7. M c D o n a l d B. Finite ring with identity. New York, 1974.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.89

УДК 539.3

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У БАГАТОШАРОВИХ ТІЛАХ

Розглянемо багатошарову сферу при $r \in [r_0, r_1), \ldots, [r_{n-1}, r_n]$, що складається із n матеріалів відповідно, між якими має місце ідеальний тепловий контакт. У початковий момент часу $\tau = 0$ сфера має температуру t_H. У наступні моменти часу внутрішня поверхня підтримується при температурі t^-, а зовнішня - при t^+.

Теплофізичні характеристики сфери як єдиного цілого подаємо у вигляді [2]:

$$\rho(r) = \rho_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\rho_{k+1} - \rho_k) \cdot S_-(r - r_k), \qquad /1/$$

$$S_-(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Моделювання розривних характеристик за допомогою асиметричних одиничних функцій є природним з теоретико-множинної точки зору, оскільки логічно відповідає розбиттю множини точок відрізка $[r_0, r_n]$ на підмножини.

Температурне поле такої сфери отримуємо при розв"язанні задачі теплопровідності:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \lambda(r) \frac{\partial t}{\partial r} \right] = c(r) \dot{t}, \\ t\big|_{r=r_0} = t_H + (t^- - t_H) \cdot S_+(\tau), \\ t\big|_{r=r_n} = t_H + (t^+ - t_H) \cdot S_+(\tau), \\ t\big|_{\tau=0} = t_H, \end{cases} \qquad /2/$$

де $\quad S_+(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0. \end{cases}$

Традиційний підхід до розв"язання такої задачі полягає у виконанні операції диференціювання у лівій частині рівняння теплопровідності з використанням теореми диференціювання добутку двох розривних функцій. При цьому враховуємо розривність похідної $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ і отримуємо рівняння з сингулярними коефіцієнтами.

У даній статті при розв"язанні задачі теплопровідності пропонується інший підхід.

Переходимо від шуканої змінної t до нової змінної θ за формулою

$$\theta = \lambda_1 (t - t_H) + \sum_{K=1}^{n-1} (\lambda_{K+1} - \lambda_K)\cdot\left(t - t\Big|_{\tau=\tau_K}\right)\cdot S_-(\tau - \tau_K). \qquad /3/$$

Легко показати, що заміна /3/ має такі властивості:

1. θ - неперервна по τ_i у вузлах $\tau = \tau_K$, $K = 1, \ldots, n-1$.

2. $$\theta\Big|_{\tau=\tau_i} = \lambda_i\left(t\Big|_{\tau=\tau_1} - t_H\right) + \sum_{j=2}^{i} \lambda_j \left(t\Big|_{\tau=\tau_j} - t\Big|_{\tau=\tau_{j-1}}\right). \qquad /4/$$

3. Обернене перетворення до θ має вигляд

$$t = \frac{1}{\lambda(\tau)}\left[\theta + \lambda_1 t_H + \sum_{K=1}^{n-1} (\lambda_{K+1} - \lambda_K)\cdot t\Big|_{\tau=\tau_K}\cdot S_-(\tau - \tau_K)\right], \qquad /5/$$

де $$t\Big|_{\tau=\tau_i} = t_H + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j+1}}\right)\theta\Big|_{\tau=\tau_j} + \frac{1}{\lambda_i}\theta\Big|_{\tau=\tau_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad /6/$$

4. $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ - неперервна по τ у вузлах $\tau = \tau_K$, $K = 1, \ldots, n-1$.

5. $$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \lambda(\tau)\cdot\frac{\partial t}{\partial \tau}. \qquad /7/$$

6. $\theta\Big|_{\tau=0} = 0$.

7. $$\dot{\theta} = \lambda(\tau)\dot{t} - \sum_{K=1}^{n-1} (\lambda_{K+1} - \lambda_K)\,\dot{t}\Big|_{\tau=\tau_K}\cdot S_-(\tau - \tau_K). \qquad /8/$$

Якщо у рівнянні теплопровідності задачі /2/ перейти від змінної t до змінної θ, то з урахуванням виразів /4/-/8/ отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{a(\tau)}\dot{\theta} + \frac{1}{a(\tau)}\sum_{K=1}^{n-1}(\lambda_{K+1} - \lambda_K)\dot{t}\Big|_{\tau=\tau_K}\cdot S_-(\tau - \tau_K), \qquad /9/$$

II-2498

де $\dot{t}\Big|_{r=r_k}=\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_{j+1}}\right)\dot{\theta}\Big|_{r=r_j}+\frac{1}{\lambda_k}\dot{\theta}\Big|_{r=r_k}$,

яке не містить сингулярних коефіцієнтів, а шукана функція θ має неперервну похідну по r на всьому проміжку $[r_0, r_n]$.

