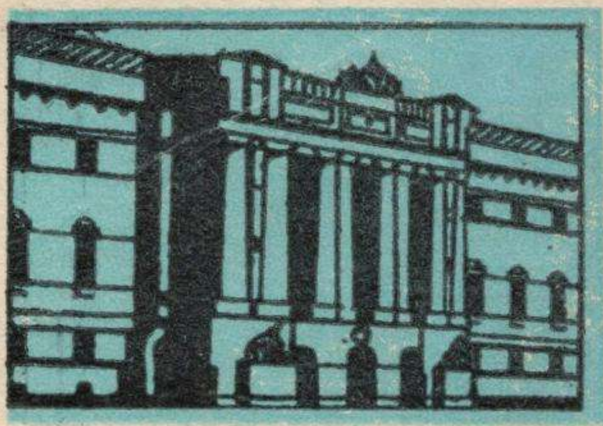
ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
34
1990



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
Виходить з 1965 р.
ВИПУСК 34

ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО «СВІТ»
1990

УДК 513

У Віснику містяться статті з теорії функцій, теорії чисел, алгебри, топології, механіки, диференціальних та інтегральних рівнянь і їх застосування.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

Бібліогр. в кінці статей.

В Вестнике помещены статьи по теории функций, теории чисел, алгебре, топологии, механике, дифференциальным и интегральным уравнениям и их применение.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Библиогр. в конце статей.

Адреса редколегії: 290000 Львів, вул. Університетська, 1. Університет, кафедра диференціальних рівнянь. Тел.79-45-93

Редакція науково-технічної та природничої літератури

Редактор Л.І.С і д л о в и ч

В $\frac{1602110000 - 033}{М225/04/ - 90}$ Замовне

УДК 517.946

М.І.Бадзо, Н.В.Васильева, М.І.Іванчов

ДЕЯКІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯМ

У статті встановлено умови існування і єдиності розв"язку обернених задач знаходження сталого коефіцієнта температуропровідності. Цим питанням присвячено ряд праць, бібліографія яких наведена, наприклад, у книзі О.М.Аліфанова, Є.А.Артюхіна, С.В.Румянцева "Екстремальні методи розв"язання некоректних задач" /М., 1988/.

В області $D_T = \{(x,t): 0<x<l, 0<t<T\}$ розглянемо рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad /1/$$

з невідомим коефіцієнтом температуропровідності, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l \qquad /2/$$

та крайовими умовами

$$\alpha_0 u(0,t) - \beta_0 u_x(0,t) = \mu(t); \qquad /3/$$

$$\alpha_1 u(l,t) + \beta_1 u_x(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad /4/$$

де α_i, β_i приймають значення 0 або 1, причому $\alpha_i + \beta_i = 1, (i=0,1)$.

Умову перевизначення задамо у вигляді

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\beta_0 u(0,t) + \alpha_0 u_x(0,t))dt = \varkappa. \qquad /5/$$

Під розв"язком задачі /1/-/5/ будемо розуміти пару $\{a, u(x,t)\}$, де a - додатна стала, $u(x,t)$ - класичний розв"язок відповідної крайової задачі.

<u>Теорема 1</u>. Задача /1/-/5/ має принаймні один розв"язок $\{a, u(x,t)\}$, якщо виконуються умови:

1/ функції $\varphi(x), 0 \le x \le l, \mu(t), \nu(t), 0 \le t \le T$ неперервні і при $\alpha_0 = 1$ $\varphi(0) = \mu(0)$, при $\alpha_1 = 1$ $\varphi(l) = \nu(0)$;

2/ при $\beta_0 = 0$

$$\int_0^T \frac{\mu(0) - \mu(t)}{\sqrt{T-t}} dt \int_0^T ((\alpha_1 h + \beta_1)\varkappa + \alpha_1 \mu(t) - \nu(t))dt > 0; \qquad /6/$$

при $\alpha_0 = 0$

$$(\varkappa - \varphi(0)) \int_0^T (\alpha_1 + \beta_1 (T-t))((\alpha_1 h + \beta_1)\mu(t) + \vartheta(t) - \alpha_1 \varkappa)\, dt > 0. \qquad /7/$$

<u>Доведення</u>. Розглянемо, наприклад, випадок $\beta_0 = \alpha_1 = 0$. Припускаючи a відомим і використовуючи функцію Гріна для представлення розв"язку задачі /I/-/4/, з умови /5/ отримуємо рівняння для знаходження невідомого коефіцієнта температуропровідності

$$a = \Phi(a), \qquad /8/$$

де

$$\Phi(a) = \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}\int_0^T (\varkappa - \vartheta(\tau))\, d\tau} \int_0^T \frac{d\tau}{(T-\tau)^{3/2}} \int_0^h \psi(\xi, \tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\xi + 2nh) \times$$

$$\times e^{-\frac{(\xi + 2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}} d\xi; \quad \psi(\xi, \tau) = \varphi(\xi) - \mu(\tau) - \xi \vartheta(\tau). \qquad /9/$$

Враховуючи обмеженість функції $\Phi(a)$, приходимо до висновку, що розв"язок рівняння /8/ існує, якщо

$$\Phi(0) > 0. \qquad /10/$$

Підставляючи вираз /9/ в /10/, приходимо до умови /6/ у випадку $\alpha_1 = 0$. Всі інші випадки досліджуються аналогічно.

<u>Теорема 2.</u> Розв"язок задачі /I/-/5/ единий, якщо в області D_T функції $\varphi(x), \varphi'(x), \mu(t), \vartheta(t)$ неперервні і виконуються умови:

I/ при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$

$$(\varphi(h) - \vartheta(t)) \int_0^T (h\varkappa + \mu(t) - \vartheta(t))\, dt \geq 0,$$

$$(h\varphi'(x) + \mu(t) - \vartheta(t)) \int_0^T (h\varkappa + \mu(t) - \vartheta(t))\, dt \leq 0;$$

2/ при $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0$

$$(\varphi(h) - \mu(t) - h\vartheta(t)) \int_0^T (\varkappa - \vartheta(t))\, dt \geq 0,$$

$$(\varphi'(x) - \vartheta(t)) \int_0^T (\varkappa - \vartheta(t))\, dt \leq 0;$$

3/ при $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$

$$\left(\varkappa - \varphi(h) + \frac{h}{2}(\vartheta(t) - \mu(t))\right) \int_0^T (T-t)(\mu(t) + \vartheta(t))\, dt \geq 0,$$

$$(h\varphi'(x) + (h-x)\mu(t) - x\vartheta(t)) \int_0^T (T-t)(\mu(t) + \vartheta(t))\, dt \geq 0;$$

4/ при $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$

$$(\varphi(h) - \vartheta(t)) \int_0^T (\varkappa - h\mu(t) - \vartheta(t))\,dt \geq 0,$$

$$(\varphi'(x) + \mu(t)) \int_0^T (\varkappa - h\mu(t) - \vartheta(t))\,dt < 0.$$

Доведення. Розглянемо для прикладу наведений вище випадок $\beta_0 = \alpha_1 = 0$. Очевидно, що достатньо вимагати єдиності розв"язку рівняння /8/, яка гарантується умовою

$$\Phi'(a) < 1. \qquad /II/$$

Враховуючи вираз /9/, надамо нерівності /II/ вигляду

$$\frac{1}{\int_0^T (\varkappa - \vartheta(t))\,dt} \int_0^T \frac{d\tau}{(T-\tau)^{3/2}} \int_0^h \psi(\xi,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\xi + 2nh) \times$$

$$\times \left(\frac{(\xi+2nh)^2}{2a^2(T-\tau)} - 3 \right) e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}} d\xi < 0. \qquad /I2/$$

Для встановлення умов виконання нерівності /I2/ скористаємося лемою.

Лема. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ - неперервні на $[a, b]$ функції, $f(x)$ - неспадна, $f(b) \geq 0$, $g(a) < 0$. Якщо

$$\int_a^b g(x)\,dx < 0,$$

то

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx < 0.$$

Зауваження. Якщо $g(a) = 0$, то слід вимагати виконання умови $g'(a) < 0$ або $g(x) \leq 0$ на деякому проміжку $[a, a+\varepsilon]$.

Умову 2 теореми 2 отримуємо безпосереднім застосуванням леми до нерівності /I2/.

Умови єдиності розв"язку задачі /I/-/5/ можна одержати в іншому вигляді. Покажемо це у випадку $\beta_0 = \alpha_1 = 0$.

Зауважуючи, що

$$\frac{1}{(T-\tau)^{3/2}} \left(\frac{(\xi+2nh)^3}{2a^2(T-\tau)} - 3(\xi+2nh) \right) e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}} =$$

$$= 4a^2(T-\tau)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{T-\tau}}\, e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}}\right),$$

та інтегруючи в /12/ по частинах, зведемо умову єдиності розв"язку рівняння /8/ до вигляду

$$\frac{1}{\int_0^T(\varkappa-\vartheta(\tau))d\tau}\left(\int_0^T h(T-\tau)(\varphi(0)-\mu(\tau))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2h^2}{a^2(T-\tau)}}\times\right.$$

$$\times\frac{d\tau}{\sqrt{T-\tau}}+\sqrt{T}\int_0^h(\varphi'(\xi)-\vartheta(0))\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2T}}d\xi+$$

$$\left.+\int_0^T\frac{d\tau}{\sqrt{T-\tau}}\int_0^h\frac{\partial}{\partial\tau}\left((T-\tau)(\varphi'(\xi)-\vartheta(\tau))\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{(\xi+2nh)^2}{4a^2(T-\tau)}}d\xi\right)<0. \qquad /13/$$

Звідси легко отримати умови єдиності розв"язку у випадку $\beta_0=\alpha_1=0$. Аналогічно досліджуються випадки інших крайових умов.

<u>Теорема 3</u>. При неперервних функціях $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \mu(t), \mu'(t), \vartheta(t), \vartheta'(t)$ задача /1/-/5/ не може мати більше одного розв"язку, якщо в області $\bar{D}_T$ виконуються умови:

1/ при $\alpha_0=\alpha_1=1$

$$\int_0^T(h\varkappa+\mu(\tau)-\vartheta(\tau))d\tau>0, \qquad \varphi''(x)\le 0,$$

$$((T-t)\mu(t))'\ge 0, \quad ((T-t)(\vartheta(t)-\mu(t)))'\le 0;$$

2/ при $\alpha_0=1,\ \alpha_1=0$

$$\int_0^T(\varkappa-\vartheta(\tau))d\tau>0, \qquad \varphi''(x)\le 0,$$

$$((T-t)(\mu(t)-\mu(0)))'\ge 0, \ \frac{\partial}{\partial t}((T-t)(\varphi'(x)-\vartheta(t)))\le 0;$$

3/ при $\alpha_0=\alpha_1=0$

$$\int_0^T(T-\tau)(\mu(\tau)+\vartheta(\tau))d\tau>0, \ x\vartheta'(t)-(2h-x)\mu'(t)\le 0,$$

$$h(\varkappa-\varphi(x))-x\left(h-\frac{x}{2}\right)\mu(t)+\frac{x^2}{2}\vartheta(t)\ge 0;$$

4/ при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$

$$\int_0^T (x - h\mu(\tau) - \vartheta(\tau))\,d\tau > 0,$$

$$\mu'(t) \le 0, \quad \vartheta'(t) \le 0, \quad \varphi''(x) \le 0.$$

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89

УДК 517.946

М.І.Іванчов, І.Я.Лучко

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $D_T = \{(x,t): 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ для рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} + b u_x \qquad /1/$$

/ a, b - сталі/ з умовами

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x < \infty, \qquad /2/$$

$$-u_x(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T \qquad /3/$$

розглянемо такі задачі:

/A/ знайти коефіцієнт a при умові

$$u(0,t_0) = \vartheta_0, \quad 0 < t_0 \le T; \qquad /4/$$

/B/ знайти коефіцієнт b при умові /4/;

/AB/ знайти обидва коефіцієнти a і b, якщо виконуться умова /4/ та умова

$$u(0,t_1) = \vartheta_1, \quad 0 < t_0 < t_1 \le T. \qquad /5/,$$

Припустимо, що функції $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ та $(x\varphi'(x))'$ є неперервними і обмеженими при $0 \le x < \infty$, $\mu(t)$- неперервна при $0 \le t \le T$, причому

$$-\mu(0) = \varphi'(0). \qquad /6/$$

Для встановлення умов існування і єдиності розв"язку задач /А/ і /В/ використаємо представлення розв"язку прямої задачі /1/-/3/ за допомогою функції Гріна*. Підставивши це представлення в умову /4/, отримаємо рівняння

$$\Phi(a,b) = 1, \qquad /7/$$

де

$$\Phi(a,b) = \frac{1}{\vartheta_0}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{b\sqrt{t_0}}{2a}}^{\infty}\varphi(bt_0+2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\frac{b^2(t_0-\tau)}{4a^2}}d\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{b}{a^2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{b\eta}{a^2}}d\eta\int_{\frac{\eta-bt_0}{2a\sqrt{t_0}}}^{\infty}\varphi(bt_0-\eta+2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz - \frac{b}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\frac{b\sqrt{t_0-\tau}}{2a}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right).$$

Досліджуючи поведінку $\Phi(a,b)$ при $a \to 0$ та $a \to \infty$, приходимо до висновку, що задача /А/ має розв"язок, якщо виконуються умови

$$\left(\varphi(bt_0) - \vartheta_0\right)\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau < 0 \qquad \text{при} \quad b \geq 0, \qquad /8/$$

$$\left(\varphi(0) - \vartheta_0 - b\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\right)\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau < 0 \qquad \text{при} \quad b < 0. \qquad /9/$$

Знайшовши, що

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{1}{\vartheta_0\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\frac{b^2(t_0-\tau)}{4a^2}}d\tau + \frac{2}{a}\int_0^{\infty}\left(\xi\varphi'(\xi)\right)'e^{\frac{b\xi}{a^2}}d\xi\int_{\frac{\xi+bt_0}{2a\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right),$$

отримуємо умову єдиності розв"язку задачі /А/:

$$\mu(t)\left(x\varphi'(x)\right)' \geq 0 \qquad \text{при} \quad 0 \leq x < \infty, \ 0 \leq t \leq T. \qquad /10/$$

Досліджуючи аналогічно поведінку функції $\Phi(a,b)$ при $b \to -\infty$ і $b \to +\infty$, знаходимо умови існування розв"язку задачі /В/:

$$\left(\lim_{x\to\infty}\varphi(x) - \vartheta_0\right)\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau < 0. \qquad /11/$$

---

* Положій Г.М. Рівняння математичної фізики. К., 1959.

Відзначимо, що при цьому можна встановити умови, при яких задача /В/ буде мати додатний або від"ємний розв"язок. Так, якщо виконується умова

$$\left(\vartheta_0-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz\right)\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau>0, \qquad /12/$$

то задача /В/ має від"ємний розв"язок, якщо ж має місце умова

$$\left(\vartheta_0-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}d\tau-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(2az\sqrt{t_0})e^{-z^2}dz\right)\left(\lim_{x\to\infty}\varphi(x)-\vartheta_0\right)>0, \qquad /13/$$

то існує додатний розв"язок задачі /В/. Звідси випливає, зокрема, що задача /В/ має два розв"язки - додатний і від"ємний, якщо виконуються одночасно умови /12/ і /13/.

