числа різні. Тобто насправді існує зчисленна сім"я попарно неізоморфних функторів виду $\varinjlim \{F^n, f_n\}$, де $f_n \in \{F^n\eta, \eta F^n\}$.

Відзначимо нарешті, що кожен нормальний функтор містить у ролі підфунктора функтор $(-)^2$ або SP^2 [4]. Для степеневого функтора $(-)^n$ всі функтори прямих границь ізоморфні, причому ізоморфізм здійснюється відповідними перестановками координат. Постає задача знаходження максимального класу функторів, для яких виконується твердження теореми 2.

1. З а р и ч н ы й М.М. Итерированные суперрасширения //Общая топология. Отображения топологических пространств. М., 1986. С.45-59. 2. Ф е д о р ч у к В.В. Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадичных функторов //Докл. АН СССР. 1988. Т.301, № 1. С.41-45. 3. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 4. Ш а п и р о Л.Б. Категорная характеристика гиперпространства //Успехи мат. наук. 1988. Т.43. Вып. 4. С.227-228. 5. Щ е п и н Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып. 3. С. 3-62. 6. T o r u n c z y k H., W e s t J. A Hilbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 89. N 2. P. 329-335.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89

УДК 512.552.12

І.Я.Тушницький

КІЛЬЦЯ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ ПЕРЕДКРУЧЕННЯМИ

У даній статті знайдено критерій того, щоб комутативна адекватна область Безу була кільцем з локально визначеними передкрученнями. А саме, в такій області кожне нетривіальне передкручення однозначно визначається своїми локалізаціями щодо максимальних ідеалів тоді і тільки тоді, коли ця область h -локальна.

Для повноти викладу результату нагадаємо деякі необхідні поняття, які використовуються у статті. Надалі маємо, що R - комутативне кільце з $1 \neq 0$. Максимальний спектр кільця R позначаємо через $mspec(R)$. Найбільший спільний дільник елементів a і b кільця R позначатимемо через (a, b).

Кільце R називається областю Безу, якщо, по-перше, воно є областю цілісності, і по-друге, кожний скінченно-породжений ідеал кільця R є головним.

Передрадикальним фільтром у кільці R називається непорожня сім"я $\mathcal{F}$ ідеалів кільця R, яка задовольняє наступні умови:

T1. Якщо $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$ і $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, де $\mathcal{J}$ - ідеал в R, то $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$;

T2. Якщо $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \in \mathcal{F}$;

T3. Якщо $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$ і $r \in R$, то $(\mathcal{I} : r) \in \mathcal{F}$.

Якщо, крім цього, виконується умова:

T4. Якщо $\mathcal{I}$ - ідеал кільця R і $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$, причому $(\mathcal{I} : r) \in \mathcal{F}$ при будь-якому $r \in \mathcal{J}$, то $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ називається радикальним фільтром.

Кільце дробів кільця R щодо мультиплікативно замкненої множини $S = R \setminus \mathfrak{m}$, де $\mathfrak{m}$ - максимальний ідеал, називається локалізацією кільця R щодо максимального ідеалу $\mathfrak{m}$ і позначається через $R_{\mathfrak{m}}$.

Нехай $\mathcal{I}$ - ідеал кільця R. Тоді через $\mathcal{I}_{\mathfrak{m}}$ позначимо множину $\{\frac{a}{s} / a \in \mathcal{I}, s \in S\}$. Легко переконатися, що $\mathcal{I}_{\mathfrak{m}}$ є ідеалом в $R_{\mathfrak{m}}$.

Локалізацією передрадикального фільтра $\mathcal{F}$ щодо максимального ідеалу $\mathfrak{m}$ називається множина $\{\mathcal{I}_{\mathfrak{m}} / \mathcal{I} \in \mathcal{F}\}$, яка позначається через $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$. Відмітимо, що $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$ є передрадикальним фільтром кільця $R_{\mathfrak{m}}$. Передрадикальний фільтр будемо називати ненульовим, якщо він не містить нульового ідеалу.

Як і у праці [1], через $\mathcal{G}_0(R)$ позначимо множину всіх ненульових передрадикальних фільтрів кільця R, а через $\mathcal{G}_0(R_{\mathfrak{m}})$ - множину ненульових передрадикальних фільтрів кільця $R_{\mathfrak{m}}$, де $\mathfrak{m} \in mspec(R)$. Позначатимемо елементи декартового добутку $\prod_{\mathfrak{m} \in mspec(R)} \mathcal{G}_0(R_{\mathfrak{m}})$ у вигляді сімейств $\langle g[\mathfrak{m}] \rangle$, де $g[\mathfrak{m}] \in \mathcal{G}_0(R_{\mathfrak{m}})$ для кожного $\mathfrak{m} \in mspec(R)$.

Визначимо функцію $\Phi_0 : \mathcal{G}_0(R) \to \prod_{\mathfrak{m} \in mspec(R)} \mathcal{G}_0(R_{\mathfrak{m}})$ таким чином: $\Phi_0(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{F}_{\mathfrak{m}} \rangle$, де $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_0(R)$.

