УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІЧНО ЛОГІСТИЧНОГО РОЗПОДІЛУ

У праці [1, с.321-334] теоретично пояснено спадання інтенсивності відмов. Розподілом зі спадною інтенсивністю відмов є, наприклад, розподіл Парето [2]. Розглянемо деякі властивості одного розподілу, що залежно від параметра має або спадну інтенсивність відмов, або спершу зростаючу, а згодом спадну.

<u>Означення</u>. Випадкова змінна $L\Lambda(\sigma,\nu)$ називається логарифмічно логістичною, якщо її функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F(t)=P\{L\Lambda(\sigma,\nu)\le t\}=1-\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0), \qquad /1/$$

де σ – параметр масштабу; ν – параметр форми. Звідси густина розподілу ймовірностей

$$f(t)=F'(t)=\frac{\nu t^{\nu-1}}{\sigma^{\nu}\left[1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}\right]^{2}},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0). \qquad /2/$$

<u>Інтенсивність відмов</u>. Якщо розподіл /1/ описує напрацювання технічної одиниці до відмови, то інтенсивність відмов

$$h(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{\nu t^{\nu-1}}{\sigma^{\nu}\left[1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}\right]},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>1). \qquad /3/$$

При $\nu\le 1$ інтенсивність відмов /3/ – спадна функція, а при $\nu>1$ має єдиний максимум у точці $t=\sigma(\nu-1)^{1/\nu}$. Максимальне значення інтенсивності відмов $\sigma^{-1}(\nu-1)^{1-\frac{1}{\nu}}$, $\nu>1$.

<u>Середнє напрацювання і тантиль</u>. Сподіване напрацювання технічної одиниці до відмови

$$EL\Lambda(\sigma,\nu)=\int_0^{\infty}[1-F(t)]dt=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}}=\sigma\frac{\frac{\pi}{\nu}}{\sin\frac{\pi}{\nu}},\ (\sigma>0,\ \nu>1). \qquad /4/$$

Рівняння тантилів [3]

$$\int_0^{\tau_\omega}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}}=\omega\int_{\tau_\omega}^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}},\quad (\nu>1,\ \omega>0),$$

набуває вигляду

$$\int_0^{\tau_\omega} \frac{dx}{1+x^\nu} = \frac{\frac{\pi}{\nu}}{\sin\frac{\pi}{\nu}} \cdot \frac{\omega}{1+\omega}, \quad (\nu>1,\ \omega>0). \qquad /5/$$

Зокрема, при $\nu=2$ дістаємо $\tau_\omega = \sigma\, tg\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\omega}{1+\omega}\right)$, і медіанний тантиль $\tau_1 = \sigma$.

Відбиття та моменти. За означенням, відбиття випадкової змінної з густиною /2/

$$M(z) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t)dt = \sigma^{z-1}\Gamma\left(1+\frac{z-1}{\nu}\right)\Gamma\left(1-\frac{z-1}{\nu}\right) =$$

$$= \sigma^{z-1}\frac{\frac{\pi}{\nu}(z-1)}{\sin\left[\frac{\pi}{\nu}(z-1)\right]},\ 1-\nu < Re z < 1+\nu,\ \nu>0. \qquad /6/$$

Звідси початковий момент m_j порядку j, якщо він існує

$$m_j = M(j+1) = \sigma^j \frac{\frac{\pi}{\nu}j}{\sin\left(\frac{\pi}{\nu}j\right)},\ (j=1,2,\dots),\ j<\nu.$$

Отже, сподівання $EL\Lambda = m_1$, $\nu>1$; дисперсія $DL\Lambda(\sigma,\nu) = m_2 - m_1^2$, $\nu>2$; варіація

$$v = \frac{\sqrt{DL\Lambda(\sigma,\nu)}}{EL\Lambda(\sigma,\nu)} = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}\, tg\,\frac{\pi}{\nu} - 1},\ \nu>2.$$

Розщеплення на незалежні множники. Оскільки випадковий імпульс $\mathcal{J}(\sigma)$ в точці $\sigma>0$ має відбиття σ^{z-1}, випадкова змінна Гніденка-Вейбула $W(\sigma,\nu)$ з густиною

$$f(t) = \frac{\nu}{\sigma^\nu} t^{\nu-1} e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\nu},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0)$$