Для встановлення умов єдиності розв"язку задачі /В/ знайдемо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{1}{\vartheta_0\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\xi\varphi'(\xi)e^{\frac{b\xi}{a^2}}d\xi\int_{\frac{\xi+bt_0}{2a\sqrt{t_0}}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\frac{b\sqrt{t_0-\tau}}{2a}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right). \qquad /14/$$

З рівняння випливає, що умова

$$\mu(t)\,\varphi'(x)\leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad 0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x<\infty \qquad /15/$$

забезпечує єдиність розв"язку задачі /В/.

Перейдемо до задачі /АВ/. Припускаючи, що $\varphi(x)\equiv 0$, і підставляючи розв"язок задачі /1/-/3/ в умови /4/ і /5/, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих a і β, де $\beta=\frac{b}{2a}$:

$$\begin{cases}\vartheta_0=\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\beta^2(t_0-\tau)}d\tau-2\beta\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right),\\[2ex] \vartheta_1=\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\left(\displaystyle\int_0^{t_1}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}e^{-\beta^2(t_1-\tau)}d\tau-2\beta\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\right).\end{cases} \qquad /16/$$

Виключаючи звідси a , приходимо до рівняння

$$\mathcal{F}(\beta)=0, \qquad /17/$$

2-2498

де

$$\mathcal{F}(\beta)=2\beta^2\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\vartheta_1\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\Big)-$$

$$-\beta\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}e^{-\beta^2(t_1-\tau)}d\tau-\vartheta_1\int_0^{t_0}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}}e^{-\beta^2(t_0-\tau)}d\tau\Big). \qquad /18/$$

Досліджуючи аналогічно до попереднього рівняння /17/, знаходимо, що умова існування розв"язку задачі /AB/ має вигляд

$$\big(\vartheta_0\mu(t_1)-\vartheta_1\mu(t_0)\big)\Big(\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau-\vartheta_1\int_0^{t_0}\mu(\tau)d\tau\Big)>0, \qquad /19/$$

а умова єдиності – вигляд

$$\vartheta_0\int_0^{t_1}\mu(\tau)\,d\tau\int_{\beta\sqrt{t_1-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz-\vartheta_1\int_0^{t_1}\mu(\tau)d\tau\int_{\beta\sqrt{t_0-\tau}}^{\infty}e^{-z^2}dz\neq 0 \qquad /20/$$

при будь-якому дійсному β .

Із способу отримання умов існування і єдиності розв"язку задач /A/, /B/, /AB/ випливає такий висновок: вони майже необхідні у тому розумінні, що коли вони не виконуються, то знаходяться задачі, розв"язок яких не існує або не єдиний. Зауважимо також, що інші крайові задачі досліджуються аналогічно.

Стаття надійшла до редколегії 22.05.89

УДК 517.956

П.Я.Пукач

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Розглядається параболічне рівняння другого порядку

$$Lu\equiv p(x,t)u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}-c(x,t)u=f(x,t) \qquad /1/$$

$x=(x_1,\dots,x_n),(x,t)\in Q$, де $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, яка буде описана нижче. У праці [5] одержано умови існування та єдиності узагальненого розв"язку задачі Коші для рівняння /1/ у смузі $Q_T=\mathbb{R}^n\times[0,T]$ в деяких спеціальних класах функцій, що можуть певним чином зростати при $|x|\to\infty$. Для рівняння /1/ розглядається змішана задача в області Q у припущенні, що рівняння вироджується у всій площині задання початкової умови або на деякій її підмножині. Методи дослідження змішаної задачі для рівняння /1/ певним чином спираються на результати досліджень [1, 2, 7].

Опишемо область Q. Нехай Q обмежена нижньою основою $\Omega_0 \subset R^n$, верхньою основою $\Omega_T \subset R^n (T<\infty)$ та бічною поверхнею S. Позначатимемо $\Omega_\tau = Q \cap \{t=\tau\}$ та припускатимемо, що Ω_τ – зв"язна множина для довільного фіксованого τ. Через S_τ позначатимемо межу Ω_τ та припускатимемо надалі, що всяка поверхня S_t у довільній точці має дотичну площину в R^n. Нехай $\nu(\xi,t)$ одиничний вектор внутрішньої нормалі до S_t у точці $\xi \in S_t$. Локальними координатами в точці $\xi \in S_t$ назвемо прямокутну систему координат $\{y_1, \cdots, y_n\}$, так що вісь y_n напрямлена вздовж $\nu(\xi,t)$, а решта осі лежить у дотичній площині до S_t у точці ξ. Будемо вважати, що в околі довільної точки $(\xi,\tau) \in S$ ця поверхня задається рівнянням $y_n = F(y',t)$, де $\{y\}$ – локальні координати в точці ξ, $y' = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$. Припускатимемо, що $S \in C^{2,1}_{x\,t}$, тобто для довільної точки $(\xi,\tau) \in S: F(y',t) \in C^{2,1}_{y'\,t}(g_0)$ і норми $\|F\|_2^{g_0} = \left(\int_{g_0} |F|^2 dx\right)^{1/2}$ обмежені спільною константою. Тут g_0 – циліндрична область, у якій визначена функція $F(y',t)$.

Змішану задачу для рівняння /1/ в Q ставимо тепер так. Приймемо $A = \{x \in \Omega_0 : p(x,0) = 0\}$ та задамо початкову умову

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega_0 \setminus A. \qquad /2/$$

Крайова умова має вигляд

$$u(x,t)\Big|_S = 0. \qquad /3/$$

Ззовні області Q побудуємо східчасту область $Q^* \supset Q$, що складається з m циліндрів Q_k висотою $h = T/m$, накладених один на одного так, що $Q^* = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$. Позначимо: $\Omega_k = Q_k \cap Q_{k+1}$, $\Sigma_i = \Omega_{(i-1)h} \setminus \Omega_{i-1}$, $\Omega_{(i-1)h} = Q \cap \{t = (i-1)T/m\}$, $\Omega_{i-1} = Q_{i-1} \cap Q_i$.
Через Γ_k позначимо бічну поверхню циліндра Q_k. Нехай

$$\Gamma_k \in C^4_0. \qquad /4/$$

Вважатимемо надалі, що

1/ $p(x,t) \geq \nu_0 t^\theta$, $\nu_0 > 0$, $0 < \theta < 1$; /5/

2/ $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\xi_j \geq \nu \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \nu>0$ /6/

для майже всіх $(x,t)\in Q$ та довільного вектора $(\xi_1,\dots,\xi_n)$.
Припускатимемо, що функції $a_{ij},\ a_{ij_t},\ b_i$ – обмежені в Q, $i,j=\overline{1,n}$, причому

$\sup\limits_{Q}|a_{ij}|\le a,\ \sup\limits_{Q}|a_{ij_t}|\le a',\ \sup\limits_{Q}|b_i|\le b,$ /7/

$a>0,\ a'>0,\ b\ge 0$. Нехай, крім того,

$|a_{ij x_k}|\le \mu_0,\ k=\overline{1,n},\ \mu_0=const>0$ /8/

$|c_t|\le \varkappa t^{\theta-2},\ \varkappa=const>0.$ /9/

Введемо ще такі функції:

$\rho_1(t)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sup\limits_{Q_t}|b_{i_t}|\cdot t^{\frac{1-\theta}{2}},\ Q_t=\Omega_\tau\times(0,t),\ 0\le t\le T,\ 0\le\tau\le t,$

$\rho_2(t)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\left\{\sup\limits_{Q_t}(\rho_t+2c)t^{1-\theta},\ 0\right\},$

$\rho_3(t)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\left\{\sup\limits_{Q_t}(-\rho_t+2c)t^{1-\theta},\ 0\right\}.$

<u>Теорема I.</u>

Нехай мають місце умови /4/-/9/, $S\in C^{2,1}_{xt}$. Крім того,

1/ $\rho_1(t)\le M,\ M=const>0,$

2/ $\nu_1=\inf\limits_{0\le t\le T}\rho_2(t),\ \nu_1>0,$

3/ $\nu_2=\inf\limits_{0\le t\le T}\rho_3(t),\ \nu_2>0,$

4/ $\sup\limits_{0\le t\le T}\int\limits_{\Omega_t}\frac{f_t^2\,dx}{t^{\varkappa_0+\theta-1}}<+\infty,\ \varkappa_0=\left[\frac{\nu_2}{\nu_0}\right],$

5/ $\sup\limits_{0\le t\le T}\int\limits_{\Omega_t}\frac{f^2\,dx}{t^{\gamma_0+\varkappa_0+\theta+1}}<+\infty,\ \gamma_0=\left[\frac{\nu_1}{\nu_0}\right].$

6/ $f|_S=0.$

Тоді існує розв"язок задачі /I/-/3/, що належить $H^{2,1}(Q)$.
<u>Доведення</u> базується на тому, що будується область Q^*, описана вище, та розглядається змішана задача для рівняння /I/ в області $Q^*_{\varepsilon\tau}=\{(x,t)\in Q^*: 0<\varepsilon\le t\le\tau\le T\}$. Для цього коефіцієнти /I/ продовжуються в Q^* [4]. Функція f продовжується в Q^* нулем. Спираючись на результати роботи [6], будуємо розв"язок змішаної задачі в $Q^*_{\varepsilon,\tau}$. Далі отримуємо в Q^*_{ε,τ_0} оцінку такого виду:

$$\|u\|_{H^{1,1}(Q^*_{\varepsilon,\tau_0})}\le K_1\sup_{0\le t\le T}\int_{\Omega_t}\frac{f_t^2\,dx}{t^{\varkappa_0+\theta-1}}+K_2\sup_{0\le t\le T}\int_{\Omega_t}\frac{f^2\,dx}{t^{\gamma_0+\varkappa_0+\theta+1}},\ K_1,K_2>0 \quad /10/$$

Враховуючи працю [3] і умови теореми 1, одержуємо:

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q^*_{\varepsilon,\tau_0})} \le K, \; K>0.$$

Аналогічно одержуємо оцінку для норми u в $H^{2,1}(Q^*_{\tau_0,T})$, що не залежить від h. Отже, одержано послідовність $\{u_\varepsilon\}$ розв"язків змішаної задачі в $Q^*_{\varepsilon,T}$, залежних від ε. Прийнявши $u_\varepsilon = 0$ в $Q^*_{0,\varepsilon}$, отримаємо, що $\int\limits_Q f\cdot v\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{\varepsilon,T}} f\cdot v\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{0,\varepsilon}} f\cdot v\,dx\,dt$, $v\in \overset{1,0}{H}(Q)$.

Оскільки $\{u_\varepsilon\}$ - обмежена в Q послідовність, то з неї в Q можна виділити слабкозбіжну підпослідовність. Маємо

$$\int\limits_Q (Lu_\varepsilon - f)v\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{0,\varepsilon}} f\cdot v\,dx\,dt = 0.$$

При $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_Q (Lu-f)v\,dx\,dt = 0, \quad v\in \overset{1,0}{H}(Q).$$

При $h\to 0$ отримаємо, що $u/_S = 0$ /див. [4] /. Тобто $u\in H^{2,1}(Q)$ - розв"язок задачі /1/-/3/.

Зауваження 1.

Нехай $\sup\limits_Q |a_{ij}| \le a$, $\sup\limits_Q |a_{ij_t}| \le a'$, $a\ge 0$, $a'\ge 0$; /11/

$\rho_0(t) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{Q_t} |b_i| t^{-(\theta+1)/2}$, $0<t\le t_0$, $0<t_0\le T$; /12/

$|b_i| \le b$, $b>0$, $(x,t)\in Q_{t_0,T}$; /13/

b_{i_t} - обмежені, коли $(x,t)\in Q_{t_0,T}$. /14/

Теорема 1*.

Нехай $\theta\ge 1$, мають місце умови /4/-/6/, /11/-/14/, умови 2-6 теореми 1, $S\in C^{2,1}_{xt}$. Якщо

1/ $\lim\limits_{t\to 0} t\cdot\rho_0(t) = 0$,

2/ $\lim\limits_{t\to 0} \rho_1(t) = 0$,

то існує розв"язок задачі /1/-/3/, що належить простору $H^{2,1}(Q)$.

Теорема 2.

Нехай область Q така, що $\Omega_{t_1}\subset\Omega_{t_2}$, $t_2 > t_1$ і виконуються умови 1-5 теореми 1. Тоді існує розв"язок задачі /1/-/3/, що належить простору $H^{2,1}(Q)$.

Означення.

Функція $u(x,t)\in H^{1,1}(Q)$ називається узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/, якщо вона задовольняє умови /2/, /3/ та інтегральну тотожність

$$\iint_Q [\rho u_t v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v - cuv - fv] dxdt = 0$$

для довільної функції $v \in H^{1,0}(Q)$ такої, що $v|_S = 0$.

Теорема 3.

Припустимо, що, крім умов /5/, /6/, мають місце такі умови:

1/ $a \geq \sup_Q |a_{ij}|,\ i,j = \overline{1,n}$;

2/ $\nu_1 = \inf_{0 \leq t \leq T} \rho_2(t),\ \nu_1 > 0$;

3/ $\lim_{t \to 0} \rho_0(t) = 0,\ 0 \leq t \leq t_0,\ 0 < t_0 \leq T$. Крім того, $|b_i| \leq b,\ b > 0$, коли $(x,t) \in Q_{t_0,T}$;

4/ $\nu_1/\nu_0 < \theta$, де ν_0 визначається співвідношенням /5/.

Тоді задача /1/-/3/ має не більше одного узагальненого розв"язку в $H^{1,1}(Q)$.

Зауваження 2. Умова $c \leq 0$, що випливає з теореми 3, є "близькою до необхідної" для єдиності узагальненого розв"язку.

Приклад. Розглядається скалярне рівняння

$$t^{\theta} u_t - a^2 u_{xx} = cu,\quad \theta > 0,\ c = c(t) = t^{\theta - 1},\ Q -$$

прямокутник в $\mathbb{R}^2$. Розв"язок цього рівняння $u = L t e^{-\frac{\lambda a^2}{1-\theta} t^{1-\theta}} \cdot P(x)$, $L = const$, λ - власне число задачі Штурма-Ліувілля, $P(x)$ - розв"язок цієї задачі. Але $u = 0$ також є розв"язком рівняння. Отже, єдиності немає.

1. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математики, механики. 1971. № 2. С.29-35. 2. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих решений для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математики, механики. 1971. № 3. С. 3-9. 3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973. 4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976. 5. Пукач П.Я. Задача Коши для вырождающегося параболического уравнения второго порядка. Львов, 1988. Рукопись деп. в УКРНИИНТИ, № 64-Ук 89. 6. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т.83. 7. Carmela Vitanza. Sulla derivata frazionaria di ordine per le soluzioni dei sistemi parabolici degeneri di ordine superiore // Bol. Unione mat. ital. 1986. T. B5. N 1. P. 197-208.

Стаття надійшла до редколегії 22.05.89

УДК 517.946

В.Г.Костенко

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Досліджуємо задачу про знаходження функцій $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_2(t)$ з умов

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \ell_1 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \\ &\frac{1}{a_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \ell_2 \frac{\partial u_1}{\partial x}; \end{aligned} \qquad 0<x<h,\ t>-\infty \qquad /1/$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)u_2\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \\ &\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_1(t)u_1 + \beta_2(t)u_2\right)\Big|_{x=0} = \mu_2(t), \end{aligned} \qquad t>-\infty \qquad /2/$$

$$u_1(x,t)\big|_{x=h} = \nu_1(t), \quad u_2(x,t)\big|_{x=h} = \nu_2(t), \quad t>-\infty \qquad /3/$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=h} = \gamma_1(t), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=h} = \gamma_2(t). \quad t>-\infty \qquad /4/$$

Усі інші коефіцієнти та функції, що входять у вирази /1/-/4/, вважаємо заданими, аналітичними, причому a_1, a_2, ℓ_1, ℓ_2 - сталими. Для розв"язання сформульованої задачі використовуємо символічний метод*. Цим методом спочатку знайдемо в явному вигляді розв"язок задачі /1/, /3/, /4/, використавши який потім знайдемо $\alpha_1(t)$ і $\beta_2(t)$ із виразу /2/.