Якщо визначене вище відображення Φ_0 біективне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними передкрученнями.

Відзначимо, що обмеження Φ відображення Φ_0 на множину радикальних фільтрів кільця R збігається з відображенням Φ, визначеним у праці [1]. Якщо відображення Φ біективне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними крученнями.

Область R називається h - локальною, якщо будь-який ненульовий простий ідеал кільця R міститься в єдиному максимальному ідеалі і кожний ненульовий елемент із R міститься лише у скінченному числі максимальних ідеалів.

Нехай R - комутативна область Безу. Ненульовий елемент a кільця R називається адекватним, якщо для кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи c і d, що $a = c \cdot d$, причому $(c, b) = 1$

і (d',b) – незворотний для будь-якого незворотного дільника d' елемента d .

Комутативна область Безу R називається адекватною областю, якщо кожний ненульовий елемент кільця R є адекватним [2].

Перейдемо до викладу основних результатів. У статті доведено [1], що відображення $\Phi: \mathcal{U}_0(R) \to \prod_{m \in mspec(R)} \mathcal{U}(R)_m^0$ на множині радикальних фільтрів кільця R бієктивне, якщо R – h – локальна область. Цей же факт легко переноситься на випадок відображення Φ_0.

Таким чином, справедлива наступна лема.

Лема 1. Якщо кільце R – h – локальна область, то воно є кільцем з локально визначеними передкрученнями.

Доведення цього факту точно таке ж, як і у праці [1].

Виявляється, що для адекватних областей Безу справедливе і обернене твердження. Для доведення цього факту спочатку доведемо наступну лему.

Лема 2. Нехай R – адекватна комутативна область Безу і J – ненульовий ідеал у R . Тоді для довільного $m \in mspec(R)$, який містить ідеал J , ідеал $J_m \cap R = J_0$ міститься лише в одному максимальному ідеалі m і, крім цього, $(J_0)_m = J_m$.

Доведення. Нехай a_0 – ненульовий елемент з J_0 і $m' \in mspec(R)$, причому $m' \neq m$. Тоді $m + m' = R$. Звідси випливає, що існують елементи $m_0 \in m$ і $m_0' \in m'$, такі, що $m_0 + m_0' = 1$. Так як R – адекватне, то і елемент $a_0 \in R$ – адекватний. Тому існують такі елементи r і s кільця R , що $a_0 = r \cdot s$, причому $rR + m_0' R = R$ і (s', m_0') – незворотний дл довільного незворотного дільника s' елемента s . Покажемо, що $s \notin m$. Якщо $s \in m$, то $(s, m_0) = t \in m$. Тоді існують елементи кільця R s_1 і m_1, такі, що $s = t \cdot s_1$ і $m_0 = t m_1$. Оскільки $m_0 + m_0' = 1$, то $(m_0, m_0') = 1$, а отже, і $(t, m_0') = 1$. З іншого боку, оскільки t – незворотний дільник елемента s , то t має незворотний спільний дільник з m_0' , тобто (t, m_0') – незворотний. Отримана суперечність показує, що $s \notin m$. Отже, $r = \frac{a_0}{s} \in (J_0)_m$. Згідно з лемою 1.1 /1/ праці [1], $(J_0)_m = J_m$. А оскільки $r \in R$, то $r \in J_m \cap R = J_0$. Покажемо, що $r \notin m'$. Справді, якщо $r \in m'$, то $rR + m_0' R \subset m'$, а це суперечить умові $rR + m_0' R = R$. Таким чином, $r \in J_0 \setminus m'$, а це означає, що $J_0 \not\subseteq m'$. Оскільки m' – довільний максимальний ідеал, відмінний від m , то J_0 міститься лише в одному максимальному ідеалі m кільця R . Лема доведена.

Лема 3. Нехай R – адекватна комутативна область Безу. Тоді якщо R є кільцем з локально визначеними передкрученнями, то воно h – локальне.

Доведення. Оскільки R є кільцем з локально визначеними передкрученнями, то відображення Φ_0, визначене вище, є бієктивним. Із умови сюр"єктивності відображення Φ_0 згідно леми 2. з праці [1] випливає, що кожний простий ідеал в R міститься лише в єдиному максимальному ідеалі. Покажемо, що із припущення ін"єктивності відображення Φ_0 випливає умова: кожний ненульовий елемент кільця R міститься лише в скінченному числі максимальних ідеалів. Припустимо супротивне. Тоді існує елемент r кільця R, який міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів. Тоді ідеал rR також міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів. Розглянемо два сімейства ідеалів: $\mathcal{F}$ – множина всіх ненульових ідеалів кільця R і $\mathcal{F}_0$ – множина ідеалів, що містяться лише в скінченному числі максимальних ідеалів. Легко бачити, що $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_0$ є передрадикальними фільтрами. Якщо rR міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів, то $rR \notin \mathcal{F}_0$. Оскільки $rR \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}_0 \subsetneqq \mathcal{F}$. За лемою 2, для будь-якого ідеалу J кільця R і для будь-якого $m \in mspec(R)$ ідеал $J_m \cap R = J_0$ належить $\mathcal{F}_0$ і $(J_0)_m = J_m$. Тому для довільного $m \in mspec(R)$ $\mathcal{F}_m = (\mathcal{F}_0)_m$. Отже, ми отримали, що $\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{F}$ і $\Phi(\mathcal{F}) = \Phi(\mathcal{F}_0)$, а це суперечить ін"єктивності відображення Φ_0. Таким чином, припущення, що існує елемент r кільця R, який міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів, невірне. Лема доведена.

