ - єдиний при фіксованій факторизації /2/, тоді і лише тоді, коли $P^{-1}(x)\Phi(x)$ регуляризується справа, тобто в позначеннях із праць [2, 3]:

$$\det M_{P(x) \| E, Ex, \dots, Ex^{r-1} \|}(\Phi) \neq 0. \qquad /4/$$

8-2498

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Якщо має місце факторизація /3/, то умова /4/ виконується згідно з результатами із праць [1], [3]. Д о с т а т н і с т ь. Із рівностей /1/ і /2/ отримуємо $A(x)=P^{-1}(x)\Phi(x)I\Phi^{\nabla}(x)\,Q^{-1}(x)$. Нехай $G(x)=Q^{-1}(x)\,(P^{-1}(x)^{\nabla})^{-1}$. Як показано у праці [4], існує невироджена над $\mathbb{C}[x]$ симетрична матриця $H(x)$, що $\Phi^{\nabla}(x)G(x)=H(x)\Phi^{\nabla}(x)$. Тоді

$$A(x)=P^{-1}(x)\Phi(x)I\;H(x)\Phi^{\nabla}(x)\,P^{-1}(x)^{\nabla}.$$

З цієї рівності на основі /4/ одержимо

$$A(x)=P^{-1}(x)\Phi(x)R(x)R^{-1}(x)I\,H(x)\Phi^{\nabla}(x)\,P^{-1}(x)^{\nabla},$$

де $P^{-1}(x)\,\Phi(x)\,R(x)=B(x)$ – унітальний матричний многочлен степеня r. Тоді $\Phi^{\nabla}(x)\,P^{-1}(x)^{\nabla}=R^{-1}(x)^{\nabla}B^{\nabla}(x)$, а отже,

$$A(x)=B(x)R^{-1}(x)\;I\;H(x)\,R^{-1}(x)^{\nabla}B^{\nabla}(x).$$

Враховуючи те, що старший коефіцієнт $B(x)$ рівний E, а $B^{\nabla}(x)$ – E або $(-E)$, бачимо, що $R^{-1}(x)I\,H(x)R^{-1}(x)^{\nabla}=\pm A_0$, тобто неособлива ермітова матриця. Єдиність $B(x)$ випливає із теореми 5 праці [1].

Якщо $A(x)$ – дійсний симетричний матричний многочлен, то згідно з працями [3,4] умова /4/ є необхідною і достатньою для існування дійсної симетричної C і $B(x)\in M_n(\mathbb{R}[x])$, які задовольняють факторизацію /3/ для кожної допустимої факторизації /2/, де $\varphi_i(x)\in\mathbb{R}[x]$.

Зауважимо, що коефіцієнти матричного многочлена $B(x)=Ex^{r}-B_1x^{r-1}-\ldots-B_r$ знаходяться за формулою

$$\left\|\begin{matrix}B_r\\ \vdots\\ B_1\end{matrix}\right\|=\left(M_{P(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\Phi)\right)^{-1}M_{P(x)x^{r}}(\Phi). \qquad /5/$$

Як наслідок, із теореми при $r=1$ на основі узагальненої теореми Безу одержуємо умови існування розв"язку рівняння $X^2A_0+XA_1+A_2=0$ / де A_0 і A_2 – ермітові матриці, а A_1 – косоермітова/, єдиного з жордановою формою, відповідною Φ, який знаходиться за формулою /5/.

Зауваження. Якщо $S(A)$ можна зобразити у вигляді

$$S(A)=diag(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))\,I\,diag(\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x)),$$

де $dian(\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x))$ еквівалентна матриці $diag(\psi_1^{\nabla}(x),\ldots,\psi_n^{\nabla}(x))$, то у відповідній факторизації /3/ унітальний множник $B(x)$ вже не єдиний [1], а залежить від скінченного числа змінних, які приєднуються до поля $\mathbb{C}$ і можуть набувати допустимих значень із $\mathbb{C}$.

1. З е л и с к о В.Р. Вопросы факторизации матричных многочленов //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1983. Вып. 17. С.28-33. 2. К а з і м і р с ь к и й П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981. 3. Щ е д р и к В.П. Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена //Укр. мат. журн. 1987. Т.39. № 3. С.370-373. 4. Я к у б о в и ч В.А. Факторизация симметричных матричных многочленов //Докл. АН СССР. 1970. Т.194. № 3. С.532-535.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 515.12

Т.М.Радул

ПРО МОНАДИ, ПОРОДЖЕНІ ДЕЯКИМИ НОРМАЛЬНИМИ ФУНКТОРАМИ

Всі простори і відображення беремо з категорії компактів $Comp$. У цій статті мова буде йти про характеризацію алгебр монад, породжених ендофункторами $\tilde G$, $\tilde N$, $\tilde N_k$, що діють у категорії $Comp$. Всі загальні означення, що стосуються монад і їх алгебр, можна знайти у праці [4]. Функтори $\tilde G$, $\tilde N$, $\tilde N_k$ є нормальними аналогами слабко нормальних функторів G, N, N_k [1,2].

Для простору X приймаємо $\tilde G X = \{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid B \in \mathcal{A}$ для кожної $B \in \exp X$ такої, що $B \supset A$ для деякої $A \in \mathcal{A}$ і $B \subset \cup \mathcal{A}\}$. Топологія в $\tilde G X$ індукується з простору $\exp^2 X$. Існує ретракція $\gamma X : \exp^2 X \to \tilde G X$, що задається формулою $\gamma X(\mathcal{A}) = \{B \in \exp X \mid B \subset \cup \mathcal{A}$ і існує $A \in \mathcal{A}$ таке, що $B \supset A\}$. Безпосередньо перевіряється, що γX - неперервне відображення. Отже, $\tilde G X$ - компакт і $\tilde G$ є підфунктором $\exp^2$.

Введемо два відображення $\tilde\cap$ і $\tilde U : \exp \tilde G X \to \tilde G X$ наступним чином: $\tilde U(\alpha) = \gamma X(\cup \alpha)$ і $\tilde\cap(\alpha) = \cap\{\gamma X(\mathcal{A} \cup \{A_\alpha\}) \mid \mathcal{A} \in \alpha\}$, де $A_\alpha = \cup\{\cup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \alpha\}$. Неперервність $\tilde\cap$ і $\tilde U$ перевіряється безпосередньо.

Із загальної теорії функторів [3] випливає існування природного перетворення $\eta : Id \to \tilde G$, компоненти якого будуть мати вигляд $\eta X(a) = \{\{a\}\}$, де $a \in X$.

Введемо відображення $\mu X : \tilde G^2 X \to \tilde G X$ таким чином: $\mu X(\mathfrak{A}) = \tilde U(\tilde\cap \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A})$, де $\mathfrak{A} \in \tilde G^2 X$. Легко бачити, що $\{\mu X\}$ - природне перетворення.

<u>Лема 1</u>. Трійка $(\tilde G, \eta, \mu)$ утворює монаду на $Comp$.