1. З е л и с к о В.Р. Вопросы факторизации матричных многочленов //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1983. Вып. 17. С.28-33. 2. К а з і м і р с ь к и й П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981. 3.Щ е д р и к В.П. Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена //Укр. мат. журн. 1987. Т.39. № 3. С.370-373. 4. Я к у б о в и ч В.А. Факторизация симметричных матричных многочленов //Докл. АН СССР. 1970. Т.194. № 3. С.532-535.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 515.12

Т.М.Радул

ПРО МОНАДИ, ПОРОДЖЕНІ ДЕЯКИМИ НОРМАЛЬНИМИ ФУНКТОРАМИ

Всі простори і відображення беремо з категорії компактів $Comp$. У цій статті мова буде йти про характеризацію алгебр монад, породжених ендофункторами $\tilde{G}$, $\tilde{N}$, $\tilde{N}_k$, що діють у категорії $Comp$. Всі загальні означення, що стосуються монад і їх алгебр, можна знайти у праці [4]. Функтори $\tilde{G}$, $\tilde{N}$, $\tilde{N}_k$ є нормальними аналогами слабко нормальних функторів G, N, N_k [1,2].

Для простору X приймаємо $\tilde{G}X = \{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid B \in \mathcal{A}$ для кожної $B \in \exp X$ такої, що $B \supset A$ для деякої $A \in \mathcal{A}$ і $B \subset \subset U\mathcal{A}\}$. Топологія в $\tilde{G}X$ індукується з простору $\exp^2 X$. Існує ретракція $\gamma X : \exp^2 X \to \tilde{G}X$, що задається формулою $\gamma X(\mathcal{A}) = \{B \in \exp X \mid B \subset U\mathcal{A}$ і існує $A \in \mathcal{A}$ таке, що $B \supset A\}$. Безпосередньо перевіряється, що γX - неперервне відображення. Отже, $\tilde{G}X$ - компакт і $\tilde{G}$ є підфунктором $\exp^2$.

Введемо два відображення $\tilde{\Pi}$ і $\tilde{U} : \exp \tilde{G}X \to \tilde{G}X$ наступним чином: $\tilde{U}(\alpha) = \gamma X\,(U\alpha)$ і $\tilde{\Pi}(\alpha) = \Pi\{\gamma X(\mathcal{A} \cup \{A_\alpha\}) \mid \mathcal{A} \in \alpha\}$, де $A_\alpha = U\{U\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \alpha\}$. Неперервність $\tilde{\Pi}$ і $\tilde{U}$ перевіряється безпосередньо.

Із загальної теорії функторів [3] випливає існування природного перетворення $\eta : Id \to \tilde{G}$, компоненти якого будуть мати вигляд $\eta X(a) = \{\{a\}\}$, де $a \in X$.

Введемо відображення $\mu X : \tilde{G}^2 X \to \tilde{G}X$ таким чином: $\mu X(\mathfrak{A}) = \tilde{U}(\tilde{\Pi}\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A})$, де $\mathfrak{A} \in \tilde{G}^2 X$. Легко бачити, що $\{\mu X\}$ - природне перетворення.

<u>Лема 1</u>. Трійка $(\tilde{G}, \eta, \mu)$ утворює монаду на $Comp$.

Доведення. Необхідно перевірити тотожності /1/ $\mu\circ\eta\tilde{G} = \mu\circ\tilde{G}\eta = 1_{comp}$. Нехай $A\in\tilde{G}X$. Тоді $\eta\tilde{G}X(A) = \{\{A\}\}$. Очевидно, що $\mu X\circ\eta\tilde{G}X(A) = A$. Разом з тим $\mu X\circ\tilde{G}\eta X(A) = \tilde{U}\{\tilde{\cap}\alpha \mid \alpha\in \exp\tilde{G}X$ і $\alpha = \{\{\{a\}\} \mid a\in A\}$ для деякого $A\in\mathcal{A}\} = \tilde{U}\{\{A\} \mid A\in\mathcal{A}\} = \mathcal{A}$. Тотожність виконується.

/2/ $\mu\circ\mu\tilde{G} = \mu\circ\tilde{G}\mu$. Нехай $\tilde{\mathfrak{A}}\in\tilde{G}^3X$. Тоді $\mu X\circ\mu\tilde{G}X(\tilde{\mathfrak{A}}) = \gamma X(\{A\in\exp X)$ існує $\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathfrak{A}}$ і існує $\alpha\in\tilde{\cap}\tilde{\alpha}$ таке, що $A\in\tilde{\cap}\alpha\}) = \gamma X(A_1)$, а $\mu X\tilde{G}(\mu X)(\mathfrak{A}) = \gamma X(\{A\in\exp X \mid A\in\tilde{\cap}\mu X\tilde{\alpha}$ для деякого $\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathfrak{A}}\} = \gamma X(A_2)$. Неважко переконатися, що $A_1 = A_2$, а отже, тотожність справедлива. Лема доведена.

Визначимо NX як підпростір $\tilde{G}X$, що складається зі зчеплених систем /система називається зчепленою, якщо будь-які дві її множини мають непорожній перетин; k - зчепленою, якщо будь-які k її множин мають непорожній перетин/; $\tilde{N}_kX$ - з k зчеплених систем. Простір $\bigcap_{k=3}^{\infty}\tilde{N}_kX$ позначимо через $\tilde{N}_{\infty}X$, який складається з систем з $\tilde{G}X$, що мають непорожній перетин. Неважко переконатися, що функтори $\tilde{N}$, $\tilde{N}_k$, $\tilde{N}_{\infty}$ доповнюються до монад природними перетвореннями η і μ, введеними вище. Отже, для цих монад справедливі включення

$$\tilde{N}_{\infty}\subset\ldots\subset\tilde{N}_k\subset\tilde{N}_{k-1}\subset\ldots\subset\tilde{N}_3\subset\tilde{N}\subset\tilde{G}.$$

Для характеризації категорії алгебр монади $\tilde{G}$ доведемо таку теорему:

Теорема 1. (X,ξ) - $\tilde{G}$-алгебра тоді і лише тоді, коли на X існують дві структури півгратки Лоусона, зв"язані між собою цілком дистрибутивністю, для яких $\xi(\mathcal{A}) = \vee\{\wedge A \mid A\in\mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A}\in\tilde{G}X$.

Доведення. Нехай (X,ξ) - $\tilde{G}$-алгебра, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\tilde{G}X$. Покажемо, що $\xi(\mathcal{A}\tilde{\cap}\mathcal{B}) = \xi(\{\{\xi(\mathcal{A})\}\}\tilde{\cap}\{\{\xi(\mathcal{B})\}\})$. Нехай $\xi(\mathcal{A}) = a$, а $\xi(\mathcal{B}) = b$. Розглянемо $\mathfrak{A}\in\tilde{G}^2X$ і $\mathfrak{A} = \{\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}\}$. Тоді $\mu X(\mathfrak{A}) = \mathcal{A}\tilde{\cap}\mathcal{B}$ і $\tilde{G}(\xi)(\mathfrak{A}) = \{\{a,b\}\} = \{\{a\}\}\tilde{\cap}\{\{b\}\}$. Отже, $\xi(\mathcal{A}\tilde{\cap}\mathcal{B}) = \xi\circ\mu X(\mathfrak{A}) = \xi\circ\tilde{G}(\xi)(\mathfrak{A}) = \xi(\{\{a\}\}\tilde{\cap}\{\{b\}\})$.

Тоді можна коректно визначити півграткову операцію $\wedge$ формулою $\wedge A = \xi(\tilde{\cap}\{\{\{a\}\} \mid a\in A\})$ для кожної $A\in\exp X$. Всі аксіоми півгратки перевіряються безпосередньо. Очевидно, що $\wedge$ - неперервне відображення з $\exp X$ в X. Отже, $(X,\wedge)$ - Лоусонова півгратка.

Друга структура будується аналогічно по $\tilde{U}$. Цілком дистрибутивність введених операцій випливає цілком з дистрибутивності

$\tilde{\cap}$, $\tilde{\cup}$ і з тотожності $\xi\circ\mu X=\xi\circ\tilde{G}\,\xi$. За побудовою $\wedge$ і $\vee$, $\xi(\mathcal{A})=\vee\{\wedge A \mid A\in\mathcal{A}\}$ для кожної $\mathcal{A}\in\tilde{G}X$. Необхідність доведена.