Застосуємо послідовно два рази інтегральний оператор

$$Jz = \int_h^x z(\alpha,t)\,d\alpha \qquad /5/$$

до системи рівнянь /1/ з урахуванням /3/, /4/ і введемо після цього другий оператор $B_1 z = J\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} Jz$. У результаті задача /1/, /3/, /4/ зведена до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\left(1-\frac{JB_1}{a_1}\right)u_1 + \ell_1 J u_2 = \nu_1(t) + J\left(\gamma_1(t) + \ell_1 \nu_2(t)\right), \\ &\ell_2 J u_1 + \left(1-\frac{JB_1}{a_2}\right)u_2 = \nu_2(t) + J\left(\gamma_2(t) + \ell_2 \nu_1(t)\right). \end{aligned} \qquad /6/$$

---

* Л е в и П. Конкретные проблемы функционального анализа. М., 1967.

Далі, формально замінюючи у виразі /6/ оператори B_1 , J параметрами λ_1 , λ_2 відповідно, одержуємо для нових невідомих функцій $\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2)$, $\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2)$ систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}\right)\bar{u}_1+\ell_1\lambda_2\bar{u}_2=\nu_1(t)+\lambda_2\left(\gamma_1(t)+\ell_1\nu_2(t)\right),\\ &\ell_2\lambda_2\bar{u}_1+\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)\bar{u}_2=\nu_2(t)+\lambda_2\left(\gamma_2(t)+\ell_2\nu_1(t)\right). \end{aligned} \qquad /7/$$

Легко бачити, що за достатньо малих по модулю λ_1 , λ_2 система /7/ має единий розв"язок

$$\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)\left[\lambda_2\left(\gamma_1(t)+\ell_1\nu_2(t)\right)+\nu_1(t)\right]-\ell_1\lambda_2\left[\lambda_2\left(\gamma_2(t)+\ell_2\nu_1(t)\right)+\nu_2(t)\right]}{1-\lambda_2\left[\frac{\lambda_1}{a_1a_2}\left(a_1+a_2-\lambda_1\lambda_2\right)+\ell_1\ell_2\lambda_1\lambda_2\right]},$$

$$\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}\right)\left[\lambda_2\left(\gamma_2(t)+\ell_2\nu_1(t)\right)+\nu_2(t)\right]-\ell_2\lambda_2\left[\lambda_2\left(\gamma_1(t)+\ell_1\nu_2(t)\right)+\nu_1(t)\right]}{1-\lambda_2\left[\frac{\lambda_1}{a_1a_2}\left(a_1+a_2-\lambda_1\lambda_2\right)+\ell_1\ell_2\lambda_1\lambda_2\right]} \qquad /8/$$

Формули обернення, що дають змогу по розв"язку /8/ системи /7/ знайти розв"язок задачі /I/, /3/, /4/, можна у цьому випадку зобразити у вигляді

$$u_1(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int\limits_{C_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\left\{\bar{u}_1\left(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)+\frac{1}{\lambda_2}\int\limits_h^x e^{\frac{\tau_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_1\left(t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)d\tau_1\right\},$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_2}\int\limits_{C_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\left\{\bar{u}_2\left(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)+\frac{1}{\lambda_2}\int\limits_h^x e^{\frac{\tau_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_2\left(t+\frac{x-\tau_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)d\tau_1\right\}, \qquad /9/$$

де C_1 , C_2 – кола достатньо малих радіусів з центрами у нулі і розміщені в комплексних площинах λ_1 , λ_2 . Враховуючи, що при цьому

$$\frac{1}{1-\lambda_2\left[\frac{\lambda_1}{a_1a_2}(a-\lambda_1\lambda_2)+\ell_1\ell_2\lambda_2\right]}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j C_n^i C_{n-i}^j\frac{a^{n-i-j}(\ell_1\ell_2)^i}{(a_1a_2)^{n-i}}\lambda_1^{n-i+j}\lambda_2^{n+i+j}, \qquad /10/$$

де $a=a_1+a_2$, а також використовуючи теорію лишків, перетворюємо вираз /9/ з урахуванням /8/, /10/ у степеневі ряди

$$u_1(x,t) = \nu_1(t) + \gamma_1(t)(x-h) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \nu_1^{(n-i+j)}(t) \frac{(x-h)^{2(n+j)}}{[2(n+j)]!} + \gamma_1^{(n-i+j)}(t) \frac{(x-h)^{2(n+j)+1}}{[2(n+j)+1]!} \right\} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \left(l_1 l_2 \nu_1^{(n-i+j)}(t) + \frac{1}{a_2} \nu_1^{(n-i+j+1)}(t) + l_1 \gamma_2^{(n-i+j)}(t) \right) \frac{(x-h)^{2(n+j+1)}}{[2(n+j+1)]!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_2} \left(l_1 \nu_2^{(n-i+j+1)}(t) + \gamma_1^{(n-i+j+1)}(t) \right) \frac{(x-h)^{2(n+j)+3}}{[2(n+j)+3]!} \right\},$$

$$u_2(x,t) = \nu_2(t) + \gamma_2(t)(x-h) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \nu_2^{(n-i+j)}(t) \frac{(x-h)^{2(n+j)}}{[2(n+j)]!} + \gamma_2^{(n-i+j)}(t) \frac{(x-h)^{2(n+j)+1}}{[2(n+j)+1]!} \right\} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j C_n^i C_{n-i}^j \frac{a^{n-i-j}(l_1 l_2)^i}{(a_1 a_2)^{n-i}} \left\{ \left(l_1 l_2 \nu_2^{(n-i+j)}(t) + \frac{1}{a_1} \nu_2^{(n-i+j+1)}(t) + \right. \right.$$

$$+ \left. l_2 \gamma_1^{(n-i+j)}(t) \right) \frac{(x-h)^{2(n+j+1)}}{[2(n+j+1)]!} + \frac{1}{a_1} \left(l_2 \nu_1^{(n-i+j+1)}(t) + \right.$$

$$\left. \left. + \gamma_2^{(n-i+j+1)}(t) \right) \frac{(x-h)^{2(n+j)+3}}{[2(n+j)+3]!} \right\}.$$

Безпосередньою перевіркою легко довести, що /II/ дійсно є розв"язком задачі /I/, /3/, /4/ і тим самим /9/ – формулами обернення застосованого тут символічного методу.

Тепер із виразу /II/ знаходимо $u_1(0,t)$, $u_2(0,t)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}$ і, користуючись ними, з виразу /2/ визначаємо $\alpha_1(t)$ і $\beta_2(t)$ формулами

3-2498

$$\alpha_1(t) = \frac{\mu_1(t) - \alpha_2(t)\,u_2(0,t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}}{u_1(0,t)},$$

$$\beta_2(t) = \frac{\mu_2(t) - \beta_1(t)\,u_1(0,t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}}{u_2(0,t)},$$

якщо $u_1(0,t);\ u_2(0,t) \neq 0$.

Стаття надійшла до редколегії 31.10.89

УДК 517.956

І.Я.Кміть

НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У ТРИВИМІРНИХ ОБЛАСТЯХ

Нелокальні задачі для гіперболічних систем зі змінними коефіцієнтами достатньою мірою розроблені лише у випадку двох незалежних змінних [1-4, 6]. Для більшої кількості незалежних змінних одержано ряд результатів тільки у випадку коефіцієнтів, які залежать лише від часу [5].

В області $\Omega = \{(x,y,t): 0<x<\ell, -\infty<y<+\infty, 0<t<T\}$ розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$u_{it} - \lambda_i(x,t)\,u_{ix} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,u_{jy} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\,u_j = F_i(x,y,t), \quad (i=\overline{1,n}) \qquad /1/$$

з початковими

$$u_i\Big|_{t=0} = \varphi_i(x,y), \quad (i=\overline{1,n}) \qquad /2/$$

та крайовими

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\,u_j\Big|_{x=0} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t)\,u_j\Big|_{x=\ell} = \gamma_i(y,t), \quad (i=\overline{1,n}) \qquad /3/$$

умовами. Будемо вважати, що в усій розглядуваній області система /1/ гіперболічна, тобто λ_i дійсні функції від x, t; усі $\lambda_i(x,t)$ різні і їх можна перенумерувати в порядку зростання: $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \ldots \leq \lambda_n$, $0 \leq k \leq n$. Припустимо, що функції $a_{ij}, b_{ij}, \lambda_i, F_i, \Phi_i, \gamma_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ відомі та неперервні по всіх своїх аргументах, а також неперервно диференційовані по x.

Введемо такі позначення:

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1k} & \beta_{1,k+1} \ldots \beta_{1n} \\ \alpha_{21} \ldots \alpha_{2k} & \beta_{2,k+1} \ldots \beta_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nk} & \beta_{n,k+1} \ldots \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \det \Gamma(t),$$

$$A(y) = \frac{1}{g(0)}\left[\frac{g'(0)}{g(0)}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ji}(0) - \sum_{j=1}^{n}\Gamma'_{ji}(0)\right] \times$$

$$\times\left[\gamma_j(y,0) - \sum_{s=k+1}^{n}\alpha_{js}(0)\Phi_s(0,y) - \sum_{s=1}^{k}\beta_{js}(0)\Phi_s(l,y)\right],$$

$$B(\rho)(x,y) = \sum_{s=k+1}^{n}\rho'_{js}(0)\,\Phi_s(0,y)\,\frac{1}{\lambda_i(x,0)} -$$

$$-\sum_{s=k+1}^{n}\rho_{js}(0)\,\Phi'_{sx}(0,y) + \sum_{s=k+1}^{n}\rho_{js}(0)\,F_s(0,y,0)\frac{1}{\lambda_i(x,0)} -$$

$$-\sum_{s=k+1}^{n}\rho_{js}(0)\,\frac{1}{\lambda_i(0,0)}\sum_{p=1}^{n}c_{sp}(x,0)\,\Phi_p(x,y),$$

$$C(x,y) = \frac{1}{\lambda_i(x,0)}\left[\Phi_i(x,y) - \sum_{j=1}^{n}c_{ij}(x,0)\Phi_j(x,y)\right],$$

$$v_s(x,t,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}u_s(x,y,t)e^{iy\sigma}dy,$$

$$f_s(x,t,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}F_s(x,y,t)e^{iy\sigma}dy,$$

$$\varphi_s(x,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_s(x,y)e^{iy\sigma}dy,$$

$$\rho_s(t,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_s(y,t)e^{iy\sigma}dy,$$

$$c_{sj}=b_{sj}-i\sigma a_{sj},$$

де Γ_{ji} $(j=\overline{1,k})$ – алгебраїчне доповнення елемента α_{ji} і Γ_{ji} $(j=\overline{k+1,n})$ – алгебраїчне доповнення елемента β_{ji} матриці Γ.

Теорема I. Якщо виконуються зроблені вище припущення та наступні умови:

1/ $\int_{-\infty}^{\infty}|F_i|dy<\infty, \int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_i|dy<\infty, \int_{-\infty}^{\infty}|\gamma_i|dy<\infty, \ i=\overline{1,n};$

2/ $\det\Gamma(t)\neq 0 \quad \forall t\in[0,T];$

3/ $$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\max_{s,x,t}|f_s|+\max_{s,x,t}|f'_{sx}|+|\sigma|\max_{s,x,t}|f_s|+$$
$$+\max_{s,x}|\varphi_s|+\max_{s,x}|\varphi'_{sx}|+|\sigma|\max_{s,x}|\varphi_s|+$$
$$+\max_{s,t}|\rho_s|+\max_{s,t}|\rho'_{st}|+|\sigma|\max_{s,t}|\rho_s|\Big)\times$$
$$\times e^{K(\max_{s,j,x,t}|b_{sj}|+|\sigma|\max_{s,j,x,t}|a_{sj}|)-iy\sigma}d\sigma<\infty,$$

де K – деяка константа, що не залежить від s,j,x,t;

4/ виконуються умови узгодженості:

а/ $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(0)\Phi_j(0,y)+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(0)\Phi_j(l,y)=\gamma_i(y,0)$ $(i=\overline{1,n}),$

б/ $\frac{1}{\lambda_i(0,0)}A(y)+\frac{1}{g(0)}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ji}(0)\Big[-\gamma'_{jt}(y,0)\frac{1}{\lambda_i(0,0)}+$

$$+ B(\alpha)(0,y) + B(\beta)(0,y)] + C(0,y) = \Phi'_{ix}(0,y)$$

$$(i=\overline{1,k}),$$

$$\frac{1}{\lambda_i(l,0)} A(y) + \frac{1}{g(0)} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ji}(0)\left[-\gamma'_{jt}(y,0)\frac{1}{\lambda_i(l,0)} +\right.$$

$$+ B(\alpha)(l,y) + B(\beta)(l,y)] + C(l,y) = \Phi'_{ix}(l,y), \ (i=\overline{k+1,n}),$$

то задача /I/-/3/ в області Ω має єдиний класичний розв"язок - такий, що $|U| \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0$.

<u>Доведення.</u> Основними етапами доведення є такі:
1/ застосовуючи до виразів /I/-/3/ перетворення Фур"є по y , приходимо до еквівалентної їй задачі:

$$V_{it} - \lambda_i V_{ix} + \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j = f_i, \ (i=\overline{1,n}), \qquad /1'/$$

$$V_i\Big|_{t=0} = \varphi_i(x,\sigma), \ (i=\overline{1,n}), \qquad /2'/$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t) V_j\Big|_{x=0} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t) V_j\Big|_{x=l} = \rho_i(t,\sigma), \ (i=\overline{1,n}); \qquad /3'/$$

2/ використовуючи метод характеристик, зводимо /1'/, /2'/, /3'/ до системи інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду;
3/ використовуємо метод послідовних наближень.

Справедлива аналогічна теорема в області

$$\Omega = \{(x,y,t):\ 0<x<l,\ 0<y<+\infty,\ 0<t<T\}.$$

Розглянемо задачу /I/-/3/ в області $\Omega_0 = \{(x,y,t):\ 0<x<l,\ 0<y<a,\ 0<t<T\}$ із збереженням усіх зроблених вище припущень.

Позначимо через

$$\bar{U}_s^{\,l} = \int_0^a U_s e^{i\frac{2\pi l y}{a}}\, dy,$$

$$\bar{f}_s^{\,l} = \int_0^a F_s e^{i\frac{2\pi l y}{a}}\, dy,$$

$$\bar{\varphi}_s^{\ell} = \int_0^a \Phi_s e^{i\frac{2\pi\ell y}{a}} dy,$$

$$\bar{p}_s^{\ell} = \int_0^a \gamma_s e^{i\frac{2\pi\ell y}{a}} dy.$$

Має місце така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються зроблені вище припущення і умови:

1/ функції F_i, Φ_i, γ_i мають лише скінченне число максимумів і мінімумів по y на $[0,a]$;

2/ $\det \Gamma(t) \neq 0, \forall t \in [0,T]$;

3/ $$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\max |\bar{f}_{ix}^{\ell\prime}| + \ell \max |\bar{f}_i^{\ell}| + \max_{i,x} |\bar{\varphi}_{i,x}^{\ell}| + \right.$$

$$\left. + \ell \max |\bar{\varphi}_i^{\ell}| + \max |\bar{p}_{it}^{\ell\prime}| + \ell \max |\bar{p}_i^{\ell}| \right) \times$$

$$\times e^{K(\max|b_{ij}| + \ell \max |a_{ij}|)} < \infty,$$

де K – деяка константа, що не залежить від i, x, t;

4/ виконуються умови узгодженості:

а/ $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(0)\, \Phi_j(0,y) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(0)\, \Phi_j(\ell,y) = \gamma_i(y,0) \quad (i=\overline{1,n}),$$

б/ $$\frac{1}{\lambda_i(0,0)} A(y) + \frac{1}{g(0)} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ji}(0) \left[\frac{-\gamma_{it}(y,0)}{\lambda_i(0,0)} + \right.$$

$$\left. + B(\alpha)(0,y) + B(\beta)(0,y) \right] + c(0,y) = \Phi'_{ix}(0,y), \quad (i=\overline{1,k}),$$

$$\frac{1}{\lambda_i(\ell,0)} A(y) + \frac{1}{g(0)} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ji}(0) \left[-\frac{\gamma_{jt}(y,0)}{\lambda_i(\ell,0)} + \right.$$

$$\left. + B(\alpha)(\ell,y) + B(\beta)(\ell,y) \right] + c(\ell,y) = \Phi'_{ix}(\ell,y), \quad (i=\overline{k+1,n}),$$

то задача /1/–/3/ в області Ω_0 має единий класичний розв"язок – такий, що

$$u(x,0,t) = u(x,a,t).$$

1. Мельник З.О. Об одной общей смешанной задаче // Докл. АН СССР. 1964. Т.157. № 5. С.1039-1042. 2. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и

систем на прямой //Укр. мат. журн. 1983. Т.35. № 6. С.722-727. 3.М е л ь н и к З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Диф. уравнения. 1985. Т.21. № 2. С.246-253. 4.Н а х у ш е в А.М. Нагруженные уравнения и их приложения //Диф. уравнения. 1983. Т.19. № 1. С.86-94. 5.П т а ш н и к Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 6.С т е п а н о в а Н.В. Математические модели непрерывной культуры микроорганизмов, распределенных по возрастам и размерам //Математические модели в экологии /Горьк. ун-т. Горький, 1980. С.95-113.

Стаття надійшла до редколегії 31.10.89

УДК 517.95

Г.-В.С.Гупало

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ СИСТЕМИ ТЕПЛОВОЛОГОПЕРЕНОСУ

Розглянемо задачу знаходження коефіцієнтів і функцій $\{A_1, A_2, A_3, A_4, T(x,t), W(x,t)\}$, що задовольняють умови

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = A_3 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - A_4 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}; \qquad x>0,\ 0<t\le T_0, \qquad /1/$$

$$T(x,0)=0,\ W(x,0)=0,\ x\geq 0; \qquad /2/$$

$$T(0,t)=\mu(t),\ W(0,t)=\bar\mu(t),\ 0\le t\le T_0 \qquad /3/$$

і додаткові умови вигляду

$$\frac{\partial T(0,t_0)}{\partial x}=\varkappa_0,\quad \frac{\partial W(0,t_0)}{\partial x}=\bar\varkappa_0,$$

$$\frac{\partial T(0,t_1)}{\partial x}=\varkappa_1,\quad \frac{\partial W(0,t_1)}{\partial x}=\bar\varkappa_1, \qquad 0<t_0<t_1<T_0. \qquad /4/$$

Тут $T(x,t)$, $W(x,t)$ – безрозмірні потенціали тепла і вологості. Коефіцієнти A_i, $i=\overline{1,4}$, які характеризують перенос субстанції /тепла і вологості/ [2, 3], вважатимемо сталими.

Припускаємо, що функції $\mu(t)$, $\bar\mu(t)$ і $\mu'(t)$, $\bar\mu'(t)$ неперервні на $[0,T_0]$, $\mu(0)=0, \bar\mu(0)=0, \varkappa_0, \bar\varkappa_0, \varkappa_1, \bar\varkappa_1$ - const.

Помножимо перше рівняння із виразу /I/ на деяку сталу p , а друге на q , додамо і отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(pT+qW)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(pA_1-qA_4)T+(qA_3-pA_2)W\right]. \qquad /5/$$

Співвідношення /5/ матиме форму рівняння теплопровідності стосовно $Z(x,t)=pT(x,t)+qW(x,t)$ при умові, що

$$\frac{pA_1-qA_4}{p}=\frac{qA_3-pA_2}{q}=a^2. \qquad /6/$$

Із виразу /6/ одержуємо для a рівняння

$$a^4-a^2(A_1+A_3)+A_1A_3+A_2A_4=0,$$

тобто

$$a_i^2=\frac{1}{2}\left[(A_1+A_3)+(-1)^i\sqrt{(A_1+A_3)^2-4(A_1A_3-A_2A_4)}\right],\ i=1,2. \qquad /7/$$

Кожному значенню a_i^2 / i = I,2/ будуть відповідати свої p_i і q_i . Отже, система /I/ з урахуванням виразів /5/-/7/ набуде вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_1(x,t)}{\partial t}&=a_1^2\frac{\partial^2 z_1(x,t)}{\partial x^2},\\ \frac{\partial z_2(x,t)}{\partial t}&=a_2^2\frac{\partial^2 z_2(x,t)}{\partial x^2};\end{aligned} \qquad /8/$$

$$z_i(x,t)=p_iT(x,t)+q_iW(x,t),\ i=1,2. \qquad /9/$$

Визначимо сталі p_i і q_i , i = I,2. Через те, що a_1^2 і a_2^2 зв"язані співвідношеннями

$$a_1^2+a_2^2=A_1+A_3,\quad a_1^2a_2^2=A_1A_3-A_2A_4, \qquad /10/$$

то два з чотирьох рівнянь /6/ повинні бути незалежними. Отже, дві сталі можемо вибрати довільно, візьмемо $p_1=q_2=1$, тоді з виразу /6/ матимемо

$$q_1=\frac{A_1-a_1^2}{A_4},\quad p_2=\frac{A_4}{A_1-a_2^2}. \qquad /11/$$

Виконавши такі ж перетворення з початковими, крайовими і додатковими умовами /2/-/4/, як з системою /I/ для функцій $z_i(x,t)$, i = I,2, отримаємо умови

$$z_i(x,0)=0,\ x\geq 0, \qquad /12/$$

$$z_i(0,t) = M_i(t), \quad 0 \le t \le T_0,$$

/13/

$$\frac{\partial z_i(0,t_0)}{\partial x} = K_i^0, \quad \frac{\partial z_i(0,t_1)}{\partial x} = K_i^1, \quad 0 < t_0 < t_1 < T_0.$$

/14/

Тут $M_i(t) = p_i \mu(t) + q_i \bar{\mu}(t), \; K_i^0 = p_i \varkappa_0 + q_i \bar{\varkappa}_0, \; K_i^1 = p_i \varkappa_1 + q_i \bar{\varkappa}_1.$

В результаті ми прийшли до обернених задач для рівняння типу теплопровідності для визначення $\{a_i, z_i(x,t)\}, \; i=1,2.$

Задача /8/, /12/-/14/ досліджена у праці [1], в якій встановлено необхідну умову існування коефіцієнта температуропровідності і отримано формули для знаходження a_i , $z_i(x,t)$. Використовуючи ці результати і вираз /10/, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення $a_i, \; i=1,2, \; A_i, \; i=\overline{1,4}$

$$\begin{cases} a_i = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi} K_i^0} \displaystyle\int_0^{t_0} \dfrac{M_i'(\tau)}{\sqrt{t_0-\tau}} d\tau, & i=1,2, \\ a_i = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi} K_i^1} \displaystyle\int_0^{t_1} \dfrac{M_i'(\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}} d\tau, \\ A_1 + A_3 = a_1^2 + a_2^2, \\ A_1 A_3 - A_2 A_4 = a_1^2 a_2^2. \end{cases}$$

/15/

Розв"язуючи систему /15/, знаходимо

$$a_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4(J_1\bar{J}_0 - J_0\bar{J}_1)(\varkappa_1\bar{\varkappa}_0 - \varkappa_0\bar{\varkappa}_1)}}{2(\varkappa_1\bar{\varkappa}_0 - \varkappa_0\bar{\varkappa}_1)},$$

$$A_1 = \frac{a_1^2(\bar{\varkappa}_0 a_1 - \bar{J}_0)(J_0 - a_2\varkappa_0) - a_2^2(\bar{\varkappa}_0 a_2 - \bar{J}_0)(J_0 - a_1\varkappa_0)}{(a_1 - a_2)(\bar{\varkappa}_0 J_0 - \varkappa_0 \bar{J}_0)},$$

$$A_4 = \frac{(A_1 - a_2^2)(\bar{\varkappa}_0 a_2 - \bar{J}_0)}{J_0 - a_2\varkappa_0},$$

/16/

$$A_3 = a_1^2 + a_2^2 - A_1, \quad A_2 = \frac{a_1^2 a_2^2 - A_1 A_3}{A_4},$$

де

$$J_j = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_j} \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{t_j-\tau}} d\tau, \quad \bar{J}_j = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_j} \frac{\bar{\mu}'(\tau)}{\sqrt{t_j-\tau}} d\tau, \quad j=0,1,$$

$$B = \varkappa_1\bar{J}_0 - \bar{\varkappa}_1 J_0 + \bar{\varkappa}_0 J_1 - \varkappa_0 \bar{J}_1.$$

4-2498

Тепер можемо знайти $z_i(x,t)$, $i=1,2$

$$z_i(x,t)=\frac{x}{2a_i\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{M_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a_i^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

І, врахувавши вирази /9/ і /11/, $T(x,t)$, $W(x,t)$,

$$T(x,t)=\frac{A_1-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\left[z_1(x,t)-\frac{A_1-a_1^2}{A_4}z_2(x,t)\right],$$

$$W(x,t)=\frac{A_1-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\left[z_2(x,t)-\frac{A_4}{A_1-a_2^2}z_1(x,t)\right]. \qquad /17/$$

Хоч вихідна система /1/ в результаті перетворень зводиться до системи двох незв"язних рівнянь типу теплопровідності, слід врахувати, що роль "потенціалу" тут відіграє функція $z_i(x,t)$, яка є лінійною комбінацією $T(x,t)$ і $W(x,t)$. Тому по П.С.Генрі [2] фізична інтерпретація розв"язків /17/ така: кожна температурна "хвиля" супроводжується дифузійною "хвилею", яка іде з тією ж швидкістю, пропорційною температурній "хвилі", і аналогічно дифузійна "хвиля" супроводжується додатковою температурною "хвилею".

1.Іванчов М.І. Про обернену задачу визначення коефіцієнта температуропровідності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. Вип. 30. С.13-16. 2.Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.; Л., 1963. 3.Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.89

УДК 517.956.25

Г.П.Лопушанська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ РОЗПОДІЛІВ

Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторах Соболєва розглядалась у праці [6], де отримані результати грунтувались на теоремах про гомеоморфізми [1]. У даній статті з області $\Omega\subset R^n$, обмеженій замкненою поверхнею класу C^∞ для квазілінійного еліптичного рівняння

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x)u = f(x,u) \qquad /1/$$

з нескінченно диференційованими коефіцієнтами $a(x) \leq 0$, досліджується задача Діріхле, коли на границі S задано довільний розподіл Шварца. Узагальнюється методика [3-5, 9] дослідження таких узагальнених крайових задач для лінійних однорідних рівнянь.

Далі вживаємо позначення $D(\bar{\Omega}) = C^{\infty}(\bar{\Omega}), D(S) = C^{\infty}(S)$, $D'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $D(S)$ /простір розподілів/, (φ, F) – дія $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$. Через $\rho(x) > 0$ позначимо нескінченно диференційовану і фінітну в Ω функцію, яка дорівнює нулеві на границі S, а в околі S має порядок $dist(x, S)$, через S_ε – паралельну до S поверхню, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, якщо $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x), x \in S$ і $\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі на S в точці x, вважатимемо $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$ для кожної $\varphi \in D(S)$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

<u>Постановка задачі.</u> Знайти двічі неперервно диференційований всередині області Ω розв"язок $u(x)$ рівняння /1/, який на S набуває узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$, тобто задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = (\varphi, F) \qquad \forall \varphi \in D(S). \qquad /2/$$

<u>Теорема 1.</u> Нехай $f(x,u)$ – неперервна функція, диференційована по u, $f_u \geq 0$, існує не більше одного розв"язку $u(x)$ задачі /1/-/2/ такого, що $\int_\Omega \rho^\alpha(x) |f(x, u(x))|\, dx < \infty$, $\alpha > 0$.

<u>Доведення.</u> Якщо $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два розв"язки задачі, $u = u_1 - u_2$, то

$$Lu(x) \equiv f(x, u_1(x)) - f(x, u_2(x)), \quad x \in \Omega \qquad /3/$$

і

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_S u(x + \varepsilon\nu(x))\varphi(x) J_\varepsilon(x)\, dS = 0 \qquad /4/$$

для кожної $\varphi \in D(S)$, де $J_\varepsilon(x)$ – якобіан перетворення $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$. Нехай $K(\xi, x)$ – функція Гріна задачі Діріхле для оператора L, Ω_ε – область, обмежена поверхнею S_ε, тоді всередині Ω_ε для $u(x)$ вірне представлення

$$u(x)=\int_{\Omega_\varepsilon}\mathcal{K}(\xi,x)[f(\xi,u_1(\xi))-f(\xi,u_2(\xi))]d\xi-\int_{S_\varepsilon}Q_\xi\mathcal{K}(\xi_\varepsilon,x)u(\xi_\varepsilon)dS_\xi, \quad x\in\Omega_\varepsilon, \qquad /5/$$

де $Q_\xi=\frac{\partial}{\partial N_\xi}-\sum_{i=1}^{n}a_i(\xi)\nu_i$, $\bar\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$, $\vec N$ – внутрішня конормаль для оператора L [8]. У виразі /5/ переходимо до границі, коли $\varepsilon\to 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}Q_\xi\mathcal{K}(\xi_\varepsilon,x)u(\xi_\varepsilon)dS_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S Q_\xi\mathcal{K}(\xi+\varepsilon\nu(\xi),x)J_\varepsilon(\xi)u(\xi+\varepsilon\nu(\xi))dS,$$

за лемою [2, с.95] останній вираз дорівнює

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x)u(\xi+\varepsilon\nu(\xi))J_\varepsilon(\xi)dS$, а згідно з рівністю /4/ – нулеві /тут $\varphi(\xi)=Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x)$ /. Тепер із рівності /5/, враховуючи умови теореми і властивості функції $\mathcal{K}(\xi,x)$, маємо

$$u(x)=\int_\Omega\mathcal{K}(\xi,x)[f(\xi,u_1(\xi))-f(\xi,u_2(\xi))]d\xi,\ x\in\Omega. \qquad /6/$$

Оскільки в наших припущеннях для рівняння /1/ діє принцип максимуму, то $\mathcal{K}(\xi,x)<0\ \forall\xi,x\in\Omega$, а тоді із виразу /6/ за теоремою про середнє маємо $u(x)=\int_\Omega\mathcal{K}(\xi,x)d\xi\,[f(\bar\xi,u_1(\bar\xi))-f(\bar\xi,u_2(\bar\xi))]$, $x\in\Omega$ або $u(x)=\int_\Omega\mathcal{K}(\xi,x)d\xi\, f_u(\bar\xi,\bar u(\bar\xi))u(\bar\xi)$, де $\bar\xi$ – деяка точка із Ω, $\bar u(\bar\xi)\in(u_i(\bar\xi),u_j(\bar\xi))$, $i,j=1,2$, $i\neq j$. Із останньої рівності /оскільки $f_u\geq 0$ / отримуємо, що $u(x)\equiv 0$, $x\in\Omega$.

