УДК 539.377:536.12

І.М.Колодій, І.І.Верба

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РОТЕ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ

Розглянемо задачу про охолодження шару, що складається з двох різних матеріалів. У початковому стані обидва матеріали нагріті до високої температури t_0 /порядку 2000 °C/. Через поверхні $x_i = \ell_i$ $(i=1,2)$ здійснюється віддача тепла в середовище температури $t_c = g(\tau)$ за законом Ньютона. На стику поверхонь при $x=\ell$ мають місце умови ідеального теплового контакту. Тоді для знаходження нестаціонарного температурного поля в двошаровому тілі матимемо таку крайову задачу:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_i(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial x}\right)=c_i(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial \tau}, \quad t_i=t_i(x,\tau), \quad i=1,2, \qquad /1/$$

$$t_i(x,0)=t_0, \qquad /2/$$

$$\lambda_i(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial x}=\pm\alpha_i\left(t_i-g(\tau)\right) \quad \text{при } x_i=\ell_i, \qquad /3/$$

$$t_1=t_2, \; \lambda_1(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial x}=\lambda_2(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial x} \quad \text{при } x=\ell, \qquad /4/$$

де $c_i(t_i)=c_{i0}\,t_i^{\nu_i}, \; \lambda_i(t_i)=\lambda_{i0}\,t_i^{\nu_i}$.

Після заміни $T_i = t_i^{\nu_{i+1}}$ крайова задача /1/-/4/ зведеться до крайової задачі для лінійних рівнянь і нелінійних граничних умов виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}=\frac{1}{K_i}\frac{\partial T_i}{\partial Fo}, \quad T_i=T_i(X,Fo), \quad i=1,2; \qquad /5/$$

$$T_i(X,0)=T_{i0}; \qquad /6/$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial X}=\pm Bi_i(1+\nu_i)\left(T^{\frac{1}{\nu_i+1}}-T_c\right) \quad \text{при } X=L_i; \qquad /7/$$

$$T_1^{\frac{1}{\nu_1+1}}=T_2^{\frac{1}{\nu_2+1}}, \quad \frac{\lambda_{10}}{\nu_1+1}\frac{\partial T_1}{\partial X}=\frac{\lambda_{20}}{\nu_2+1}\frac{\partial T_2}{\partial X} \quad \text{при } X=L. \qquad /8/$$

Тут $X=\frac{x}{\ell_2}$, $a_i=\frac{\lambda_{io}}{C_{io}}$, $Fo=\frac{a_2\tau}{\ell_2^2}$, $Bi_i=\frac{\alpha_i\ell^2}{\lambda_{io}}$, $K_1=\frac{a_1}{a_2}$, $K_2=1$,

$T_{io}=t_o^{\nu_i+1}$, $L_i=\frac{\ell_i}{\ell_2}$, $L=\frac{\ell}{\ell_2}$, $T_c=g\left(\frac{\ell_2^2}{a_2}Fo\right)$.

Задачу /5/–/8/ розв"язуемо методом Роте [1,2]. Для цього розіб"емо проміжок $[0, Fo^*]$ зміни Fo на n рівних частин точками $Fo_k=kh$, $k=0,1,\ldots,n$, $h=\frac{Fo^*}{n}$. У рівнянні /5/ приймемо $Fo=Fo_{k+1}$ і замінимо похідну по часу Fo різницевою похідною. В результаті такої заміни отримаємо звичайні лінійні диференціальні рівняння для функцій $T_{i,k+1}(X)$, що є наближеними значеннями $T_i(X, Fo_{k+1})$

$$\frac{d^2T_{i,k+1}(X)}{dX^2}=\frac{1}{K_i}\,\frac{T_{i,k+1}(X)-T_{i,k}(X)}{h},\quad i=1,2;\ k=0,1,\ldots,n-1. \qquad /9/$$

Враховуючи вираз /6/, приймаємо

$$T_{i,0}(X)=T_{i,0}; \qquad /10/$$

інші $T_{i,k+1}(X)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ будуть задовольняти умови /7/, /8/

$$\frac{dT_{i,k+1}(X)}{dX}=\pm Bi_i(1+\nu_i)\left(T_{i,k+1}^{\frac{1}{\nu_i+1}}(X)-T_{c,k+1}\right) \quad \text{при } X=L_i, \qquad /11/$$

$$T_{1,k+1}^{\frac{1}{\nu_1+1}}(X)=T_{2,k+1}^{\frac{1}{\nu_2+1}}(X),\ \frac{\lambda_{10}}{\nu_1+1}\frac{dT_{1,k+1}(X)}{dX}=\frac{\lambda_{20}}{\nu_2+1}\frac{dT_{2,k+1}(X)}{dX} \quad \text{при } X=L, \qquad /12/$$

де $T_{c,k+1}=g\left(\frac{\ell_2^2}{a_2}Fo_{k+1}\right)$; $k=0,1,\ldots,n-1$.

