УДК 512.55

О.Л.Горбачук, С.С.Прийма

СКІНЧЕННІ КІЛЬЦЯ І КРУЧЕННЯ НАД НИМИ

У працях [1,6] вивчаються скінченні кільця /одиниці може не бути/, наприклад, описані кільця до сьомого порядку [1]. У нашій статті вивчаються кільця з одиницею. Виділяються кільця, порядок яких не ділиться на куб простого числа. Основним результатом є теорема про розщепленість кручень над скінченними кільцями.

Лема 1. Скінченне кільце з одиницею, абелева група якого циклічна, ізоморфне кільцю лишків Z_n.

Доведення. Нехай порядок кільця n. Спочатку встановимо, що порядок одиниці e збігається з n. Для будь-якого $m \in N$ вірно $ma = m(ea) = (me)_a$. Звідси одержуємо, що $O(e) \geq O(a)$, оскільки a - твірний елемент, то $O(e) = O(a)$ і $R = \{0, e, 2e, \dots, (n-1)e\}$, безпосередньо видно, що $R \approx Z_n$.

Наслідок 1. Кільце з одиницею, порядок якого просте число, ізоморфне полю Z_p.

Лема 2. Кільце порядку p^2 ізоморфне кільцю лишків Zp^2 або фактор-кільцю кільця многочленів $Zp[x]$ по ідеалу, породженому многочленом другого степеня.

Доведення. Якщо в кільці R існує елемент порядку p^2, тобто абелева група кільця циклічна, за лемою 1 кільце $R \approx Zp^2$. Якщо абелева група не циклічна, то всі відмінні від нульового елементи кільця R мають порядок p. Підкільце $R_p = \{0, e, 2e, \dots$ $\dots, (n-1)e\}$ ізоморфне кільцю Zp. До кільця $R_p = \{0, e, \dots, (n-1)e\}$ приєднаємо довільний елемент $a \notin Rp$, тобто розглянемо кільце $Rp[a]$. Очевидно, що $Rp[a] = R$ /за кількістю елементів/. Будуємо гомоморфізм кільця $Zp[x]$ в кільце $Rp[a]$ за правилом: многочлен $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ перейде в елемент $a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \dots + a_n a^n$. Таке відображення буде гомоморфізмом на сюр"ективне, одержуємо $R \approx Zp[x]/J$. Оскільки $Zp[x]$ кільце головних ідеалів, то

$$J = f_0(x)\, Zp[x].$$

Виходячи з кількості елементів кільця R, робимо висновок, що $f_0(x)$ - многочлен другого степеня. Зауважимо, що якщо многочлен $f_0(x)$ розкладається в добуток взаємно простих многочленів першого степеня $f_1(x)$ і $f_2(x)$, то за відомою теоремою [3] буде

$$Zp[x]/_{f_0(x)Zp[x]} = Zp[x]/_{f_1(x)Zp[x]} \dotplus Zp[x]/_{f_2(x)Zp[x]}.$$

Оскільки $f_1(x)$ і $f_2(x)$ першого степеня, то фактор-кільце
$Zp[x]/_{f_i(x)} \approx Zp$,
тобто R ізоморфне прямій сумі кілець Zp.

<u>Означення</u>. Скінченне кільце називається примарним, якщо його абелева група примарна, тобто кільце має порядок p^n.

<u>Наслідок 2</u>. Кільце з одиницею, порядок якого не ділиться на p^3, комутативне.

<u>Доведення</u>. Відомо [7], що якщо кільце порядку n розкладається в пряму суму p -примарних кілець, тобто $|R| = p^i$ і за умовою n не ділиться на p^3, то кожна примарна компонента має порядок p або p^2. З леми 2 випливає, що ця компонента комутативна.

<u>Наслідок 3</u>. Якщо n ділиться на p^3, то існує некомутативне кільце порядку n.

<u>Доведення</u>. Виходячи з примарного розкладу, достатньо показати, що існує кільце порядку p^3, яке некомутативне. Досить розглянути кільце трикутних матриць другого порядку $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ над полем Zp. Можна довести, що довільне некомутативне кільце порядку p^3 ізоморфне такому матричному кільцю.

Далі будемо вивчати розщеплюваність кручень над скінченними кільцями. Всі означення і факти з теорії кручень даються в книгах [4, 5].

Оскільки скінченне кільце артінове, то довільне кручення буде радикально півпростим, тобто воно задається двостороннім ідемпотентним ідеалом. Тоді $v(M)$ - періодичний підмодуль модуля M визначається так:

$$v(M) = \{m \in M,\ mJ = 0\},$$

де J - двосторонній ідемпотентний ідеал $(J = J^2)$.