Теорема 2. Нехай $F\in D'(S)$, $f(x,u)$ задовольняє умови теореми 1 і, крім того,

$$\sup_{\xi\in\Omega}\int\rho^k(x)|\mathcal{K}(\xi,x)|dx\,\rho^{-k}(\xi)f_u(\xi,u(\xi))<1,$$
$$u\in C^2(\Omega),\ \int_\Omega\rho^k(\xi)|u(\xi)|d\xi<\infty,\quad k>0, \qquad /7/$$

тоді існує єдиний розв"язок $u(x)$ задачі /1/-/2/, який задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$u(x)=\int_\Omega\mathcal{K}(\xi,x)f(\xi,u(\xi))d\xi-(Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x),F),\ x\in\Omega. \qquad /8/$$

Доведення. Використовуючи властивості функції Гріна, переконуємося, що інтегральне рівняння /8/ є еквівалентним задачі /1/-/2/. Із умови /7/ випливає існування розв"язку інтегрального рівняння /8/, яке можна знайти методом послідовних наближень

$$u_n(x)=\int_\Omega\mathcal{K}(\xi,x)f(\xi,u_{n-1}(\xi))d\xi-f_0(x),\ n=1,2,\dots,$$

де $f_0(x)=(Q_\xi\mathcal{K}(\xi,x),F)$, $u_0(x)$ – довільна гладка в Ω функція, наприклад $u_0(x)=-f_0(x)$.

Теорема 3. Для існування розв"язку задачі /1/-/2/ необхідно і досить, щоб існувало число $k>0$ таке, що

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{k}(x)|u(x)|dx + \int\limits_{\Omega} \rho(x)|f(x, u(x))|dx < \infty. \qquad /9/$$

Теорема доводиться за тією ж схемою, що аналогічна теорема [3] у випадку лінійного однорідного рівняння.

Зауваження. Число k зв"язане з порядком узагальненої функції F [2]. Якщо відомий порядок F, то виконання умов теорем 1,2 досить вимагати для довільної двічі неперервно диференційованої всередині області Ω функції $u(x)$, яка задовольняє /9/.

Теорема 4. Нехай $F \in D'(S)$, $f(x,u)$ - неперервна в $\Omega \times R^1$, диференційована по u функція, $f_u \geq 0$, для кожної двічі неперервно диференційованої всередині Ω функції $u(x)$, яка задовольняє умову /9/, існує $\int\limits_{\Omega} \omega(\xi,x) f(\xi, u(\xi)) d\xi \overset{df}{=} A_f(x,u)$ і виконується /7/ при заміні $\mathcal{X}(\xi,x)$ на $|\omega(\xi,x) - \int\limits_S B_\omega(t,x)\omega(\xi,t)dS_t|$, де $\omega(\xi, x)$ - фундаментальна функція оператора L, $B_\omega(t,x)$ - розв"язок інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \int\limits_S Q_t\, \omega(t,\xi)\varphi(\xi)dS_\xi = Q_t\, \omega(t,x), \quad t \in S, \; x \in \Omega.$$

Тоді існує єдиний розв"язок задачі /1/-/2/, і він задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$u(x) = A_f(x,u) - \int\limits_S B_\omega(t,x) A_f(t,u) dS_t + (B_\omega(t,x), F), \; x \in \Omega.$$

Теорема 5. Нехай $F \in D'(S)$, $f(x,u)$ задовольняє умови теорем 1,2. Двічі неперервно диференційована всередині Ω функція $u(x)$ є розв"язком задачі /1/-/2/ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє тотожність

$$\int\limits_{\Omega} L^{*}\psi(x)u(x)dx = \int\limits_{\Omega} \psi(x) f(x, u(x))dx - (Q\psi, F) \quad \forall \psi \in X(\bar{\Omega}), \qquad /10/$$

$$X(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in D(\bar{\Omega}) : \varphi|_S = 0, \; \exists k>0, \; L^{*}\varphi(x) = O(\rho^{k}(x)), \; x \to x_0 \in S\},$$

L^{*} - формально спряжений оператор до L.

Доведення. Нехай $u(x)$ - розв"язок задачі /1/-/2/. Із теореми 3 випливає існування $\int\limits_{\Omega} L^{*}\psi(x)u(x)dx$ для кожної $\psi \in X(\bar{\Omega})$. Підставляємо в ліву частину /10/ замість $u(x)$ вираз справа у /8/, маємо

$$\int_{\Omega} L^{*}\psi(x)u(x)dx = \int_{\Omega} L^{*}\psi(x)dx \int_{\Omega} \mathcal{K}(\xi,x)f(\xi,u(\xi))d\xi - \int_{\Omega} L^{*}\psi(x)(Q_{\xi}\mathcal{K}(\xi,x),F)dx =$$

$$= \int_{\Omega} f(\xi,u(\xi))d\xi \int_{\Omega} L^{*}\psi(x)\mathcal{K}(\xi,x)dx - \left(\int_{\Omega} L^{*}\psi(x)Q_{\xi}\mathcal{K}(\xi,x)dx, F\right)$$

А враховуючи властивості функції Гріна [5], прийдемо до правої частини /10/.

Нехай тепер $u(x)$ задовольняє тотожність /10/. Якщо взяти $\psi\in D(\Omega)$, то із /10/ отримаємо, що $u(x)$ – узагальнений розв"язок рівняння /1/, а, враховуючи гіпоеліптичність оператора L і умови на $f(x,u)$, дістаємо, що $u(x)$ – класичний розв"язок цього рівняння. Тепер для довільної $\psi\in X(\bar{\Omega})$ записуємо ліву частину /10/ як $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} L^{*}\psi(x)u(x)dx$ і перетворюємо за формулою Гріна для Ω_{ε}; враховуючи тотожність /10/, отримуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{\varepsilon}}\left(Q\psi(x_{\varepsilon})u(x_{\varepsilon})-\psi(x_{\varepsilon})\frac{\partial u(x_{\varepsilon})}{\partial \bar{N}}\right)dS_{\varepsilon}=(Q\psi,F)\quad \forall\psi\in X(\bar{\Omega}). \qquad /11/$$

За лемою [7] для кожної $\varphi\in D(S)$ існує $\psi\in X(\bar{\Omega})$ така, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} Q\psi(x_{\varepsilon})=\varphi(x)$ / $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(x_{\varepsilon})=0$ за означенням простору $X(\bar{\Omega})$/. Переходячи у лівій частині /11/ до інтегрування по S і враховуючи лему [2, с.95], маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S}\varphi(x)J_{\varepsilon}(x)u(x+\varepsilon\nu(x))dS=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{\varepsilon}}\varphi(x_{\varepsilon})u(x_{\varepsilon})dS_{\varepsilon}\quad \forall\varphi\in D(S),$$

тобто /11/ і /2/ співпадають.

Зауважимо, що у випадку $f(x,u)\equiv 0$ необхідність дещо іншим методом доведена у праці [4].

Отримані результати узагальнюються на випадок нормальних крайових задач для квазілінійних гіпоеліптичних рівнянь, у тому числі з розривними на гладких поверхнях всередині області Ω коефіцієнтами.

1. Березанский Ю.М., Крейн С.Г., Ройтберг Я.А. Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1963. Т.148. № 4. С.745–748. 2. Гельфанд И.И., Шилов Г.Е. Пространства основных обобщенных функций. М., 1958. 3. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле //Доп. АН УРСР. 1966. № 7. С.843–846. 4. Гупало Г.-В. С., Лопушанська Г.П. Задача Діріхле для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу в просторі узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Вип. 24. Сер. мех.-мат. 1985. с. 16–20. 5. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. Об одном представлении решения

обобщенной эллиптической граничной задачи // Диф. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С.518-521. 6. Крейн С.Г., Симонов А.С. Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 6. С.1226-1229. 7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 8. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957. 9. Szmydt Z. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzati // Atti.Accad. naz. Lincei. Rend. Cl.Sci.fis.mat. e natur. 1962. Vol. 32. N 3. P. 867-872.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.89

УДК 517.956

В.М.Кирилич

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ КРАЙОВОЇ УМОВИ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу про знаходження функцій $u(x,t)$, $\nu(t)$ з умов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad /1/$$

$$(x,t)\in D = \{x,t : 0<x<\ell,\ 0<t<T,\ \ell, T>0\},$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\quad 0\le x\le \ell, \qquad /2/$$

$$u(0,t) = \mu(t),\quad 0\le t\le T, \qquad /3/$$

$$u(\ell,t) = \nu(t),\quad 0\le t\le T, \qquad /4/$$

$$\int_0^\ell \alpha(x,t)\,u(x,t)\,dx = h(t),\quad 0\le t\le T. \qquad /5/$$

Тут a, ℓ, T – задані додатні параметри; f, μ, α – задані функції. Задачі на визначення крайових умов для змішаних задач виникають у сейсміці [2].

Природно припускати, що виконуються умови узгодження в кутових точках області $\bar{D}$:

$$\mu(0) = \mu'(0) = \nu(0) = \nu'(0) = h(0) = h'(0) = 0. \qquad /6/$$

Теорема. Припустимо, що 1/ функція f неперервна по сукупності змінних і один раз неперервно диференційована по x в області $\bar{D}$; 2/ функція μ один раз, а h – два рази

неперервно диференційовані на $[0,T]$; 3/ функція α двічі неперервно диференційована в $\bar{G}$ і $\alpha(\ell,t)\neq 0$, $0\leq t\leq T$;
4/ виконуються умови /6/.

Тоді задача /1/-/5/ має єдиний розв"язок $u(x,t)\in C^2(\bar{D})$, $\vartheta(t)\in C^1[0,T]$. При цьому функція u може мати розриви першого роду других похідних вздовж характеристик $x=at$, $x=\ell-at$.

Доведення. Розіб"емо прямокутник D на три частини: $\bar{D}=\bar{D}_1\cup\bar{D}_0\cup\bar{D}_2=\{x,t: 0\leq x\leq at,\ 0\leq t\leq T\}\cup\{x,t: at\leq x\leq \ell-at,\ 0\leq t\leq T\}\cup\{x,t: \ell-at\leq x\leq\ell,\ 0\leq t\leq T\}$.

В D_1 і D_0 зобразимо рівняння у вигляді еквівалентної системи рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=v(x,t),\quad \frac{\partial v}{\partial t}-a\frac{\partial v}{\partial x}=f(x,t), \qquad /7/$$

а в D_2

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}=v(x,t),\quad \frac{\partial v}{\partial t}+a\frac{\partial v}{\partial x}=f(x,t). \qquad /8/$$

Тоді, інтегруючи /7/-/8/ вздовж характеристик [1] і виключаючи потім функцію v з одержаних співвідношень, однозначно одержимо для будь-якої точки $(x,t)\in\bar{D}$:

$$u(x,t)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}d\xi\int\limits_0^{\frac{\xi+at-x}{2a}}f(\xi-a\tau,\tau)d\tau; \qquad /9/$$

$(x,t)\in\bar{D}_1$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}d\xi\int\limits_0^{\frac{\xi+at-x}{2a}}f(\xi-a\tau,\tau)d\tau; \qquad /10/$$

$(x,t)\in\bar{D}_0$

$$u(x,t)=\vartheta\left(t+\frac{x-\ell}{a}\right)-\frac{1}{2a}\int\limits_{2\ell-at-x}^{x-at}d\xi\int\limits_0^{\frac{at-\xi+x}{2a}}f(\xi+a\tau,\tau)d\tau \qquad /11/$$

$(x,t)\in\bar{D}_2$

Для визначення $\vartheta(t)$ підставимо /9/-/11/ у додаткову умову /інтегральне перевизначення/ /5/. В результаті маємо

$$\int\limits_{\ell-at}^{\ell}\alpha(x,t)\,\vartheta\left(t+\frac{x-\ell}{a}\right)dx=G_1(t),\quad 0\leq t\leq T,$$

де

$$G_1(t)=h(t)-\int\limits_0^{at}\alpha(x,t)\,\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)dx-$$

$$-\int_0^{at}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_0^{\tau}\alpha(x,t)f(a(2\tau-s-t)+x,s)\,ds\,d\tau\,dx-$$

$$-\int_{at}^{\ell-at}\int_0^{t}\int_0^{\tau}\alpha(x,t)f(a(2\tau-s-t)+x,s)\,ds\,d\tau\,dx-$$

$$-\int_{\ell-at}^{\ell}\int_{t+\frac{x-\ell}{a}}^{t}\int_0^{\tau}\alpha(x,t)f(a(s-2\tau+t)+x,s)\,ds\,d\tau\,dx.$$

Або

$$\int_0^t\alpha(a(\tau-t)+\ell,t)\,\vartheta(\tau)\,d\tau=\frac{1}{a}G_1(t),\ 0\le t\le T.$$

Звідси

$$\vartheta(t)=G(t)+\int_0^t K(t,\tau)\,\vartheta(\tau)\,d\tau,\ 0\le t\le T,$$

де $G(t)=(a\alpha(\ell,t))^{-1}G_1'(t)$, $K(t,\tau)=$

$$=a\frac{\partial\alpha(a(\tau-t)+\ell,t)}{\partial x}-\frac{\partial\alpha(a(\tau-t)+\ell,t)}{\partial t},\ 0\le t\le T.$$

Нехай тепер $R(t,\tau)$ - резольвента ядра $K(t,\tau)$. Тоді

$$\vartheta(t)=G(t)+\int_0^t R(t,\tau)\,G(\tau)\,d\tau,\ 0\le t\le T. \qquad /12/$$

Отже, шуканий розв"язок задачі /1/-/5/ дається формулами /9/-/12/. Теорема доведена.

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып. 3. С.87-104. 2. С у ч к о в М.В., Ф е д о т о в А.П. О решении одной задачи для волнового уравнения // Функциональные методы в задачах математической физики: Сб. науч. тр. 1985. С.64-67.

Стаття надійшла до редколегії 07.03.89

5-2498

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ МАЙЖЕ ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

У ряді праць [1-4] вивчалися різні задачі для гіперболічних рівнянь, які вироджуються на площині задання початкових даних. Досліджувалися питання існування, единості та гладкості розв"язків.

У даній статті розглянемо для рівняння

$$(t^a u_t)_t + bu_t - \Delta u + c|u|^{p-2}u = f(x,t) \qquad /1/$$

змішану задачу

$$u(x,t)=0, \quad (x,t)\in S; \qquad /2/$$

$$u(x,0)=0, \quad x\in D \qquad /3/$$

в області $Q=D\times(0,T)$. Тут D - обмежена область в R^n з межею $\partial D\in C^1$, $S=\partial D\times(0,T)$, $b=const$, $c=const$.

Введемо позначення

$$V=\{u(x,t):\ u\in H^1(Q)\cap L^p(Q),\ u|_S=0\}.$$

Функцію $u(x,t)\in V$ будемо називати узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/, якщо вона задовольняє умову /3/ і рівність

$$\int\limits_Q\Big[\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - t^a u_t v_t + bu_t v + c|u|^{p-2}uv\Big]dxdt = \int\limits_Q f v\,dxdt, \qquad /4/$$

для довільної $v(x,t)\in V$, $v(x,T)=0$.

Теорема 1. Нехай $a>0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $p\geq 2$, $f, t^{\frac{1-a}{2}}f\in L^2(Q)$. Тоді задача /1/-/3/ має хоча б один узагальнений розв"язок $u(x,t)$, причому

$$u\in L^\infty((0,T);H^1(D)\cap L^p(D)),\quad u_t\in L^\infty((0,T);L^2(D)).$$

Доведення. Нехай $\{W_j\}$ лінійно незалежна і скрізь щільна сукупність гладких функцій у просторі $H^1(D)\cap L^p(D)$. Розглянемо послідовність функцій

$$u_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)W_i(x), \quad m=1,2,3,\ldots,$$

де $g_{im}(t)$ визначаються як розв"язки задачі

$$\int_D [(t^a u_{mt})_t W_j + b u_{mt} W_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial W_j}{\partial x_i} +$$

$$+ c|u_m|^{p-2} u_m W_j - f W_j]dx = 0, \; j=1,\ldots,m; \qquad /5/$$

$$g_{im}\left(\frac{1}{m}\right)=0, \; g'_{im}\left(\frac{1}{m}\right)=0, \; i=1,\ldots,m. \qquad /6/$$

Легко переконатися в тому, що розв"язок задачі /5/, /6/ існує на всьому проміжку $[\frac{1}{m}, T]$. Продовжимо функції $u_m(x,t)$ нулем на область $\{(x,t): x\in D, 0<t<\frac{1}{m}\}$ і залишимо для продовженої функції те ж саме позначення. Тоді для $u_m(x,t)$ в області Q можна одержати оцінку

$$\int_D [(u_{mt})^2 + \sum_{i=1}^{n}(u_{mx_i})^2 + |u_m|^p]dx + \int_Q [(u_{mt})^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(u_{mx_i})^2 + |u_m|^p]dxdt \le c\int_Q t^{-a} f^2(x,t)dxdt, \qquad /7/$$

причому стала c не залежить від m.

Користуючись нерівністю /7/, можемо вибрати з послідовності $\{u_m(x,t)\}$ підпослідовність $\{u_s(x,t)\}$, яка має наступні властивості:

1/ $u_s \to u$ $*$ - слабо в $L^\infty((0,T); \overset{\circ}{H}{}^1(D)\cap L^p(D))$;

2/ $u_{st} \to u_t$ $*$ - слабо в $L^\infty((0,T); L^2(D))$;

3/ $u_s \to u$ сильно в $L^2(Q)$ і майже скрізь;

4/ $u_s \to u$ слабо в $H^1(Q)$;

5/ $|u_s|^{p-2}u_s \to |u|^{p-2}u$ $*$ - слабо в $L^\infty((0,T); L^q(D))$.

Тут $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. Далі легко переконатися, що знайдена функція $u(x,t)$ буде узагальненим розв"язком задачі /1/-/3/ з відповідними властивостями.

Розглянемо тепер питання единості узагальненого розв"язку задачі /1/-/3/.

Теорема 2. Нехай $0<a\le 1, -b>0, c\ge 0,$

$2 \le p \le \frac{2n-2}{n-2}$ / p - довільне, якщо $n=2$ /. Тоді задача /1/-/3/ має не більше одного узагальненого розв"язку такого, що

$$u \in L^{\infty}((0,T);\ \overset{\circ}{H}{}^{1}(D) \cap L^{p}(D)),\ u_t \in L^{\infty}((0,T);\ L^{2}(D)).$$

Доведення цієї теореми проводиться відомим методом [5].
Зауваження. Аналогічно можна одержати умови коректної розв"язності задачі /2/, /3/ для рівняння

$$(t^a u_t)_t + b(x,t)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)\, u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} = f(x,t,u).$$

1. Барановский Ф.Т. О задаче Коши для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью //Укр. мат. журн. 1984. Т.36. № 3. С.275-282. 2. Бубнов Б.А., Врагов В.Н. К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений //Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 4. С.795-800. 3. Глазатов С.Н. О корректности смешанной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения //Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28. № 2. С.60-66. 4. Глазатов С.Н. Сильно вырождающиеся нелинейные гиперболические уравнения и вариационные неравенства //Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1984. С.49-56. 5. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 517.946 + 511.2

І.О.Бобик, Б.Й.Пташник

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕСТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1. Крайові задачі з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь є, взагалі, некоректними. Типовим прикладом є задача Діріхле для рівняння коливань струни. Розв"язність таких задач у багатьох випадках залежить від арифметичної природи коефіцієнтів задачі та параметрів області і пов"язана з проблемою малих знаменників. Дослідження цих питань, а також огляд літератури є у праці [3].

Дана стаття розвиває та доповнює результати праць [3,4] у випадку одного класу рівнянь четвертого порядку.

Надалі використаємо такі позначення:

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ dx=dx_1\dots dx_n,\ \frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\ k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$$

$$\mu_k=(\mu_{k_1},\dots,\mu_{k_n})\in\mathbb{R}^n,\ (k,x)=k_1x_1+\dots+k_nx_n,\ \|k\|=\sqrt{k_1^2+\dots+k_n^2},$$

$$|k|=|k_1|+\dots+|k_n|,\ D=\{(t,x):t\in(0,T),\ x\in\mathbb{R}^n\};\ C_B^{(q,r)}(D)\ (r\geq q)-$$

банаховий простір функцій $u(t,x)$, q раз неперервно диференційовних по t, а також r раз неперервно диференційовних по x в $\bar{D}$ і майже періодичних в сенсі Бора по $x_1,\dots,x_n$ рівномірно відносно $t\in[0,T]$, з нормою

$$\|u\|_{C_B^{(q,r)}(\bar{D})}=\max_{\substack{|s|\leq r\\ s_0\leq q}}\ \sup_{(t,x)\in\bar{D}}\left\{\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}\right\}.$$

2. В області D для рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta+b^2\right)^2u(t,x)=f(t,x),\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},\qquad /1/$$

де a, b – додатні числа, розглядаються дві крайові задачі з умовами

$$u\Big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u\Big|_{t=T}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T}=0;\qquad /2/$$

$$u\Big|_{t=0}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0}=u\Big|_{t=T}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=T}=0.\qquad /3/$$

Припустимо, що $f(t,x)\in C_B^{(0,m)}(\bar{D})(m\in\mathbb{N})$, причому

$$f(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}f_k(t)e^{(i\mu_k,x)},\quad f_k(t)=\lim_{\ell\to 0}\frac{1}{(2\ell)^n}\int_{K_\ell}f(t,x)e^{-(i\mu_k,x)}dx,$$

$$K_\ell=\{x:|x_r|\leq\ell,\ r=\overline{1,n}\},\ f_k(t)=\bar{f}_{-k}(t);\ \mu_0=(0),\ \mu_k\neq(0)(k\neq(0)).\qquad /4/$$

Розв"язки задач /1/, /2/ та /1/, /3/ будемо шукати в просторі $C_B^{(4,4)}(\bar{D})$ у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}u_k(t)e^{(i\mu_k,x)},\qquad /5/$$

де $\mu_k\in M\subset\mathbb{R}^n$, M – спектр функції $f(t,x)$. Для визначення коефіцієнтів $u_k(t)$ отримуємо крайові задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a^2\|\mu_k\|^2+b^2\right)^2 u_k(t)=f_k(t); \qquad /6/$$

$$u_k\Big|_{t=0}=\frac{du_k}{dt}\Big|_{t=0}=u_k\Big|_{t=T}=\frac{du_k}{dt}\Big|_{t=T}=0; \qquad /7/$$

$$u_k\Big|_{t=0}=\frac{d^2u_k}{dt^2}\Big|_{t=0}=u_k\Big|_{t=T}=\frac{d^2u_k}{dt^2}\Big|_{t=T}=0. \qquad /8/$$

Розв"язки цих задач будемо будувати з допомогою функцій Гріна відповідних однорідних задач [2].

3. Розв"язки задач /6/, /7/ та /6/, /8/ будемо позначати відповідно $u_k(t)$ і $\tilde{u}_k(t)$, а відповідні характеристичні визначники та функції Гріна $-\Delta(\mu_k)$, $\mathcal{G}_k(t,\xi)$ та $\tilde{\mathcal{G}}_k(t,\xi)$, $\tilde{\Delta}(\mu_k)$. Позначимо $L=\sqrt{a^2\|\mu_k\|^2+b^2}$. Тоді фундаментальна система розв"язків однорідного рівняння, що відповідає рівнянню /6/, запишеться так:

$$y_{k1}=e^{iLt},\quad y_{k2}=te^{iLt},\quad y_{k3}=e^{-iLt},\quad y_{k4}=te^{-iLt}. \qquad /9/$$

Розглянемо спочатку задачу /6/, /7/. Вона є однозначно розв"язною тоді і тільки тоді, коли $\Delta(\mu_k)\equiv \det\|U_j(y_{kp})\|_{j,p=1}^{4}\neq 0$, де $U_j\ (j=\overline{1,4})$ – оператори граничних умов /7/. Проводячи обчислення, знаходимо

$$\Delta(\mu_k)=-4\sin^2 LT+4L^2T^2, \qquad /10/$$

звідки випливає, що $\Delta(\mu_k)\neq 0,\ \forall\mu_k\in\mathbb{R}^n$. Тому $\forall\mu_k\in\mathbb{R}^n$ існує функція Гріна $\mathcal{G}_k(t,\xi)$, а розв"язок задачі /6/, /7/ представляється у вигляді

$$u_k(t)=\int_0^T \mathcal{G}_k(t,\xi)f_k(\xi)d\xi, \qquad /11/$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_k(t,\xi)={}&g_k(t,\xi)-\frac{1}{\Delta(\mu_k)}\Big\{U_1(g_k)\big[e^{iL(t-2T)}(-iLt+1)+e^{-iL(t-2T)}(iLt+1)+\\&+e^{iLt}(L^2T^2+2L^2Tt-3iLt-2iLT-1)+e^{-iLt}(L^2T^2+2L^2Tt+2iLT-iLt-1)\big]-\\&-U_2(g_k)\big[e^{iLt}(2iLT^2-2iLTt+t)+e^{-iLt}(-2iLT^2+2iLTt+t)\big]+U_3(g_k)\times\\&\times\big[e^{iL(t-T)}(L^2Tt+iLT+iLt-1)+e^{-iL(t-T)}(L^2Tt-iLt-iLT-1)+e^{iL(t+T)}\times\\&\times(iLT-iLt+1)+e^{-iL(t+T)}(-iLT+iLt+1)\big]-U_4(g_k)\big[e^{iL(t+T)}(T-t)+e^{-iL(t+T)}(T-t)+\\&+e^{iL(t-T)}(2iLTt-T+t)+e^{-iL(t-T)}(-2iLTt+T+t)\big]\Big\},\end{aligned} \qquad /12/$$

$$g_k(t,\xi)=\frac{sign(t-\xi)}{8L^3}\left[e^{iL(t-\xi)}(-Lt+L\xi-i)+e^{-iL(t-\xi)}(-Lt-L\xi+i)\right], \qquad /13/$$

$$\left.\begin{aligned} &U_1(g_k)=\frac{1}{8L^3}(L\xi-i)(e^{iL\xi}-e^{-iL\xi}),\\ &U_2(g_k)=-\frac{i\xi}{8L}(e^{iL\xi}-e^{-iL\xi}),\\ &U_3(g_k)=\frac{1}{8L^3}\left[e^{iL(T-\xi)}(-LT+L\xi-i)+e^{-iL(T-\xi)}(-LT-L\xi+i)\right],\\ &U_4(g_k)=\frac{i}{8L}\left[e^{iL(T-\xi)}(\xi-T)+e^{-iL(T-\xi)}(\xi+T)\right].\end{aligned}\right\} \qquad /14/$$

4. На основі сказаного вище отримуємо таке твердження:

Теорема I. Задача /I/, /2/ не може мати двох різних розв"язків із класу $C_B^{(4,4)}(D)$.

Доведення випливає з единості розвинення майже періодичної функції в ряд Фур"є.

Розглянемо питання існування розв"язку задачі /I/, /2/, який формально представляється рядом

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}\int_0^T g_k(t,\xi)f_k(\xi)d\xi\cdot e^{(i\mu_k,x)} \qquad /15/$$

Припустимо, що для всіх векторів $\mu_k\in M$ виконуються нерівності

$$c_1\|k\|^{\sigma}\leq\|\mu_k\|\leq c_2\|k\|^{\sigma},\quad c_1>0,\ c_2>0,\ \sigma>0. \qquad /16/$$

Зауважимо, що виділений умовами /16/ клас майже періодичних функцій містить в собі всі періодичні функції.

Очевидно, що

$$\max_{0\leq t\leq T}|f_k(t)|\leq c_3\|\mu_k\|^{-m}\|f(t,x)\|_{C_B^{(0,m)}(D)} \qquad /17/$$

і для всіх /крім скінченного числа/ векторів $\mu_k\in M$ виконуються нерівності

$$\Delta(\mu_k)\geq c_4\|\mu_k\|^2. \qquad /18/$$

Теорема 2. Нехай $f(t,x)\in C_B^{(0,m)}(D)$, де $m>2+n/\sigma$, і нехай виконуються умови /16/. Тоді існує єдиний розв"язок задачі /I/, /2/ з простору $C_B^{(4,4)}(D)$, який неперервно залежить від $f(t,x)$ і представляється формулою /15/.

Доведення. На основі формул /12/-/15/, а також оцінок /16/-/18/ одержуємо, що

$$\|u(t,x)\|_{C_B^{(4,4)}(\mathcal{D})} \le C_5 \|f(t,x)\|_{C_B^{(0,m)}(\mathcal{D})} \sum_{|k|\ge 0} \|\mu_k\|^{2-m} \le C_6 \|f(t,x)\|_{C_B^{(0,m)}(\mathcal{D})}, \qquad /19/$$

із нерівності /19/ випливає доведення теореми.

5. Розглянемо тепер задачу /1/, /3/, розв"язок якої будемо позначати $\tilde{u}(t,x)$. Характеристичний визначник $\tilde{\Delta}(\mu_k)$ задачі /6/, /8/

$$\tilde{\Delta}(\mu_k) = 8iL^2 \sin 2LT. \qquad /20/$$

Із виразу /20/ та теореми про единість розвинення майже періодичної функції в ряд Фур"е випливає наступне твердження.

Теорема 3. Для единості розв"язку задачі /1/, /3/ в класі функцій з $C_B^{(4,4)}(\mathcal{D})$ із заданим спектром M необхідно і достатньо, щоб для всіх $\mu_k \in M$ виконувалась умова

$$2T\sqrt{a^2\|\mu_k\|^2 + b^2} \ne m\pi, \quad \forall m \in N. \qquad /21/$$

Зауваження. Множина значень T, для яких умова /21/ не виконується при фіксованих a і b, є зчисленна.

