УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО ПРЯМІ ГРАНИЦІ ІТЕРОВАНИХ ФУНКТОРІВ

Нехай $\mathscr{C}$ – підкатегорія категорії $\mathscr{D}$, замкненої щодо злічених прямих границь, і $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ – ендофунктор, для якого існує природне перетворення $\eta: 1_{\mathscr{C}}\to F$. Виникає питання: скільки існує попарно неізоморфних функторів вигляду $\varinjlim\{F^n f_n\}:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, де $f_i\in\{F^i\eta,\ \eta F^i\}$. Теорема 1 стверджує, що таких функторів не більше ніж злічена кількість; теорема 2 дає умову на функтор F, при виконанні якої принаймні два розглядувані функтори не є ізоморфними.

Відзначимо, що конструкції прямих границь ітерованих функторів активно досліджуються з точки зору їх застосувань у нескінченновимірній топології [1, 2, 6].

Кожен морфізм f_n зобразимо у вигляді $f_n = F^{n\varepsilon_n}\eta F^{n(1-\varepsilon_n)}$, де $\varepsilon_n\in\{0,1\}$, і для функтора $G=\varinjlim\{F^n f_n\}$ визначимо характеристичні числа $\sigma_1(G)=\sum_i\varepsilon_i\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ і $\sigma_2(G)=\sum_i(1-\varepsilon_i)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

<u>Теорема 1</u>. Нехай $G_1=\varinjlim\{F^n f_n'\}$, $G_2=\varinjlim\{F^n f_n''\}$. Якщо $\sigma_i(G_1)=\sigma_i(G_2)$, $i=1,2$, то функтори G_1 і G_2 природно ізоморфні.

<u>Доведення</u>. Досить уважно розглянути діаграму

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\eta F"] \arrow[d, "F\eta"'] & F^2 \arrow[r, "\eta F^2"] \arrow[d, "F^2\eta"'] & F^3 \arrow[r] \arrow[d, "F^3\eta"'] & \cdots \\
F^2 \arrow[r, "\eta F^2"] \arrow[d, "F^2\eta"'] & F^3 \arrow[r, "\eta F^3"] \arrow[d, "F^3\eta"'] & F^4 \arrow[r] \arrow[d, "F^4\eta"'] & \cdots \\
F^3 \arrow[r, "\eta F^3"] \arrow[d, dotted] & F^4 \arrow[r, "\eta F^4"] \arrow[d, dotted] & F^5 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots, \\
\ & \ & \ &
\end{tikzcd}$$

комутативність якої випливає з природності перетворення η.

Всі необхідні далі поняття з теорії функторів у категорії компактів $Comp$ можна знайти у працях [3, 5]. Нехай $F: Comp\to Comp$ – неперервний мономорфний функтор, що зберігає точку, прообрази та перетини. Оскільки $F^n = F^{n-i}(F^i)$, то можна розглядати природне перетворення /не обов"язково неперервне/ $supp^i: F^n\to \exp F^i$, $supp^i(a)=\bigcap\{A\in\exp F^i X \mid a\in F^{n-i}(A)\}$.

Нескладно перевірити, що виконуються твердження:

а/ $supp^j X(F^n\eta X(a)) = F^{j-1}\eta X(supp^{j-1}X(a))$, $a\in F^n X$, $1\le j\le n$;

б/ якщо $a \in F^n X$ і $supp^1 X(a) \subset \eta X(X)$, то $a = F^{n-1}\eta(b)$ для деякого $b \in F^{n-1}X$.

Лема. Нехай $F \supset SP^2$. Тоді для кожного $n \geq 2$ не існує природного вкладення $\gamma: F^2 \to F^n$, для якого $F^{n-1}\eta \circ \ldots \circ F\eta = \gamma \circ \eta F$.

Доведення. Для точок $x, y \in X$ через $[x, y] \in FX$ позначимо образ точки $\{x, y\} \in SP^2 X$ при вкладенні $SP^2 X \hookrightarrow FX$. Зауважимо, що $[x, x] = \eta X(x)$ /це випливає з єдиності природного перетворення $\eta: Id \to F$ [3]). Приймемо $Y = \{0,1\}$, $X = Y^2 = \{0,1\}^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Нехай $a = [[(0,0),(1,0)],[(0,1),(1,1)]] \in F^2 X$. Зауважимо, що $F^2(pr_1)(a) = \eta FY([0,1])$ /де $pr_1: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ – проекція на I-й співмножник/. Використовуючи природність перетворення γ, можна записати $F^n(pr_1) \circ \gamma X(a) = \gamma Y \circ F^2(pr_1)(a) = \gamma Y \circ \eta FY([0,1]) = F^{n-1}\eta Y \circ \ldots \circ F\eta Y([0,1]) = b$. Зауважимо, що $supp^i(b) = \eta F^{i-1} Y \circ \ldots \circ \eta Y(\{0,1\})$, $0 \leq i \leq n-1$.