Підставимо в рівняння /9/ $k=0$. $T_{i,0}(X)$ відомі з виразу /10/, тому можна знайти розв"язки $T_{i,1}$ рівнянь /9/, що задовольняють граничні умови /11/ і умови спряження /12/. Потім підставимо $k=1$ у вираз /9/ і знайдемо $T_{1,2}(X)$ і т.д.

Загальний розв"язок рівнянь /9/ має вигляд

$$T_{i,k+1}(X)=A_{i,k+1}\,ch\frac{X}{\sqrt{h_i}}+B_{i,k+1}\,sh\frac{X}{\sqrt{h_i}}+\frac{1}{\sqrt{h_i}}\int_L^X T_{i,k}(\xi)\,sh\frac{\xi-X}{\sqrt{h_i}}\,d\xi, \qquad /13/$$

де $h_1=\frac{a_1}{a_2}h$, $h_2=h$.

Коефіцієнти $A_{i,k+1}$, $B_{i,k+1}$ знайдемо, задовольнивши умови /11/ і /12/ з такої нелінійної системи рівнянь:

$$A_{i,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\,sh\frac{L_i}{\sqrt{h_i}}+B_{i,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\,ch\frac{L_i}{\sqrt{h_i}}-\frac{1}{h_i}\int_L^{L_i}T_{i,k}(\xi)\,ch\frac{\xi-L_i}{\sqrt{h_i}}\,d\xi=$$

$$= \pm Bi_i(1+\nu_i)\left[\left(A_{i,k+1}ch\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} + B_{i,k+1}sh\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} + \frac{1}{\sqrt{h_i}}\int_L^{L_i} T_{i,k}(\xi)sh\frac{\xi-L_i}{\sqrt{h_i}}d\xi\right)^{\frac{1}{\nu_i+1}} - T_{c,k+1}\right],$$

$$\left(A_{1,k+1}ch\frac{L}{\sqrt{h_1}} + B_{1,k+1}sh\frac{L}{\sqrt{h_1}}\right)^{\frac{1}{\nu_1+1}} = \left(A_{2,k+1}ch\frac{L}{\sqrt{h_2}} + B_{2,k+1}sh\frac{L}{\sqrt{h_2}}\right)^{\frac{1}{\nu_2+1}},$$

$$\frac{\lambda_{10}}{\nu_1+1}\left(A_{1,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_1}}sh\frac{L}{\sqrt{h_1}} + B_{1,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_1}}ch\frac{L}{\sqrt{h_1}}\right) =$$

$$= \frac{\lambda_{20}}{\nu_2+1}\left(A_{2,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_2}}sh\frac{L}{\sqrt{h_2}} + B_{2,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_2}}ch\frac{L}{\sqrt{h_2}}\right).$$

/І4/

Зауважимо, що якщо в граничних умовах /ІІ/ справа $T_{i,k+1}^{\frac{1}{\nu_i+1}}(X)$ замінити на $T_{i,k}^{\frac{1}{\nu_i+1}}(X)$, тобто використовувати інформацію попереднього моменту часу, то отримаємо лінійні граничні умови

$$\left.\frac{dT_{i,k+1}(X)}{dX}\right|_{X=L_i} = \pm Bi_i(1+\nu_i)\left(T_{i,k}^{\frac{1}{\nu_i+1}} - T_{c,k+1}\right)\Big|_{X=L_i}. \qquad /І5/$$

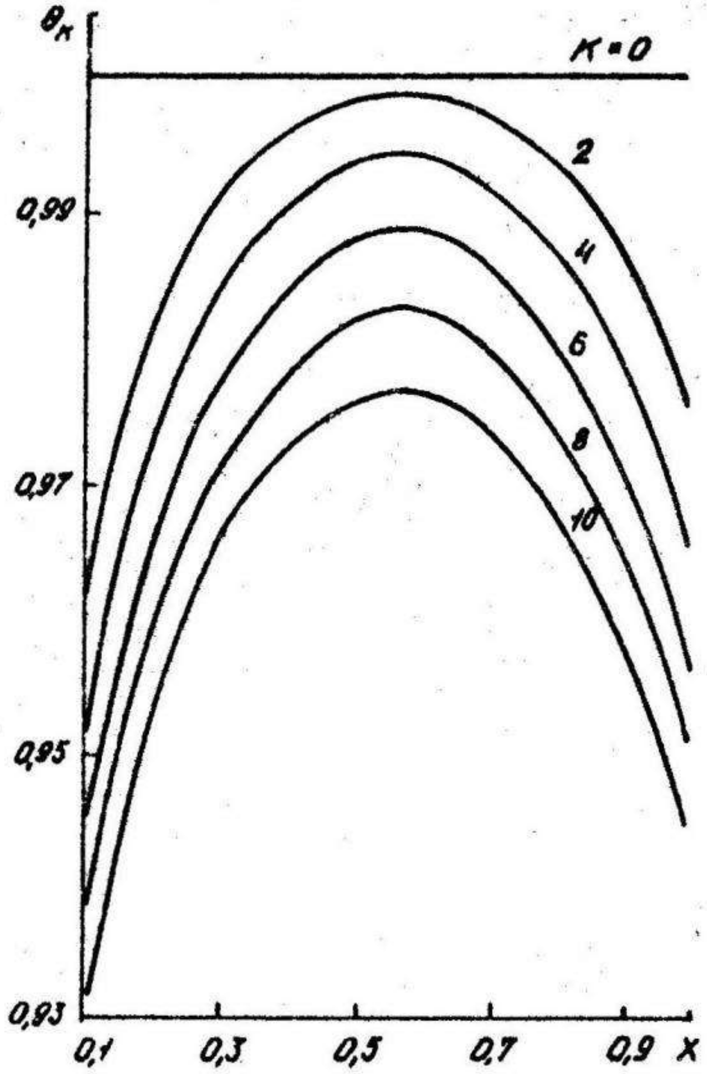
Такий підхід назвемо методом Роте з запізненням. Розв"язування задачі /5/-/8/ методом Роте з запізненням приводить до розв"язування крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь /9/ з лінійними граничними умовами /І5/ і умовами спряження /І2/. У цьому випадку два перших рівняння системи /І4/ стануть лінійними і матимуть вигляд