Припустимо, що має місце единість розв"язку задачі /1/, /3/. Тоді для кожного $\mu_k \in M$ задача /6/, /8/ однозначно розв"язна, і розв"язок задачі /1/, /3/ формально представляється рядом

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} \int_0^T \tilde{\mathcal{G}}_k(t,\xi) f_k(\xi)\, d\xi \cdot e^{(i\mu_k, x)}, \qquad /22/$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_k(t,\xi) = g_k(t,\xi) - \frac{1}{4L\sin 2LT}\Big\{\tilde{U}_1(g_k)\big[e^{iLt}(-L^2t + iL) + e^{iL(t-2T)}(L^2t + 2iL) -$$

$$- e^{-iLt}(L^2t + 2iL) + e^{-iL(t-2T)}(L^2t - 2iL)\big] - \tilde{U}_2(g_k)\big[t(e^{iLt} + e^{-iLt}) -$$

$$- t(e^{iL(t-2T)} + e^{-iL(t-2T)})\big] + \tilde{U}_3(g_k)\big[(L^2T - L^2t - iL)(e^{iL(t-T)} + e^{iL(t+T)})\big] -$$

$$- \tilde{U}_4(g_k)\big[-e^{iL(t-T)}(T+t) + e^{iL(t-T)}(-T+t) + e^{-iL(t-T)}(T+t) +$$

$$+ e^{-iL(t+T)}(T-t)\big]; \qquad /23/$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{U}_1(g_k)=U_1(g_k),\quad \tilde{U}_3(g_k)=U_3(g_k),\\&\tilde{U}_2(g_k)=\frac{L\xi+i}{8L}\left(e^{-iL\xi}+e^{iL\xi}\right),\\&\tilde{U}_4(g_k)=\frac{1}{8L}\left[e^{iL(T-\xi)}(LT-L\xi-i)+e^{-iL(T-\xi)}(LT+L\xi+i)\right]\end{aligned}\right\}\qquad /24/$$

Зауважимо, що ряд /22/ в загальному випадку може розбігатися, оскільки вираз $\sin 2LT$, будучи відмінним від нуля, може ставати як завгодно малим для нескінченної множини значень $\mu_k \in M$. Оцінимо знизу величину $|\sin 2LT|$, використовуючи нерівність $\sin x > (2/\pi)x,\ (0<x<\pi/2)$:

$$|\sin 2LT| > \frac{2}{\pi}\pi\left|\frac{2T}{\pi}L-m\right| = \frac{2T}{\pi}\|k\|^{6}\left|2\sqrt{a^2\left(\frac{\|\mu_k\|}{\|k\|^{6}}\right)^2+\frac{b^2}{\|k\|^{2b}}}-\frac{\pi}{T}\frac{m}{\|k\|^{6}}\right|,\qquad /25/$$

де $m=m(\mu_k)$ таке ціле число, що $\left|\frac{2T}{\pi}\sqrt{a^2\|\mu_k\|^2+b^2}-m\right|<\frac{1}{2}$.

<u>Теорема 4</u>. Нехай виконуються умови єдиності розв"язку задачі /1/, /3/ і нехай існують такі додатні константи C і γ, що нерівність

$$\left|2\sqrt{a^2\left(\frac{\|\mu_k\|}{\|k\|^{6}}\right)^2+\frac{b^2}{\|k\|^{2b}}}-\frac{\pi}{T}\frac{m}{\|k\|^{6}}\right| > \frac{C}{\|k\|^{\gamma}}\qquad /26/$$

виконується для всіх /крім скінченного числа/ сукупностей цілих чисел $k_1,\ldots,k_n,\ m$. Якщо $f(t,x)\in C_B^{(4,\alpha)}(\bar{D})$, де $\alpha>2+(n+\gamma)/6$, то існує розв"язок задачі /1/, /3/ з простору $C_B^{(4,4)}(\bar{D})$, який неперервн' залежить від $f(t,x)$ і представляється рядом /22/.

<u>Доведення</u>. Із формул /13/, /22/-/24/ та оцінок /16/, /17/, /25/, /26/ випливає, що

$$\|\tilde{u}(t,x)\|_{C_B^{(4,4)}(\bar{D})} \le C_7\|f(t,x)\|_{C_B^{(0,\alpha)}(\bar{D})}\sum_{|k|\ge 0}\|k\|^{\gamma-6}\|\mu_k\|^{3-\alpha}\le C_8\|f(t,x)\|_{C_B^{(4,\alpha)}(\bar{D})},\qquad /27/$$

звідси випливає доведення теореми.

<u>Лема</u>. Нехай $\Phi(k)=\Phi(k_1,\ldots,k_n)$ - обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність $\left|\Phi(k)-\frac{md}{\|k\|^{6}}\right|<\frac{1}{\|k\|^{n+6+\varepsilon}}$ $(0<\varepsilon<1)$ для майже всіх /в сенсі міри Лебега/ чисел $d>0$ має не більше ніж скінченне число розв"язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_n, m/m+0,\|k\|\neq 0/$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 2.4 з праці [3, гл.I].

На основі теорем 3,4 та леми дістаємо наступне твердження.

<u>Теорема 5</u>. Якщо $f(t,x)\in C_B^{(9,\alpha)}(\bar{D})$, де $\alpha>3+2n/6$, то для майже всіх /в сенсі міри Лебега/ значень $T>0$ і довіль-

6-2498

них фіксованих $a>0$ і $b>0$ задача /1/, /3/ має єдиний розв"язок в класі функцій із $C_B^{(4,4)}(\bar{D})$, який неперервно залежить від $f(t,x)$.

Висновок. Ми бачимо, що задачі /1/, /2/ та /1/, /3/, які є близькі за постановкою, мають суттєво різну природу. Якщо для першої з них існує єдиний розв"язок для довільних додатних a, b і T, то для другої задачі розв"язність має місце не для всіх наборів параметрів a, b, T і є нестійкою щодо цих параметрів.

Нарешті зауважимо, що в періодичному випадку при $n = 1$ існування єдиного розв"язку задачі /1/, /2/ випливає з результатів роботи [1].

1. Д а в т я н М.Д. Общие краевые задачи для гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками //Изв. АН АрмССР. Математика. 1974. Т. 9. № 4. С.269-284. 2. Н а й м а р к М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 3. П т а ш н и к Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 4. П т а ш н и к Б.Й., Ш т а б а л ю к П.И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным //Диф. уравнения. 1986. Т.22. № 4. С.669-678.

Стаття надійшла до редколегії 21.09.89

УДК 517.948

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ $U_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a_k}{z^k}$, $k=9,10,11$.

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в відшуканні плоскої однозв"язної області D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z=z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область D площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z=z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язування нелінійного інтегрального рівняння*

$$\sigma z_*(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{u_\ell(z(\tau))d\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$z_*(t) = \overline{z\left(\frac{1}{\bar t}\right)}, \qquad u_\ell(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_\ell}{\partial z},$$

$$z(t) = \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3 + \ldots, \quad \delta_1 > 0. \qquad /2/$$

Розглянемо випадок, коли

$$u_\ell(z) = \frac{1}{z} + \frac{a_9}{z^9}; \qquad /3/$$

$$u_\ell(z) = \frac{1}{z} + \frac{a_{10}}{z^{10}}; \qquad /4/$$

$$u_\ell(z) = \frac{1}{z} + \frac{a_{11}}{z^{11}}, \qquad /5/$$

де a_9, a_{10}, a_{11} - комплексні числа; $\sigma = 1$.

Підставляючи вирази /3/-/5/, /2/ у рівняння /1/, отримуємо нелінійні системи рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{\delta_1} - \frac{9a_9\delta_9}{\delta_1^{10}}, \\ \bar\delta_9 = \frac{a_9}{\delta_1^9}, \\ \delta_2 = \delta_3 = \ldots \delta_8 = \delta_{10} = \ldots = 0; \end{cases} \qquad /3'/$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{\delta_1} - \frac{10a_{10}\delta_{10}}{\delta_1^{11}}, \\ \bar\delta_{10} = \frac{a_{10}}{\delta_1^{10}}, \\ \delta_2 = \delta_3 = \ldots = \delta_9 = \delta_{11} = \ldots = 0; \end{cases} \qquad /4'/$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{\delta_1} - \frac{11a_{11}\delta_{11}}{\delta_1^{12}} \\ \bar\delta_{11} = \frac{a_{11}}{\delta_1^{11}}, \\ \delta_2 = \delta_3 = \ldots = \delta_{10} = \delta_{12} = \ldots = 0. \end{cases} \qquad /5'/$$

Системи /3'/-/5'/ мають єдиний розв"язок (δ_1, δ_9), (δ_1, δ_{10}), (δ_1, δ_{11}) відповідно при

---

* Михалюк М.И. О локальной единственности решений обратной задачи логарифмического потенциала для постоянной плотности // Докл. АН УССР. Сер.А. 1973. №8. С.683-687.

$$|a_9|^2 \leq \frac{9^8}{10^{10}}, \quad |a_{10}|^2 \leq \frac{10^9}{11^{11}}, \quad |a_{11}|^2 \leq \frac{11^{10}}{12^{12}}, \qquad /6/$$

які задовольняють умову

$$z'(t) \neq 0 \qquad \text{при} \quad |t| < 1.$$

Отже, справедлива така теорема.

Теорема. Для потенціалів /3/–/5/, які задовольняють умову /6/, обернена задача для постійної густини $\mathcal{G} = 1$ має єдиний розв"язок у класі однозв"язних областей. При

$$|a_9|^2 > \frac{9^8}{10^{10}}, \quad |a_{10}|^2 > \frac{10^9}{11^{11}}, \quad |a_{11}|^2 > \frac{11^{10}}{12^{12}}$$

задача в цьому класі областей розв"язку не має.

Приклад. Для потенціалів /3/–/5/ при

$$a_9 = \sqrt{\frac{9^8}{10^{10}}}, \quad a_{10} = \sqrt{\frac{10^9}{11^{11}}}, \quad a_{11} = \sqrt{\frac{11^{10}}{12^{12}}}$$

єдиними розв"язками у класі конформних відображень є відповідно функції

$$z(t) = \sqrt{\frac{9}{10}}\, t + \frac{1}{\sqrt{90}}\, t^9,$$

$$z(t) = \sqrt{\frac{10}{11}}\, t + \frac{1}{\sqrt{110}}\, t^{10},$$

$$z(t) = \sqrt{\frac{11}{12}}\, t + \frac{1}{\sqrt{132}}\, t^{11}.$$

Стаття надійшла до редколегії 21.03.89

УДК 517.948

М.Й.Михалюк

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ $U_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^8}$

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв"язну область D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z=z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область D площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння*

$$\sigma z_*(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{u_e(z(\tau))d\tau}{\tau-t},\quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$u_e(z)=-\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z},\quad z_*(t)=\overline{z\left(\frac{1}{\bar t}\right)},\quad |t|<1. \qquad /2/$$

У даній статті розглядається випадок, коли

$$u_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^8}, \qquad /3/$$

де a - комплексне число, $\sigma=1$.

Розв"язок задачі будемо шукати у вигляді

$$z(t)=\alpha_1 t+\alpha_8 t^8,\quad \alpha_1>0. \qquad /4/$$

Підставляючи вирази /4/, /3/ в /1/, отримуємо нелінійну систему рівнянь

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{\alpha_1}-\dfrac{8a\alpha_8}{\alpha_1^9}\\ \bar\alpha_8=\dfrac{a}{\alpha_1^8}.\end{cases} \qquad /5/$$

---

* Див. посилання на літературу у попередній статті.

Система /5/ має єдиний розв"язок (α_1, α_8) при

$$|a|^2 \leq \frac{8^7}{9^9}, \qquad /6/$$

який задовольняє умову

$$z'(t) \neq 0 \text{ при } |t|<1.$$

Таким чином, має місце теорема.

Теорема. Для потенціалу /3/, який задовольняє умову /6/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має єдиний розв"язок у класі конформних відображень /4/ круга $|t|<1$. При

$$|a|^2 > \frac{8^7}{9^9}$$

задача в цьому класі функцій розв"язку не має.

Приклад. Для потенціалу /3/ при

$$a = \sqrt{\frac{8^7}{9^9}}$$

розв"язком у класі конформних відображень /4/ є функція

$$z(t) = \sqrt{\frac{8}{9}}\, t + \frac{1}{\sqrt{72}}\, t^8.$$

Стаття надійшла до редколегії 27.12.88

УДК 517.535.4

А.Д.Кузик

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ℓ -ІНДЕКСУ ЦІЛОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Нехай ℓ - додатна неперервна на $[0;+\infty]$ функція. Ціла функція f називається [I] функцією обмеженого ℓ -індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\,\ell^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!\,\ell^m(|z|)} : 0 \leq m \leq N\right\}. \qquad /1/$$

При $\ell(r) \equiv 1$ звідси маємо означення цілої функції обмеженого індексу. Вивчення властивостей цілих функцій обмеженого індексу проводиться в багатьох роботах, частина з яких присвячена дослідженню обмеженості індексу цілої функції f, яка задовольняє диференціальне рівняння

$$P_0(z)f^{(k)}(z)+P_1(z)f^{(k-1)}(z)+\ldots+P_k(z)f(z)=Q(z), \qquad /2/$$

де $P_0, \ldots, P_k$ і Q – многочлени і, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що коефіцієнт при найстаршому степені многочлена P_0 дорівнює 1. С.Шах [2] показав, що якщо $\deg P_j \leq \deg P_0$ для всіх $j = 1,2,\ldots,k$, то ціла функція f, яка задовольняє рівняння /2/, є функцією обмеженого індексу. Цей результат С.Шаха допускає наступне узагальнення.

Теорема. Якщо $\deg P_j \leq \deg P_0 + s\cdot j$, $s \in \mathbb{Z}_+$ для всіх $j = 1,2,\ldots,k$, то ціла функція f, яка задовольняє рівняння /2/, є функцією обмеженого ℓ -індексу з $\ell(r)=r^s+1$.

При доведенні цієї теореми істотно використовується таке твердження.

Лема. Нехай $f \not\equiv 0$ і $r_0 \in (0;+\infty)$. Тоді існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для z, $|z| \leq r_0$ і всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\,\ell^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!\,\ell^m(|z|)} : 0 \leq m \leq n_0\right\}. \qquad /3/$$

1. К у з ы к А.Д., Ш е р е м е т а М.Н. Целые функции ограниченного ℓ-распределения значений //Мат. заметки. 1986. Т. 39. № 1. С.3-13. 2. S h a h S.M. Entire functions satisfying a linear differential equation // J. Math. Mech. 1968. Vol. 18. P. 131-136.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.89

УДК 517.576

О.Б.Скасків

ПРО РІСТ НА ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ПРОМЕНЯХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ

Нехай F – аналітична в $\Pi_0 = \{z : Re\, z < 0\}$, представлена абсолютно збіжним в Π_0 рядом Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n \uparrow +\infty \ (n \to +\infty). \qquad /1/$$

Позначимо $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$,

$$\rho = \overline{\lim_{x\to -0}} |x| \ln^+ \ln M(x,F), \quad \rho^* = \overline{\lim_{x\to -0}} |x| \ln^+ \ln |F(x)|.$$

У праці [3] встановлено, що якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty \qquad /2/$$

та $q = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|B'(\lambda_n)|} = 0,\ B(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z}$, то $\rho = \rho^*$.

Величину q можна було б вважати задовільним аналогом індексу конденсації послідовності, $\delta = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|L'(\lambda_n)|}$ [2, с.25], якщо б замість $B(z)$ використовувалася ціла функція $L(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\dfrac{z}{\lambda_n}\right)^2\right)$, як це робиться у дослідженні [1] при вивченні поведінки в півсмузі аналітичної в Π_0 функції виду /1/. Власне, у статті А.М.Гайсина [1] порядок близькості членів послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ характеризується величиною

$$q_1 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}. \qquad /3/$$

Мета нашої статті – встановлення непокращуваних умов, при виконанні яких $\rho = \rho^*$. При цьому, як звичайно в таких задачах, одна з умов /див. умову /4/ / враховує швидкість зростання, а інша / $q_1 = 0$ / враховує порядок близькості членів послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$. Позначимо через $A_0(\Lambda)$ – клас аналітичних в Π_0 функцій виду /1/, для яких виконується /2/ і $\delta = 0$.