Оскільки $supp^1: F^n \to expF$ – природне перетворення, то $exp \cdot F(pr_1) \circ supp^1 \gamma X(a) \subset supp^1(F^n(pr_1)\gamma X(a)) = \eta Y(Y)$, звідки випливає, що $supp^1(\gamma X(a)) \subset F(\{(0,0), (0,1)\}) \cup F(\{(1,0), (1,1)\})$.

Нехай $\alpha \in supp^1(\gamma X(a))$. Покажемо, що $\alpha \in \eta X(X)$. Для визначеності можна вважати, що $\alpha \in F(\{(0,0), (0,1)\})$. Якщо припустити, що $supp\,\alpha = \{(0,0), (1,0)\}$, то, оскільки точка $a \in F^2 X$ інваріантна щодо перестановки f елементів $(0,0)$ і $(1,0)$ в X, $supp^1(F^n(f) \times \gamma X(a)) = supp^1(\gamma X(a)) = F^1(f)(supp^1 \gamma X(a))$. Але $F^1(f)(\alpha) \notin supp^1 \gamma X(a)$, оскільки $supp(F(f)(\alpha)) = \{(1,0), (0,1)\}$, звідки випливає, що $F(f)(\alpha) \notin F(\{(0,0),(0,1)\}) \cup F(\{(1,0),(1,1)\})$, а отже і $F(f)(\alpha) \notin supp^1 \gamma X(a)$. Значить, $supp^1 \gamma X(a) \subset \eta X(X)$.

Аналогічно можна показати, що $supp^i \gamma X(a) \subset \eta F^{i-1} X \circ \ldots \circ \eta X(X)$ при $1 \leq i \leq n-1$. Оскільки $supp^{n-1} \gamma X(a) \subset \eta F^{n-2} X \circ \ldots \circ \eta X(X)$, то існує $c \in FX$ таке, що $\gamma X(a) = F^{n-1}\eta \circ \ldots \circ F\eta X(c)$. Отже, $\gamma X(\eta FX(c)) = \gamma X(a)$ і $\eta FX(c) \neq a$, тобто γX – не мономорфізм. Лема доведена.

З леми легко випливає така теорема.

Теорема 2. Нехай $F: Comp \to Comp$ – неперервний, мономорфний функтор, що зберігає точку, прообрази і перетини і $SP^2 \subset F$. Тоді функтори $G_1 = \varinjlim\{F^n, F^n\eta\}$ і $G_2 = \varinjlim\{F^n, \eta F^n\}$ неізоморфні.

Зауваження. Тим самим способом, яким ми доводили лему, можна довести, що не існує природного вкладення $\alpha: F^n \to F^m$, $n \leq m$, такого, що $F^{m-1}\eta \circ \ldots \circ F^n\eta \circ F^{n-1}\eta = \alpha \circ \eta F^{n-1}$. З цього факту випливає, що функтори $G = \varinjlim\{F^n, f_n\}$, де $f_i = F^i\eta$ при $i \geq n_0$, попарно неізоморфні, якщо тільки їх характеристичні числа різні. Тобто насправді існує зчисленна сім"я попарно неізоморфних функторів виду $\varinjlim\{F^n, f_n\}$, де $f_n \in \{F^n\eta, \eta F^n\}$.

Відзначимо нарешті, що кожен нормальний функтор містить у ролі підфунктора функтор $(-)^2$ або SP^2 [4]. Для степеневого функтора $(-)^n$ всі функтори прямих границь ізоморфні, причому ізоморфізм здійснюється відповідними перестановками координат. Постає задача знаходження максимального класу функторів, для яких виконується твердження теореми 2.

1. Заричный М.М. Итерированные суперрасширения //Общая топология. Отображения топологических пространств. М., 1986. С.45-59. 2.Федорчук В.В. Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадичных функторов //Докл. АН СССР. 1988. Т.301, № 1. С.41-45. 3.Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 4. Шапиро Л.Б. Категорная характеристика гиперпространства //Успехи мат. наук. 1988. Т.43. Вып. 4. С.227-228. 5. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып. 3. С. 3-62. 6. Toruńczyk H., West J. A Hilbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 89. N 2. P. 329-335.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89

УДК 512.552.12

І.Я.Тушницький

КІЛЬЦЯ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ ПЕРЕДКРУЧЕННЯМИ

У даній статті знайдено критерій того, щоб комутативна адекватна область Безу була кільцем з локально визначеними передкрученнями. А саме, в такій області кожне нетривіальне передкручення однозначно визначається своїми локалізаціями щодо максимальних ідеалів тоді і тільки тоді, коли ця область h -локальна.

Для повноти викладу результату нагадаємо деякі необхідні поняття, які використовуються у статті. Надалі маємо, що R - комутативне кільце з $1 \neq 0$. Максимальний спектр кільця R позначаємо через $mspec(R)$. Найбільший спільний дільник елементів a і b кільця R позначатимемо через (a, b) .

Кільце R називається областю Безу, якщо, по-перше, воно є областю цілісності, і по-друге, кожний скінченно-породжений ідеал кільця R є головним.

Передрадикальним фільтром у кільці R називається непорожня сім"я $\mathcal{F}$ ідеалів кільця R , яка задовольняє наступні умови: