УДК 512.552

О.Д.Артемович

ПРО ПРАВІ ГАМІЛЬТОНОВІ КІЛЬЦЯ

Кільце називається правим гамільтоновим, якщо всі його підкільця - праві ідеали [4, задача 1.141]. У цій статті описані деякі класи правих гамільтонових кілець. Нагадаємо, що гамільтонові кільця /тобто кільця, всі підкільця яких двосторонні ідеали/ з точністю до нільпотентних p-кілець описані у працях [1-3, 5,9]. Надалі будемо користуватися термінологією праць [5-7]; зауважимо лише, що $\langle S \rangle$ означає підкільце, породжене підмножиною S кільця R, $C(a)$ - централізатор елемента a, $Z(R)$ - центр кільця R.

Лема 1. Праве гамільтонове кільце є лівим дуо-кільцем.

Лема 2. Нехай R - праве гамільтонове кільце. Тоді

1/ $ara = a^2r$ для будь-яких елементів $a,r \in R$;

2/ якщо $b \in C(a)$, то $b \in C(ar)$ для будь-якого $r \in R$;

3/ правий ідеал aR - комутативне кільце;

4/ якщо R містить хоча б один ненульовий недільник нуля, то кільце R комутативне.

Доведення. Нехай a - який-небудь ненульовий елемент кільця R, а b - довільний елемент із $C(a)$. Тоді, очевидно, $a \in C(b)$ і оскільки, за умовою, $C(a)$ і $C(b)$ - праві ідеали, то

$$b(ar) = (ar)b \qquad /1/$$

для будь-якого елемента r кільця R. Отже, зокрема, при $b=a$ із виразу /1/ одержуємо, що

$$a^2r = ara. \qquad /2/$$

Із виразу /1/ також, зокрема, при $b=at$, де t - довільний елемент кільця R, отримаємо, що

$$(atr)a = (ar)(at),$$

звідки випливає, що

$$(atr)a = a(tr)a = a^2tr = a(at)r = (at)(ar),$$

а отже, $(ar)(at) = (at)(ar)$. Таким чином, aR - комутативне кільце.

Нехай надалі $c \neq 0$ і c - недільник нуля кільця R.

Тоді для будь-яких елементів r, t кільця R, враховуючи вираз /2/, маємо $c(cr - rc) = c^2 r - crc = 0$,

$$cr - rc = 0, \quad cr \in Z(R),$$

а значить,

$$ctr = rct = crt, \quad c(tr - rt) = 0 \text{ і } tr = rt,$$

тобто R – комутативне кільце. Лема доведена.

Наслідок 1. Праве гамільтонове кільце є PI-кільце.

З леми також випливає, що в негамільтоновому кільці, що є правим гамільтоновим кільцем, всі ненульові елементи є дільниками нуля.

Лема. Нехай ∂ – внутрішнє диференціювання кільця R. Тоді $\partial R \subseteq \mathcal{L}(R)$, де $\mathcal{L}(R)_e$ – радикал Левицького кільця R, і навіть більше того, $(\partial r)^2 = 0$ для будь-якого елемента r кільця R.

Доведення. Справді, для довільних елементів a, b кільця R враховуючи вираз /2/, маємо $(ab - ba)^2 = 0$.

Беручи до уваги леми 2, 3 та результати праць [3,4], легко отримати два таких твердження:

Твердження 1. Для кільця R з одиницею наступні твердження рівносильні:

1/ R – праве гамільтонове кільце;

2/ R – гамільтонове кільце;

3/ $R \simeq \mathbb{Z}$ або $R \simeq \mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Твердження 2. Якщо кільце R таке, що $R \neq \mathcal{L}(R) = 0$, де $\mathcal{L}(R)$ – радикал Левицького, то наступні твердження рівносильні:

1/ R – праве гамільтонове кільце;

2/ R – гамільтонове кільце;

3/ $R = \sum_p R_p$ – пряма сума по різних простих числах p, або R ізоморфне кільцю, породженому таким цілим числом $z \neq 0$, $z^2 = \alpha z$, де α – ненульове ціле число.

Має місце така теорема:

Теорема 1. Нехай R – кільце без кручення. Тоді R – праве гамільтонове кільце в тому і тільки в тому випадку, коли або

1/ R – кільце з нульовим множенням /тобто $R^2 = 0$ /, або

2/ R – ізоморфне кільцю, породженому ненульовим цілим числом, тобто $R \simeq \langle k \rangle$, $k^2 = \alpha k$, де α – ненульове ціле число, або 3/ $R = J + \langle t \rangle$, $J^2 = 0$, $tJ = 0$, $J \cap \langle t \rangle = 0$, $t^2 = t$, $\langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $it = i$ для будь-якого елемента $i \in J$.

Доведення. Достатність очевидна.

Н е о б х і д н і с т ь. Очевидно, підкільце $J=\langle i\in R / i^2=0\rangle$ є ідеалом кільця R.

Припустимо, що R – нількільце. Нехай r – довільний елемент із R індексу нільпотентності n, i – ненульовий елемент із J, причому $i^2=0$. Тоді $ir\in\langle i\rangle$, а тому $ir=\alpha i$, де $\alpha\in\mathbb{Z}$. Звідси $0=r^{n-1}ir=\alpha r^{n-1}i$, і внаслідок того, що R без кручення, маємо $r^{n-1}i=0$. Тоді також $0=r^{n-2}ir=\alpha r^{n-2}i$, а отже, $r^{n-2}i=0$. Міркуючи аналогічно, отримаємо, що $ri=0$ і $ir=0$. Таким чином, $JR=RJ=0$. Звідси випливає, що $J\leqslant Z(R)$, а тому фактор-кільце $R/Z(R)$ комутативне і гамільтонове. Оскільки $Z(R)$ і $R/Z(R)$ також без кручення, то $Z(R)^2=0$, $(R/Z(R))^2=0$ [3, теорема 5]. Це означає, що $J=Z(R)$, $R^2\leqslant Z(R)$, $R^3\leqslant RZ(R)=RJ=0$. Крім того, з гамільтоновості кільця $\langle r\rangle$ випливає, що $r^2=0$ [5].

Нехай t – також довільний елемент кільця R. Тоді $rt=\beta r$, де $\beta\in\mathbb{Z}$, $0=rt^2=\beta rt$, а отже, $rt=0$. Звідси отримуємо, що $R^2=0$.

Якщо тепер $R\neq\mathcal{Z}(R)$, $\mathcal{Z}(R)=0$, то внаслідок твердження 2 кільце R є типу 2/ із умови теореми.

Тому припустимо, що $R\neq\mathcal{Z}(R)\neq 0$. Зрозуміло, що $\mathcal{Z}(R)^2=0$. Нехай $t\notin\mathcal{Z}(R)$ і $i\in\mathcal{Z}(R)$. Очевидно, $\langle i\rangle\cap\langle t\rangle=0$ та $ti=0$. Крім того, всі елементи кільця R мають тип K_7 /в сенсі [5]/. Отже,

$$(i+t)^2=(i+t)\sigma,\qquad t^2=\beta t,\quad \text{де}\quad \sigma,\beta\in\mathbb{Z}.$$

Звідси випливає, що

$$it+t^2=\sigma i+\sigma t,$$

$$\langle i\rangle\ni it-\sigma i=\sigma t-t^2\in\langle t\rangle,$$

а отже, $\sigma=\beta$ і $it=\beta i$. Але тоді $\langle i,t\rangle/\langle i,t\rangle$ – змішане гамільтонове кільце з фактор-кільцем по радикалу без кручення і в силу праці [2] $\bar{i}=\bar{0}$. Звідси $i\in\langle it\rangle$, $i=\gamma it=\gamma\beta i$, $\gamma\beta=1$, а отже, $i=it$, $\langle t\rangle\simeq\mathbb{Z}$.

Теорема доведена.

Легко отримати ще одне твердження.

<u>Твердження 3</u>. Нехай R – періодичне нількільце. Тоді R праве гамільтонове в тому і лише в тому випадку, коли $R=\sum_p\oplus R_p$ – пряма сума нільпотентних правих гамільтонових р-кілець R_p по різних простих числах p.

Наступну теорему отримуємо на основі результату із праці [8] з урахуванням теореми 3 [3] і леми 4 [3].

Теорема 2. Якщо R – гамільтонове p-кільце, то воно нільпотентне і є підпрямою сумою кілець R_i, кожне з яких належить до одного із типів:

1/ $R_i \simeq \langle x \rangle,\ O(x) = p^n\ (n>0),\ x^2 = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{Z},\ (\alpha, p) \neq 1$;

2/ R_i – кільце з нульовим множенням.

1. Андриянов В.И. Смешанные гамильтоновы нилькольца // Мат. зап. Урал. гос. ун-та. 1966. Т.5. Тетр. 3. С.15–30. 2. Андриянов В.И. Смешанные Г-кольца //Ученые зап. Свердлов. гос. пед. ин-та, 1967. Вып. 51. С.12–21. 3. Андриянов В.И., Фрейдман П.А. О гамильтоновых кольцах //Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-та. 1965. Вып. 31. С.3–23. 4. Днестровская тетрадь: Нерешенные проблемы теории колец и модулей. 3-е изд. Новосибирск, 1982. 5. Фрейдман П.А. Письмо в редакцию /по поводу статьи М.Шперлинга/ //Мат. сб. 1960. Т.52 /94/. № 3. С.915–916. 6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М., 1971. 7. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., 1972. 8. Kruse R.L. Price D.T. On the subring structure of finite nilpotent rings // Pacif. J. Math. 1969. Vol. 31. P. 103–117. 9. Redei L. Vollidealringe in weiteren Sinn. I // Acta Math. Acad. Hung. 1952. Vol. 3. S. 243–268.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.89

УДК 515.12

М.М.Зарічн ;, О.Й.Ткач

ПРО ТОПОЛОГІЮ ПРОСТОРУ ШАРУВАНЬ НА ГЛАДКОМУ МНОГОВИДІ

Нехай M^n – n-вимірний C^r-многовид, $n \geq 2,\ r \geq 1$, $\mathcal{F}ol_k^r(M)$ – множина k-вимірних C^r-шарувань на многовиді M^k, $1 \leq k < n$. Через $\xi : G_k TM \to M$ позначаємо розшарування гроссманових многовидів над M. Кожне шарування $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol_k^r(M)$ визначає переріз $\varphi_{\mathcal{F}}$ розшарування ξ, для якого $\varphi_{\mathcal{F}}(x)$ рівне дотичному простору до шару шарування $\mathcal{F}$, що містить x. Таким чином, одержуємо вкладення

$$\varphi : \mathcal{F}ol_k^r(M) \to C^{r-1}(M, G_k TM),\ \mathcal{F} \mapsto \varphi_{\mathcal{F}}.$$

Надалі топологізуємо множину $\mathcal{F}ol_k^r(M)$ сильною /слабкою/ топологією Уітні в $C^{r-1}(M, G_k TM)$ [2], індукованою вкладенням φ. Утворений топологічний простір позначається $\mathcal{F}ol_k^r(M)_S$

10-2498