Із лем 1 і 3 випливає справедливість наступного результату:

Теорема 1. Нехай R – адекватна комутативна область Безу. Значить, R є кільцем з локально визначеними передкрученнями тоді і тільки тоді, коли воно h – локальне.

Якщо $\mathcal{F}$ – радикальний фільтр кільця R, то позначимо через $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ множину всіх тих ідеалів з $\mathcal{F}$, які містяться лише у скінченному числі максимальних ідеалів кільця R. Легко бачити, що $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ є передрадикальним фільтром кільця R. Нехай $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ – найменший серед радикальних фільтрів кільця R, що містять $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ [3]. Тоді має місце таке твердження:

Теорема 2. Адекватна комутативна область Безу R є областю з локально визначеними крученнями тоді і тільки тоді, коли для будь-якого ненульового радикального фільтра $\mathcal{F}$ кільця R $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай Φ – бієктивне. Доведемо, що $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$. Покажемо, що для довільного максимального ідеалу m кільця R $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m = \mathcal{F}_m$. Включення $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m \subset \mathcal{F}_m$ очевидне. Покажемо, що $\mathcal{F}_m \subset (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m$. Нехай $J \in \mathcal{F}$. Тоді $J_m \cap R \supset J$ /за лемою 1.1 /2/ з праці [1]/. Звідси на основі Т1 випливає, що $\mathcal{J}_m \cap R \in \mathcal{F}$. Згідно з лемою 1.1 /1/ із праці [1] маємо, що $(\mathcal{J}_m \cap R)_m = \mathcal{J}_m \in \mathcal{F}_m$. За лемою 2, $\mathcal{J}_m \cap R$ міститься лише в одному максимальному ідеалі m. Тому $\mathcal{J}_m \cap R \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, а $(\mathcal{J}_m \cap R)_m \in (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m$. Отже, $\mathcal{F}_m \subset (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m$. Так як $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \subset \subset \mathcal{F}$, то $\mathcal{J}(\mathcal{F})_m = \mathcal{F}_m$. З ін"ективності відображення φ_0 випливає, що $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$.

Достатність. Нехай $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$. Спочатку доведемо ін"ективність відображення φ. Нехай $(\mathcal{F}_1)_m = (\mathcal{F}_2)_m$. За доведеним вище $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1})_m = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})_m$. За лемою 2.1 із праці [1], яка є вірною і для передрадикальних фільтрів, отримуємо, що $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}_2}$. Звідси видно, що $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1}) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})$. Отже, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. Тепер покажемо, що відображення $\mathcal{F}$ – сюр"ективне. Нехай $< \mathcal{G}[m] > \in \prod_{m \in mspec} \mathcal{G}_0(R_m)$ і $\mathcal{F} = \{ \mathcal{I} / \mathcal{I}$ – ідеал в R і $\mathcal{I}_m \in \mathcal{G}[m]$ для довільного $m \in mspec(R)$. За лемою 1.7 із праці [1], $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_0(R)$. Нехай $m \in mspec(R)$. Покажемо, що $\mathcal{F}_m = \mathcal{G}[m]$. Ясно, що $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{G}[m]$. Нехай $\mathcal{J} \in \mathcal{G}[m]$ і $\mathcal{I} = \mathcal{J} \cap R$. Тоді $\mathcal{I}_m = \mathcal{J} \in \mathcal{G}[m]$ (за лемою 1.1/1/ із праці [1]). Якщо $\mathcal{P} \in mspec(R) \setminus \{m\}$, то $\mathcal{I}_{\mathcal{P}} = R_{\mathcal{P}}$, бо $\mathcal{I}$ міститься згідно з лемою 2 лише в одному максимальному ідеалі m. Отже, $\mathcal{I}_m \in \mathcal{F}_m$ для будь-якого $m \in \in mspec(R)$. Звідси випливає $\mathcal{G}[m] \subset \mathcal{F}_m$.

1. Brandal W., Barbut E. Localization of torsion theories // Pacific J. Math. 1983. Vol. 107. N 1. P. 27-37. 2. Larsen M.D., Lewis W.J., Shores T.S. Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 187. N 1. P. 231-248. 3. Stenström S. Rings of quotients // Berlin. 1975.

Стаття надійшла до редколегії 21.03.89