Нехай X – компакт зі вказаними структурами. Визначимо $\xi:\tilde{G}X\to X$ формулою $\xi(\mathcal{A})=\vee\{\wedge A \mid A\in\mathcal{A}\}$. Очевидно, що ξ – неперервне відображення. Тотожність $\xi\circ\eta X=1_X$ очевидна. Тотожність $\xi\circ\mu X=\xi\circ G(\xi)$ випливає з цілком дистрибутивності $\vee$ і $\wedge$. Теорема доведена.

Безпосередньо перевіряється, що морфізми $\tilde{G}$ -алгебр характеризуються повними гомоморфізмами по обидвох операціях. Отже, одержана характеризація категорії $\tilde{G}$ -алгебр у термінах теорії компактних півграток.

Нехай X – компакт з частковим порядком. Назвем X k-арною в-множиною Лоусона, якщо для кожної $A\in exp\,X$, для кожних k точок якої існує sup, існує $sup\,A$ і відображення $sup:\mathcal{A}\to X$ неперервне, де $\mathcal{A}\subset exp\,X$, на якій визначена операція sup. У випадку $k=2$ будемо говорити про бінарність. Якщо у попередньому означенні sup існує для тих $A\in exp\,X$, для кожної скінченної множини точок якої існує sup, то назвем X ∞-арною в-множиною Лоусона.

<u>Лема 2</u>. Нехай X – $\tilde{N}$ -алгебра, $\xi(\mathcal{A}_1)=\xi(\mathcal{A}_2)$, $\xi(\mathcal{B}_1)=\xi(\mathcal{B}_2)$, де $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\in\tilde{N}X$ і $\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2\in\tilde{N}X$. Тоді $\xi(\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1)=\xi(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2)$.

<u>Доведення</u>. Розглянемо $\mathfrak{A}_1\in\tilde{N}^2X:\mathfrak{A}_1=\{\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2\},\{\mathcal{B}_1,\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2\},\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1\}\}$. Тоді $\mu X(\mathfrak{A}_1)=(\mathcal{A}_1\tilde{\cap}(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2))\tilde{\cup}(\mathcal{B}_1\tilde{\cap}(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2))=(\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1)\tilde{\cap}(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2)$, а $\tilde{N}(\xi)(\mathfrak{A}_1)=\gamma X(\{\{\xi(\mathcal{A}_1),\xi(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2)\},\{\xi(\mathcal{B}_1),\xi(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2)\}\})=\gamma X(\{\{\xi(\mathcal{A}_2),\xi(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2)\},\{\xi(\mathcal{B}_2),\{\xi(\mathcal{B}_2),\xi(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2)\}\})=\tilde{N}(\xi)(\mathfrak{A}_2)$, де $\mathfrak{A}_2=\gamma\tilde{N}X\{\{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2\},\{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2,\tilde{\cup}\,\mathcal{A}_2\}\}$. Разом з тим $\mu X(\mathfrak{A})=(\mathcal{A}_2\tilde{\cap}(\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1))\tilde{\cup}(\mathcal{B}_2\tilde{\cap}(\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1))=\tilde{N}(\xi)(\mathfrak{A}_3)$, де $\mathfrak{A}_3=\gamma\tilde{N}X\{\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1\},\{\mathcal{B}_1,\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1\}\}$. Але $\mu X(\mathfrak{A}_2)=\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2$, а $\mu X(\mathfrak{A}_3)=\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1$, отже, $\xi(\mathcal{A}_1\tilde{\cup}\mathcal{B}_1)=\xi(\mathcal{A}_2\tilde{\cup}\mathcal{B}_2)$. Лема доведена.

Наступна теорема дає характеризацію $\tilde{N}$ -алгебр.

<u>Теорема 2</u>. X – $\tilde{N}$ -алгебра тоді і лише тоді, коли на X існує структура півгратки Лоусона (inf) і структура бінарної в-множини Лоусона $(\tilde{sup})$, які пов"язані цілком дистрибутивністю і для яких $\xi(\mathcal{A})=\tilde{sup}\{inf\,A \mid A\in\mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A}\in\tilde{N}X$.

<u>Доведення</u>. Нехай X – $\tilde{N}$ -алгебра. Структура півгратки Лоусона будується аналогічно теоремі I. Побудуємо структуру бінарної в-множини Лоусона. Введемо на X частковий порядок: $x\leq y$

тоді і тільки тоді, коли існують $A_1 \in \xi^{-1}(x)$, $A_2 \in \xi^{-1}(y)$ такі, що $\xi(A_1 \tilde{U} A_2) = y$. Коректність такого визначення випливає з леми 2. Нехай $A \in \exp X$ і для будь-яких $a, b \in A$ існує $\sup\{a,b\}$. Побудуємо $\sup A$. Для кожної $a \in A$ визначим $a^+ \in \exp X : a^+ = \{b \mid a \leq b\}$. Оскільки для кожних двох точок A існує $\sup$, то $\mathcal{A} = \gamma X\{a^+ \mid a \in A\}$ буде зчепленою. Безпосередньо перевіряється, що $\xi(\mathcal{A}) = \tilde{\sup} A$.

Покажемо неперервність $\tilde{\sup}$. Для цього достатньо показати неперервність відображення $+ : X \to \exp X$, $+(a) = a^+$.

Нехай $a^+ \in \langle V \rangle$. Припустимо, що існує послідовність $\{a_i\}$, таких, що для кожного і існує $b_i \in a_i^+$ таке, що $b_i \notin V$ і $\{a_i\} \to a$. Оскільки X і $\tilde{N}X$ компакти, ми можемо вибрати підпослідовність $\{a_{i_k}, b_{i_k}\}$ таку, що $b_{i_k} \to b$ і існують $\mathcal{A}_{i_k} \in \xi^{-1}(a_{i_k})$ і $\mathcal{B}_{i_k} \in \xi^{-1}(b_{i_k})$ такі, що $\xi(\mathcal{A}_{i_k} \tilde{U} \mathcal{B}_{i_k}) = b_{i_k}$ і $\{\mathcal{A}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k}\} \to \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$. Тоді $\xi(\mathcal{A}) = a, \xi(\mathcal{B}) = b$ і $\xi(\mathcal{A} \tilde{U} \mathcal{B}) = b$. Отже, $b \in a^+ \subset V$, і ми одержали протиріччя. Відображення $+$ - неперервне. Отже, X - бінарна b-множина Лоусона. Цілком дистрибутивність випливає з тих самих міркувань, що і в теоремі 1. Необхідність доведена.

Достатність доводиться аналогічно достатності в теоремі 1 із зауваженням, що існування $\tilde{\sup}$ у структурному відображенні випливає зі зчепленості систем. Теорема доведена.

Зауважимо, що лема 2 справедлива і для $\tilde{N}_k$, $\tilde{N}_\infty$ -алгебр. Цілком аналогічно теоремі 2 доводяться дві наступні теореми.

<u>Теорема 3</u>. $(X,\xi) \in \tilde{N}_k$ -алгеброю тоді і лише тоді, коли на X існує структура півгратки Лоусона і структура k -арної в-множини Лоусона, які пов"язані цілком дистрибутивністю і для яких $\xi(\mathcal{A}) = \tilde{\sup}\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A} \in \tilde{N}_k X$.

<u>Теорема 4</u>. $(X,\xi) \in \tilde{N}_\infty$ -алгеброю тоді і лише тоді, коли на X існує структура півгратки Лоусона і структура ∞ -арної в-множини Лоусона, які пов"язані цілком дистрибутивністю і для яких $\xi(\mathcal{A}) = \tilde{\sup}\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A} \in \tilde{N}_\infty X$.

Очевидно, що морфізми $\tilde{N}$ -, $\tilde{N}_k$ -, $\tilde{N}_\infty$ -алгебр характеризуються повними гомоморфізмами відповідних структур.

1. И в а н о в А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сиб. мат. журн. 1986. Т.27. № 6. С.95-110. 2. М о и с е е в Е.В. О пространствах замкнутых гиперпространств включения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математики, механики. 1988. № 3. С.54-57. 3. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 4. B a r r M., W e l l s Ch. Toposes, triples and theories. New York, 1985.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89