Нагадаємо, що кручення v називається розщеплюваним, якщо для довільного модуля M підмодуль $v(M)$ є прямим доданком, тобто

$$M = v(M) \dotplus K,$$

де K - підмодуль, вільний від кручення, тобто для будь-якого $k \in K$, $kJ \neq 0$.

<u>Теорема</u>. Якщо порядок кільця n не ділиться на p^3, де p просте число, то над ним всі кручення розщеплюються. Коли n ділиться на p^3, то існує кільце порядку n і таке кручення v над даним кільцем, яке не розщеплюється.

Доведення. Якщо n не ділиться на p^3, то за наслідком 2 кільце комутативне. Скінчення комутативне кільце досконале і над ним всі кручення розщеплюються [2]. Для доведення другої частини теореми достатньо над кільцем R матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in Z_p$ побудувати кручення, яке не розщеплюється. Для цього задамо це кручення таким ідемпотентним ідеалом:

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in Z_p \right\}.$$

Розглянемо правий підмодуль $M = R$. Тоді

$$v(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, b, c \in Z_p \right\}.$$

Припустимо, що кручення розщеплюється, тоді

$$R = v(R) \dot{+} T,$$

де T - правий ідеал і $v(R) \cap T = 0$.

Якщо $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in T$ і

$a_1 = 0$, то $\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in v(R)$,

тоді $b_1 = 0$ і $c_1 = 0$.

Нехай $\begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in T$ і $a \neq 0$.

В силу того, що T є правий ідеал, a може бути довільне.

Дійсно, $\begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

за рахунок довільності a_2, aa_2 довільний елемент.

Виходить, що $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$ для будь-якого $a \in Z_p$.

Зі співвідношення $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 & ab_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

отримаємо, що в $T \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$, для будь-яких $\left. a, b \in Z_p \right\}$.

Оскільки для будь-якого $b \in Z_p$ $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in v(R) \cap T$,

то ми отримали протиріччя з припущенням, що v розщеплюється. Ми встановили: в категорії правих модулів над R існує нерозщеплюване кручення.

Таке кручення існує в категорії лівих модулів, достатньо замість нашого ідеала J взяти ідеал $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, b, c \in Z_p$.

1. А н т и п к и н В.Г., Е л и з а р о в В.П. Кольца порядка n // Сиб. мат. журн. 1982. № 23. С.9-18. 2. Г о р б а ч у к Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы // Мат. исследования. Кишинев, 1972. С.81-90. 3. З а р и с с к и й О., С а м ю э л ь П. Коммутативная алгебра. М., 1963. Т. 1. С.166-169. 4. К а ш у А.И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинев, 1983. 5. М и ш и н а А.П., С к о р н я к о в Л.А. Абелевы группы и модули. М., 1969. 6. C o l i n R. Flether Rings of small order // The mathematical Gazette. 1980. Vol. 64. N 8. P. 9-22.

7. M c D o n a l d B. Finite ring with identity. New York, 1974.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.89

УДК 539.3

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У БАГАТОШАРОВИХ ТІЛАХ

Розглянемо багатошарову сферу при $r \in [r_0, r_1), \ldots, [r_{n-1}, r_n]$, що складається із n матеріалів відповідно, між якими має місце ідеальний тепловий контакт. У початковий момент часу $\tau = 0$ сфера має температуру $t_н$. У наступні моменти часу внутрішня поверхня підтримується при температурі t^-, а зовнішня - при t^+.

Теплофізичні характеристики сфери як єдиного цілого подаємо у вигляді [2]:

$$\rho(r) = \rho_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\rho_{k+1} - \rho_k) \cdot S_-(r - r_k), \qquad /1/$$

$$S_-(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Моделювання розривних характеристик за допомогою асиметричних одиничних функцій є природним з теоретико-множинної точки зору, оскільки логічно відповідає розбиттю множини точок відрізка $[r_0, r_n]$ на підмножини.

Температурне поле такої сфери отримуємо при розв"язанні задачі теплопровідності:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \lambda(r) \dfrac{\partial t}{\partial r}\right] = c(r)\dot{t}, \\ t\big|_{r=r_0} = t_н + (t^- - t_н) \cdot S_+(\tau), \\ t\big|_{r=r_n} = t_н + (t^+ - t_н) \cdot S_+(\tau), \\ t\big|_{\tau=0} = t_н, \end{cases} \qquad /2/$$