має відбиття

$$\int_0^\infty t^{z-1} f(t)dt = \sigma^{z-1}\Gamma\left(1+\frac{z-1}{\nu}\right),\ 1-\nu < Re z,\ \nu>0,$$

а випадкова змінна найбільшого значення другого типу $M_2(\sigma,\nu)$ з густиною

$$f(t) = \frac{\nu\sigma^\nu}{t^{\nu+1}} e^{-\left(\frac{\sigma}{t}\right)^\nu},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0)$$

має відбиття

$$\int_0^\infty t^{z-1} f(t)dt = \sigma^{z-1}\Gamma\left(1-\frac{z-1}{\nu}\right),\ Re z < 1+\nu,\ \nu>0,$$

то з виразу /6/ випливае, що логарифмічно логістична випадкова змінна розщеплюється на три незалежних множники

$$LA(\sigma,\nu) = J(\sigma)\cdot W(1,\nu)\cdot M_2(1,\nu). \qquad /7/$$

Оцінка параметрів. Нехай

$$t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_n - \qquad /8/$$

варіаційний ряд вибірки з популяції, що має функцію розподілу /I/. Потрібно оцінити невідомі параметри σ і ν.

Для точок /8/ знаходимо значення емпіричної функції розподілу за формулою

$$\hat F(t_j) = \frac{j-0{,}3}{n+0{,}4}, \qquad (j=1,\ldots,n).$$

З"еднуючи сусідні точки $(t_j, \hat F(t_j))$ відрізками, дістаемо графік емпіричної функції розподілу $\hat F(t)$, $t_1 \le t \le t_n$. Оскільки при $t=\sigma$ значення функції розподілу /I/ дорівнює половині, то за оцінку $\hat\sigma$ параметра масштабу приймаемо емпіричну медіану. Тепер оцінку $\hat\nu$ параметра форми знаходимо як розв"язок рівняння

$$\hat F(t_j) = 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{t_j}{\hat\sigma}\right)^{\nu}},$$

тобто

$$\hat\nu = \frac{\ln\frac{j-0{,}3}{n+0{,}7-j}}{\ln\frac{t_j}{\hat\sigma}}, \quad t_j \ne \hat\sigma. \qquad /9/$$

Для прикладу розглянем вибірку

2836 4699 6348 8657 I0000 I24I2 I5753 2I282 35254 /I0/

з популяції /I/.

Як бачимо, медіана вибірки /I0/ обсягу $n=9$ дорівнюе I0000. Отже, $\hat\sigma$ = I0000. Далі, наприклад, для j = 8, за формулою /9/

$$\hat\nu = \frac{\ln\frac{7{,}7}{1{,}7}}{\ln\frac{21282}{10000}} = 2.$$

Таким чином, залишається перевірити гіпотезу про те, що вибірка /I0/ взята з генеральної сукупності, керованої розподілом

$$F(t) = 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{t}{10000}\right)^2}, \quad t>0. \qquad /II/$$

Гіпотезу можна перевірити, наприклад, за допомогою критерію Андерсона-Дарлінга. Справді, за формулою $r_j = F(t_j)$, $(j=1,\ldots,9)$, де t_j дані в /I0/, а F - виразом /II/, дістаємо

$r_1 = 0,0744416$ $r_2 = 0,180869$ $r_3 = 0,2872269$
$r_4 = 0,3936279$ $r_5 = 0,5$ $r_6 = 0,6063886$
$r_7 = 0,7127732$ $r_8 = 0,8191431$ $r_9 = 0,9255312$

Статистика Андерсона-Дарлінга

$$A^2 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\ln[r_i(1-r_{n+1-i})] - n$$

у нашому випадку набуває значення

$$A^2 = -\frac{1}{9}\cdot(-81,88457)-9 = 0,098,$$

тобто менше, ніж критичне значення 2,492 на рівні значущості $\alpha = 0,05$. Отже, гіпотеза про те, що вибірка /10/ одержана з популяції /11/, приймається. Для популяції з розподілом /11/ інтенсивність відмов зростає від нуля при $t=0$ до 10^{-4} при $t = 10000$, а згодом спадає до нуля.

1. Барлоу Б., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М., 1969. 2. Квіт І.Д., Косарчин В.М. Про деякі властивості розподілу Парето // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 32. С.68-70. 3. Квіт І.Д. Тантиль // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С.33-35.

Стаття надійшла до редколегії 19.12.89