$$A_{i,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}sh\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} + B_{i,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}ch\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} - \frac{1}{h_i}\int_L^{L_i} T_{i,k}(\xi)ch\frac{\xi-L_i}{\sqrt{h_i}}d\xi =$$

$$= \pm Bi_i(1+\nu_i)\left(T_{i,k}^{\frac{1}{\nu_i+1}}(L_i) - T_{c,k+1}\right).$$

Інтеграли у правій частині /І3/ можна обчислити при $k = 0,1,\dots,n-1$, тобто отримати $T_{i,k+1}(X)$ у явному вигляді. Такі обчислення проведені авторами, але через громіздкість одержаних формул тут не наводяться.

Методом Роте з запізненням проведений числовий аналіз результатів при таких значеннях констант: $\nu_1=1$; $\nu_2=3$; $a_i=1$; $K_i=1$; $L_1=0{,}1$; $L=0{,}2$; $L_2=1{,}0$; $t_0=2000$; $T_c=20$; $Bi_1=Bi_2=10$; $h=0{,}1$; $h_i=0{,}1$; $i=1,2$.



На рисунку зображені графіки функцій $\theta_{i,K}(X)=\frac{1}{t_0}\,T_{i,K}^{\frac{1}{\nu_i+1}}(X)$, що є наближеними значеннями безрозмірної температури $\frac{1}{t_0}t_i\,(X, Fo_K)$ при $K=0,2,\dots,10$. Із графіків видно, що процес охолодження шару проходить несиметрично щодо серединної площини шару X = 0,55. Це зумовлено тим, що шар складається з двох різних матеріалів /лінія стику двох матеріалів зображена на рисунку пунктиром/. Найповільніше охолоджується область, що лежить у деякому околі серединної поверхні.

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1981. Т.4. Ч. 2. 2. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertauf-

gaben als Grenzfall eindimensionalen Randwertaufgaben // Math. Ann. № 102. S. 650-670.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 511.364

Я.М.Холявка

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛ, ЗВ"ЯЗАНИХ З $\wp(z)$

Нехай $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса, $2\omega_1, 2\omega_2$ – довільна фіксована пара основних періодів, g_2, g_3 – її інваріанти, $\xi_1, \dots, \xi_6$ – довільні алгебраїчні числа,

$$n_i = \deg \xi_i, \quad n_{i,k} = \deg \mathbb{Q}(\xi_i, \xi_k), \ i \neq k, \ L_i = L(\xi_i).$$

<u>Теорема</u>. Якщо $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 2m\omega_1 + 2h\omega_2$, $m, h \in \mathbb{Z}$,

$$n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_6),$$

$$N = \sum_{i=1}^{3} \frac{\ln L_i}{n_i} + \ln\left(n\left(1 + \sum_{i=4}^{6} \frac{\ln L_i}{n_i}\right)\right),$$

$$M = n(\min(n_{2,4}, n_{3,6}, n_{4,6}))\left(1 + \sum_{i=1}^{6} \frac{\ln L_i}{n_i}\right) + \ln\left(n \sum_{i=1}^{3} \frac{\ln L_i}{n_i}\right),$$

то існує така ефективна постійна Λ, що

$$|\omega_1 - \xi_1| + |\omega_2 - \xi_2| + |\alpha - \xi_3| + |g_2 - \xi_4| +$$

$$+ |g_3 - \xi_5| + |\wp(\alpha) - \xi_6| > \exp(-\Lambda n N M).$$

Для доведення цієї теореми можна скористатися другим методом Гельфонда [1]. Позначимо через $\zeta_1, \dots, \zeta_6$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1} \cdots \xi_6^{u_6}$, $u_i = 0, 1, \dots, n_i - 1$, $i = 1, \dots, 6$,

$$C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{k,l,\tau} \in \mathbb{Z}.$$

Допоміжну функцію, точки інтерполяції та параметри визначимо так:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} C_{k,l} z^k \wp^l(z),$$