Розглянемо випадок, коли $n=2$. Тоді отримуємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{1}{a(r)}\dot{\theta}+\frac{1}{a_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)\dot{\theta}\Big|_{r=r_1}\cdot S_-(r-r_1), \\ \theta\Big|_{r=r_0}=\lambda_1\cdot(t^- - t_H)\,S_+(\tau), \\ \theta\Big|_{r=r_2}=\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\theta\Big|_{r=r_1}+\lambda_2\cdot(t^+ - t_H)\,S_+(\tau), \\ \theta\Big|_{\tau=0}=0. \end{cases} \qquad /10/$$

Тепер після перетворення Лапласа по змінній τ маємо

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{\theta}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\bar{\theta}}{dr}=\left[\gamma_1^2+(\gamma_2^2-\gamma_1^2)S_-(r-r_1)\right]\bar{\theta}+ \\ +\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)\gamma_2^2\bar{\theta}\Big|_{r=r_1}\cdot S_-(r-r_1), \\ \bar{\theta}\Big|_{r=r_0}=\frac{\lambda_1}{S}(t^- - t_H), \\ \bar{\theta}\Big|_{r=r_2}=\frac{\lambda_2}{S}(t^+ - t_H)-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)\bar{\theta}\Big|_{r=r_1}, \end{cases} \qquad /11/$$

де
$$\gamma_k^2=\frac{S}{a_k},\quad k=1,2.$$

Розв"язок задачі /11/ запишеться у вигляді

$$\bar{\theta}=\bar{\theta}_1\cdot[1-S_-(r-r_1)]+\bar{\theta}_2\cdot S_-(r-r_1),$$

де $\bar{\theta}_1=r_0\lambda_1(t^- - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{11}(r,S)}{r\cdot S}+r_2\lambda_2(t^+ - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{12}(r,S)}{r\cdot S}$,

$$\bar{\theta}_2=r_0\lambda_1(t^- - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{21}(r,S)}{r\cdot S}+r_2\lambda_2(t^+ - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{22}(r,S)}{r\cdot S},$$

$$\bar{\Phi}_{11}(r,S)=\frac{sh\gamma_1(r_1-r)}{sh\gamma_1(r_1-r_0)}+\lambda_1\frac{r_1\gamma_1\,sh\gamma_2(r_2-r_1)}{Z(r,S)}\cdot\frac{sh\gamma_1(r-r_0)}{sh\gamma_1(r_1-r_0)},$$

$$\bar{\Phi}_{12}(r,S)=\lambda_1\cdot\frac{r_1\gamma_2\,sh\gamma_1(r-r_0)}{Z(r,S)},$$

$$\bar{\Phi}_{21}(r,S)=(\lambda_1-\lambda_2)\frac{r\gamma_1\,sh\gamma_2(r_2-r_1)}{Z(r,S)}+\lambda_2\frac{r_1\gamma_1\,sh\gamma_2(r_2-r)}{Z(r,S)},$$

$$\bar{\Phi}_{22}(r,S)=\frac{sh\gamma_2(r-r_1)}{sh\gamma_2(r_2-r_1)}+(\lambda_1-\lambda_2)\frac{r\gamma_2\, sh\gamma_1(r_1-r_0)}{Z(r,S)}+$$

$$+\lambda_2\frac{r_1\gamma_2\, sh\gamma_1(r_1-r_0)}{Z(r,S)}\cdot\frac{sh\gamma_2(r_2-r)}{sh\gamma_2(r_2-r_1)},$$

$$Z(r,S)=\lambda_1\psi_1(r_1)\cdot sh\gamma_2(r_2-r_1)+\lambda_2\psi_2(r_2)\cdot sh\gamma_1(r_1-r_0),$$

$$\psi_1(r)=\gamma_1 r_1\, ch\gamma_1(r-r_0)-sh\gamma_1(r-r_0),$$

$$\psi_2(r)=\gamma_2 r_1\, ch\gamma_2(r-r_1)+sh\gamma_2(r-r_1).$$

Із виразів /5/, /6/ випливає, що

$$\bar{t}=\frac{t_H}{S}+\frac{1}{\lambda(r)}\left[\bar{\theta}+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)\bar{\theta}\Big|_{r=r_1}\cdot S_-(r-r_1)\right],$$

де $$\bar{\theta}\Big|_{r=r_1}=\frac{\lambda_1}{S}\cdot\frac{\lambda_1(t^- - t_H)r_0\gamma_1\, sh\gamma_2(r_2-r_1)+\lambda_2(t^+ - t_H)r_2\gamma_2\, sh\gamma_1(r_1-r_0)}{Z(r,S)}.$$

При $r_0=0,\ t^-=t_H,\ r=0$ отримуємо

$$\bar{t}(r,S)=\bar{t}_1\cdot[1-S_-(r-r_1)]+\bar{t}_2\cdot S_-(r-r_1),$$

$$\frac{\bar{t}_1(r,S)}{t_H}=\frac{1}{S}-\lambda_2\cdot\frac{r_1 r_2\gamma_2\, sh\gamma_1 r}{r\cdot S\cdot Z(r,S)},$$

$$\frac{\bar{t}_2(r,S)}{t_H}=\frac{1}{S}-\frac{r_2}{rS}\cdot\frac{\lambda_2\psi_2(r)\, sh\gamma_1 r_1+\lambda_1\psi_1(r_1)\, sh\gamma_2(r-r_1)}{Z(r,S)}.$$

Це відповідає розв"язкові, отриманому у праці [1].

Отже, показана можливість застосування заміни змінної вигляду /3/ для розв"язання задач теплопровідності у кусково-однорідних областях.

1. Л ы к о в А.В. Теория теплопроводности. М., 1967.
2. П о д с т р и г а ч Я.С., Л о м а к и н В.А., К о л я н о Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.89