$2x_1\omega_1 + 2x_2\omega_2 + \alpha$ /точки інтерполяції/, $L = [\lambda^3 n_2 N] - 1$,
$X_0 = [\lambda\sqrt{M}]$, $X_1 = [\lambda^4 n N]$, $S_0 = [\lambda^4 n N]$, $K = [4\lambda X_0 - 1]^2 - 1$,
де λ – деяке натуральне число, X_0 та X_1 – межі інтерполяції до та після застосування основної леми у другому методі Гельфонда, S_0 – межа порядку похідних. Основна лема застосовується до функції $F(z) = f(z)\wp^{2L}(z+\alpha)$.

При закінченні доведення $|C_{k,l,\tau}|$ можна оцінити, використовуючи лему 4 [2].

1. Ф е л ь д м а н Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М., 1982. 2. Х о л я в к а Я.М. Приближение чисел, связанных с эллиптическими функциями. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4886-В87.

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 539.377

І.М.Махоркін, А.П.Сеник

РОЗВ"ЯЗОК НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ЙОГО НАГРІВАННІ НОРМАЛЬНО-РОЗПОДІЛЕНИМ ПОТОКОМ ЕНЕРГІЇ

Нехай маємо нелінійне рівняння теплопровідності

$$r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial r}\right] + r^{-2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right] \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = C_v(t)\frac{\partial t}{\partial\tau} \qquad /1/$$

і умови

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial r}\Big|_{r=b} = q\gamma(t_c)e^{-k[b^2\sin^2\varphi + z^2]}\cos\varphi\cdot S_+[\cos\varphi]\cdot S_+(\tau); \qquad /2/$$

$$\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{|z|\to\infty} = t\Big|_{|z|\to\infty} = 0, \quad t\Big|_{r=0} \neq \infty \qquad /3/$$

$$t\big|_{\tau=0} = 0. \qquad /4/$$

Якщо під $\lambda(t)$, $C_v(t)$, $\gamma(t)$ розуміються температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності, об"ємної теплоємності та поглинання матеріалу відповідно; q – густини потужності потоку енергії на його осі; K – коефіцієнт зосередженості потоку; b – радіус граничної поверхні циліндричного тіла;

12-2498

$t_c(\tau) = t(r=b, z=0, \varphi=0)$ – температура поверхні тіла на осі теплового потоку;

$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – асиметрична одинична функція Хеві - сайда,

то крайова задача /1/-/4/ описує процес нагріву термочутливого /теплофізичні характеристики матеріалу залежать від температури/ довгого кругового циліндра концентрованим потоком енергії /зокрема, випромінюванням оптичного квантового генератора [5]/.

Відомо, що для широкого класу матеріалів та їх сплавів залежність коефіцієнтів теплопровідності та об"емної теплоемності від температури мають однаковий характер [3], тобто

$$a = \lambda(t)/C_v(t) \approx const,$$

а значення коефіцієнта поглинання зростає з ростом температури [4].

У такому випадку:

1/ скориставшись апроксимацією температурних залежностей теплофізичних характеристик кусково-постійними функціями температури виду

$$p(t) = p_1 + \sum_{m=1}^{n} (p_{m+1} - p_m) S_+(t - t_m), \qquad 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m, \qquad /5/$$

де значення $p_m = const$ в інтервалі температур $t_{m-1} < t \leq t_m$ з заданою точністю відповідає значенню конкретної теплофізичної характеристики, t_m – вузли апроксимації;

2/ ввівши в розгляд змінну Кірхгофа

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t \lambda(x)\, dx, \qquad /6/$$

де λ_0 – опорне значення коефіцієнта теплопровідності, та взявши до уваги [2], що при $\frac{\partial f}{\partial \xi} > 0$

$$S_+[f(\xi)] = S_+(\xi - \xi_n), \qquad /7/$$

де ξ_n – корінь рівняння $f(\xi) = 0$, розв"язок крайової задачі /1/-/4/ зводиться до знаходження розв"язку такої задачі:

$$t(\vartheta) = \Big\{\lambda_0 \vartheta + \sum_{m=1}^{M} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\, t_m\, S_+(\vartheta - \vartheta_m)\Big\} \times$$
$$\times \Big\{\frac{1}{\lambda_1} + \sum_{m=1}^{M} \Big(\frac{1}{\lambda_{m+1}} - \frac{1}{\lambda_m}\Big) S_+(\vartheta - \vartheta_m)\Big\}; \qquad /8/$$

$$r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v}{\partial r}\right]+r^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \tau}; \qquad /9/$$

$$\lambda_0\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=b}=q[\gamma_1+\sum_{n=1}^{N-1}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)S_+(\tau-\tau_n)]\times$$

$$\times\exp[-K(b^2\sin^2\varphi+z^2)]\cos\varphi\, S_+(\cos\varphi)S_+(\tau); \qquad /10/$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{|z|\to\infty}=v\Big|_{|z|\to\infty}=0, \quad v\Big|_{r=0}\neq\infty; \qquad /11/$$

$$v\big|_{\tau=0}=0, \qquad /12/$$

де $\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{N-1}<\tau_N$, $\tau_0=0$, $\tau_N=\infty$; τ_i $i=\overline{1,N-1}$ прості корені системи трансцедентних алгебраїчних рівнянь

$$v_c(\tau)-v_m=0, \quad m=\overline{1,M}, \quad N-1\leq M,$$

$$v_m=v(t_m), \quad v_c=v(t_c). \qquad /13/$$

Використавши інтегральні перетворення Фур"є по кутовій координаті φ і аксіальній координаті z, а також інтегральні перетворення Лапласа по часу τ [1], розв"язок крайової задачі /9/-/12/ знайдемо у вигляді

$$v=\frac{q}{\lambda_0\sqrt{\pi K}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon(j)a_j\gamma_n\cos j\varphi\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{\eta^2}{4K}\right)\cos\eta z\left\{V_j(\eta)\times\right.$$

$$\times[S_+(\tau-\tau_{n-1})-S_+(\tau-\tau_n)]+\sum_{p=0}^{\infty}U_{jp}\frac{\exp[-a\tau(\eta^2+\mu_{jp}^2)]}{\eta^2+\mu_{jp}^2}\times$$

$$\left.\times[e^{a\tau_{n-1}(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau-\tau_{n-1})-e^{a\tau_n(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau-\tau_n)]\right\}d\eta, \qquad /14/$$

де $\varepsilon(j)=\begin{cases}1, & j\geq 1\\ 0{,}5, & j=0;\end{cases}$

$$a_j=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-Kb^2\sin^2\alpha}\cos\alpha\cos j\alpha\, d\alpha;$$

$$V_j(\eta)=\frac{I_j(\eta r)}{\frac{j}{b}I_j(\eta b)+\eta I_{j+1}(\eta b)}; \quad U_{jp}=\frac{2\mu_{jp}J_j(r\mu_{jp})}{(j^2/b\mu_{jp}-b\mu_{jp})J_j(b\mu_{jp})},$$

$I_j(x)$, $J_j(x)$ – функції Бесселя; μ_{jp} – додатні корені рівняння

$\frac{j}{b}J_j(b\mu_{jp})-\mu_{jp}J_{j+1}(b\mu_{jp})=0$; τ_n – прості корені системи рівнянь

$$\frac{q}{\sqrt{\pi k}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{i}\varepsilon(j)a_j\gamma_n\cos j\varphi\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta^2}{4k}\right)\cos\eta z\left\{V_j(\eta)\times\right.$$

$$\times\left[S_+(\tau_i-\tau_{n-1})-S_+(\tau_i-\tau_n)\right]+\sum_{p=1}^{\infty}u_{jp}\frac{\exp[-a\tau_i(\eta^2+\mu_{jp}^2)]}{\eta^2+\mu_{jp}^2}\times$$

$$\left.\times\left[e^{a\tau_{n-1}(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau_i-\tau_{n-1})-e^{a\tau_n(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau_i-\tau_n)\right]\right\}d\eta=$$

$$=\lambda_1 t_1+\sum_{m=1}^{i}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(t_i-t_n)S_+(\tau_i-\tau_n);\quad i=\overline{1,M} \qquad /15/$$

$(N-1)$ – число простих коренів системи /15/.

1. Г а л и ц и н А.С., Ж у к о в с к и й А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. К., 1976. 2. К о л я н о Ю.М., К у л и к А.Н. Температурні напруження від об"емних джерел. К., 1983. 3. П і д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., 1972. 4. Р ы к а л и н Н.Н., У г л о в А.А., С м у р о в И.Ю. Расчет нелинейных задач лазерного нагрева металлов // Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы. М., 1985. 5. Р ы к а л и н Н.Н., У г л о в А.А., К о к о р а А.Н. Лазерная обработка материалов. М., 1975.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.89

УДК 517.944:947

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко, Басьюні Халіль

ОДИН ВАР'АНТ ПОБУДОВИ ПОЧАТКОВОЇ ВИЛКИ ДЛЯ ЗАДАЧІ КОШІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Проблема початкової вилки е центральною в методі С.О.Чаплигіна інтегрування звичайних диференціальних рівнянь [1,2]. Нижче пропонується метод її побудови, заснований на використанні диференціальних рівнянь, близьких до вихідного у певному сенсі.

Нехай в обмеженій області $D\subset R^2$ потрібно знайти розв"язок задачі Коші

$$y' = f(x,y); \qquad /1/$$