<u>Теорема 1.</u> Щоб для кожної функції $F \in A_0(\Lambda)$ виконувалася рівність $\rho = \rho^*$, необхідно і досить одночасного виконання умови $q_1 = 0$ та

$$\Delta = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \ln t \sum_{\lambda_n \geq t} \frac{1}{\lambda_n} = 0. \qquad /4/$$

Доведення достатності одержуємо негайно з цитованого вище результату [3] та наступної елементарної леми.

Лема. Умова $q=0$ виконується тоді і тільки тоді, коли одночасно $q_1=0$ та $\Delta=0$.

Необхідність у теоремі 1 одержуємо з наступної теореми.

Теорема 2. Для кожної послідовності $\Lambda=(\lambda_n)$, $0<\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty)$, що задовольняє умови /2/ і $\delta=0$, існує функція $F\in A_0(\Lambda)$, обмежена на промені $\ell=\{z=x+iy:\ y=0,\ x<0\}$, і така, що $\rho\geq q_1+\Delta$.

Для доведення теореми досить розглянути функцію $F(z)=$ $=\sum_{n=1}^{\infty} e^{z\lambda_n}/(1+\lambda_n)^2 B'(\lambda_n)$ і показати, що на від"ємній півосі ℓ вона зображається інтегралом $F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{xt}}{(1+t)^2 B(t)}dt\ (x<0)$.

Зауваження 1. Відзначимо, що при вивченні асимптотичної поведінки функцій виду /1/ у півсмугах ключову роль відіграє умова /4/, при цьому використання результатів типу Вімана-Валірона дає можливість умову виду /3/ зняти. Але викладення цього факту не входить у мету даного повідомлення.

Зауваження 2. По суті, в теоремі 2 встановлена також необхідність умови $q=0$. Вкажемо також на природність умови $\delta=0$ [2, с.25].

1.Г а й с и н А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле в полуполосе // Мат. сб. 1982. Т.117. № 3. С. 412-424. 2.Л е о н т ь е в А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980. 3.С о р о к и в с к и й В.М. О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле //Укр. мат. журн. 1984. Т. 36. № 4. С.52.-528.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

7-2498

УДК 517.948

О.В.Дима, Я.В.Микитюк

ПРО ЗБУРЕННЯ ОПЕРАТОРА ДВОСТОРОННЬОГО ЗСУВУ

Нехай S – оператор двостороннього зсуву в просторі $\ell_2(\mathbb{Z})$, тобто

$$(Sx)_n = x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо оператор $T: \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, який діє за формулою

$$T = S + A,$$

де A – діагональний оператор:

$$(Ax)_n = a_n x_n, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (\{a_n\} \in \ell_\infty(\mathbb{Z})). \qquad /1/$$

<u>Означення 1</u>. Позначимо через $\mathcal{A}$ множину всіх операторів виду /1/, які задовольняють умови:

1/ для довільного $n \in \mathbb{N}$ збігається ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j^n$;

2/ збігається ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} n^{-1} q_n$, де

$$q_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\Big|\sum_{j=k}^{\infty} a_j^n\Big| + \Big|\sum_{j=k}^{\infty} a_{-j}^n\Big| \right).$$

Основним результатом дослідження є теорема.

<u>Теорема 1</u>. Нехай $A \in \mathcal{A}$. Тоді оператори T і S подібні.

Доведення теореми 1 зводиться до доведення трьох лем, які формулюються нижче. Доведення самих лем ми не наводимо за браком місця.

<u>Лема 1</u>. Нехай $A \in \mathcal{A}$. Тоді у рівномірній операторній топології збігаються ряди $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j^n$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_{-j}^n$, $n \in \mathbb{N}$, де $A_j = S^j A S^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$. При цьому суми $Q_n^{\pm} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} A_{\pm j}^n$ допускають оцінку $\|Q_n^{\pm}\| < q_n$.

Приймемо за означенням

$$U_n^{\pm} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} Q_n^{\pm} \right)\Bigg|_{z=0}.$$

<u>Лема 2</u>. Нехай $A \in \mathcal{A}$. Тоді $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|U_n^{\pm}\| \le \exp\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} q_n \right)$.

Приймемо

$$M_+ = \sum_{n=0}^{\infty} S^{-n} U_n^{+}, \quad M_- = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{-} S^{-n}.$$

Лема 3. Нехай $A \in \mathcal{A}$. Тоді оператори M_+, M_- оборотні, причому мають місце рівності

$$M_+ T = SM_+ ,\quad TM_- = M_- S .$$

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 512.713

Б.В.Забавський

ПРО КОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Відомо, що комутативна область Безу, множина максимальних ідеалів якої не більш ніж зчисленна, є областю елементарних дільників [3]. У даній статті узагальнюється цей результат на випадок кільця скінченно-породжених головних ідеалів.

Під кільцем R у даній статті розуміємо комутативне кільце з одиницею. Через $J(R)$ позначимо радикал Джекобсона кільця R, а через $\operatorname{mspec} R$ – множину всіх максимальних ідеалів кільця R. Нагадаємо, що комутативне кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця A над R володіє діагональною редукцією, тобто якщо для A знайдуться оборотні матриці P і Q над R підходящих розмірів, що PAQ – діагональна матриця. Якщо над кільцем R довільний рядок /стовпчик/ володіє діагональною редукцією, тоді R називається правим /лівим/ кільцем Ерміта. Праве і ліве кільце Ерміта називається кільцем Ерміта. Під кільцем скінченно-породжених головних ідеалів розуміємо кільце, в якому довільний скінченно-породжений ідеал є головним. Кільце елементарних дільників міститься в класі кілець скінченно-породжених головних ідеалів [1-3].

Для довільного елемента $a \in R$ нехай

$$M(a) = \{ M \in \operatorname{mspec} R \,/\, a \in M \} .$$

Теорема. Нехай R – кільце скінченно-породжених головних ідеалів, в якому $\operatorname{mspec} R$ – більш ніж зчисленна множина, а для довільного $a \in R/J(R)$ множина $M(a)$ – не більш ніж зчисленна. Тоді R – кільце елементарних дільників.

Доведення. Якщо a, $b \in R/J(R)$, тоді $M(a\cdot b) = M(a) \cup M(b)$ – не більш ніж зчисленна множина. Тому $a \cdot b \in R/J(R)$. Отже, $J(R)$ – простий ідеал R. В силу теореми 2 праці [1] R – кільце Ерміта. Таким чином, для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями виду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR+bR+cR=R$. Доведемо, що матриця A володіє діагональною редукцією. В силу теореми 3 праці [1] можемо вважати, що $J(R)=0$. Розглянемо множину $M(a)$. Нехай $M(a)= \{M_1, \ldots, M_k, \ldots\}$. Оскільки $aR+bR+cR=R$, то можна обмежитися випадком, коли $b \notin M_1$. Дійсно, якщо $b \in M_1$, то $b+c \notin M_1$, оскільки $aR+bR+cR=R$.
Тоді в силу рівності

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b+c & c \end{pmatrix} = B$$

достатньо довести, що матриця B володіє діагональною редукцією. Отже, нехай $b \notin M_1$. Розглянемо ідеал $aR+bR=a_1R$. Очевидно, що $a_1 \notin M_1$. В силу того, що R - кільце Ерміта, існує оборотна матриця P, що

$$A_1 = PA = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

де $a_1R+b_1R+c_1R=R$ і $a_1 \notin M_1$. За аналогією можна вважати, що $b_1 \notin M_2$ і $a_1R+b_1R=a_2R$, де $a_2 \notin M_2$. Продовжуючи ці міркування, отримаємо множину матриць A_k виду

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

де $a_k \notin M_k$ і $a_{k-1}R \subset a_kR$ для довільного $k=1,2\ldots$
Тим самим побудовано ланцюг ідеалів

$$/1/ \quad aR \subset a_1R \subset \cdots \subset a_kR \subset .$$

Нехай $J=\bigcup a_iR$. Оскільки $aR \subset J$, то для довільного максимального ідеалу M з включення $J \subset M$ випливає, що $M \in M(a)$. Тому знайдеться номер k, для якого $M=M_k$. Але це неможливо, оскільки в ланцюгу /1/ існує ідеал a_kR, який задовольняє умову, що $a_k \notin M_k$. Тим самим доведено, що $J=R$, тобто ланцюг /1/ скінченний. А це означає, що матриця A володіє діагональною редукцією. Теорема доведена.

1. Henriksen M. Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math. J. 1955/56. Vol. 3. P. 159-163.
2. Kaplasky J. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 66. P. 464-491. 3. Naude C., Naude G., Brewer J.W. On Bezout domains, elementary

divisor rings and pole assignability // Commun. Algeb. 1984. Vol. 12. P. 2987-3003.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 512.552.12

Б.В.Забавський, М.Я.Комарницький

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МАКСИМАЛЬНИХ І ПРОСТИХ ІДЕАЛІВ КОМУТАТИВНОЇ ОБЛАСТІ БЕЗУ

Дана стаття присвячена вивченню максимальних і простих ідеалів комутативної області Безу. Відзначимо, що спектр областей Безу досліджувався також у працях [3,5].

Нагадаємо, що комутативна область цілісності з одиницею, в якій довільний скінченно-породжений ідеал є головним, називається комутативною областю Безу. Надалі слово "комутативна" пропускатимемо. Локальна область Безу називається кільцем нормування. Область Безу називається адекватною, якщо для будь-яких елементів a, $b \in R \setminus 0$ існують такі елементи r, $s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ – властивий [4]. Ідеал J кільця R називається ідемпотентним, якщо $J = J^2$. Через $mspec\, R$ позначатимемо множину всіх максимальних ідеалів кільця R, а для довільного $\mathfrak{m} \in mspec\, R$ через $R_{\mathfrak{m}}$ позначатимемо локалізацію R щодо мультиплікативно замкненої множини $R \setminus \mathfrak{m}$.

<u>Твердження 1</u>. Якщо в неідемпотентному максимальному ідеалі $\mathfrak{m}$ області Безу R знайдеться елемент $x \notin \mathfrak{m}^2$, який не міститься в жодному іншому ідеалі $\mathfrak{m}' \in mspec\, R$, то $\mathfrak{m}$ є головним ідеалом.

<u>Доведення</u>. Якщо $xR \neq \mathfrak{m}$, то існує елемент $y \in \mathfrak{m}$, який не лежить в xR. Нехай $xR + yR = zR$. Звідси $x = zx_0$. Очевидно, $z \in \mathfrak{m}$. Оскільки $x \notin \mathfrak{m}^2$, то $x_0 \notin \mathfrak{m}$. Так як x не міститься в жодному іншому максимальному ідеалі, то x_0 – оборотний елемент кільця R. Отже, $yR \subsetneq xR$. Отримане протиріччя з вибором елемента y доводить твердження.

<u>Твердження 2</u>. Для довільних двох різних максимальних ідеалів

$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ області Безу R з включення $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{n}$, $k \in N$ випливає рівність $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Доведення. Очевидно, $R/\mathfrak{n}$ – поле. Якщо $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = R$, то з включення $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{n}$ випливає, що $\bar{m}^k = \bar{0}$ в $R/\mathfrak{n}$ для будь-якого $m \in \mathfrak{m}$. Це неможливо, тому $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Твердження 3. Нехай R – кільце нормування і $\mathfrak{m} \in mspec\, R$. Тоді або $\mathfrak{m}$ – головний, або $\mathfrak{m}$ – ідемпотентний.

Доведення. Нехай $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. Оскільки ідеали кільця нормування утворюють ланцюг, то для довільного $m \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ маємо такі включення $\mathfrak{m}^2 \subset mR \subset \mathfrak{m}$. Оскільки R – локальне, то ідеал mR не міститься в жодному іншому максимальному ідеалі. В силу твердження 1 ідеал $\mathfrak{m}$ – головний.

Наслідок 1. Для будь-якого максимального ідеалу $\mathfrak{m}$ області Безу має місце одна з трьох можливостей:

1/ $\mathfrak{m}$ – головний;

2/ $\mathfrak{m}$ – ідемпотентний;

3/ справедливе включення $\mathfrak{m} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{n} \in mspec\, R \setminus \mathfrak{m}} \mathfrak{n}$.

Наслідок 2. У півлокальній області Безу кожний максимальний ідеал головний або ідемпотентний.

Справді, у півлокальному кільці включення $\mathfrak{m} \subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{n} \in mspec\, R \setminus \mathfrak{m}} \mathfrak{n}$ неможливе, оскільки максимальний ідеал, який міститься в об"єднанні скінченного числа максимальних ідеалів, збігається хоча б з одним із них.

Означення. Назвемо максимальний ідеал $\mathfrak{m}$ кільця R локально головним, якщо ідеал $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ є головним в $R_{\mathfrak{m}}$.

Теорема 1. Кожний неідемпотентний максимальний ідеал $\mathfrak{m}$ області Безу R є локально головним.

Доведення. Нехай це не так. Оскільки $R_{\mathfrak{m}}$ – кільце нормування, то в силу твердження 3 $\mathfrak{m}^2 R_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}}$. В силу неідемпотентності $\mathfrak{m}$ існує елемент $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Оскільки $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^2 R_{\mathfrak{m}}$, то $a = m\frac{r}{s}$, де $m \in \mathfrak{m}^2$, $s \notin \mathfrak{m}$. Звідси $as = mr$. Нехай $aR + mR = bR$. Тоді $a = a_0 b$, $m = m_0 b$. Оскільки a, $m \in \mathfrak{m}$, то $b \in \mathfrak{m}$. Покажемо, що $m_0 \in \mathfrak{m}$. Якщо це не так, то $\mathfrak{m} + m_0 R = R$. Звідси $t + m_0 c = 1$, де $t \in \mathfrak{m}$, $c \in R$. Тому $bt + bm_0 c = b$. Оскільки $bt \in \mathfrak{m}^2$ і $bm_0 = m \in \mathfrak{m}^2$, то $b \in \mathfrak{m}^2$. Це неможливо, оскільки $a \notin \mathfrak{m}^2$ і $a = ba_0$. Отже, $m_0 \in \mathfrak{m}$. Таким чином, із рівності $as = mr$ отримаємо $a_0 s = m_0 r$. Ми вже довели, що $m_0 \in \mathfrak{m}$, а тому $a_0 s \in \mathfrak{m}$. Але $s \notin \mathfrak{m}$ і, отже, $a_0 \in \mathfrak{m}$. Останнє неможливо, оскільки $a \notin \mathfrak{m}^2$ по умові з $a = ba_0 \in \mathfrak{m}^2$. Врешті-решт отримаємо, що рівність $m^2 R_m = m R_m$ неможлива. Отже, m – локально головний ідеал кільця R.

Твердження 4. Нехай P – простий ідеал області Безу. Тоді ідеал $P^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$ є простим.

Доведення. Якщо P ідемпотентний, то $P^\infty = P$, і твердження очевидне. Покажемо, що з умови $P^2 \neq P$ випливає умова $P^n \neq P^{n+1}$ при будь-якому натуральному n. Справді, якщо $P^n = P^{n+1}$, то для довільного ненульового елемента $p \in P$ існує такий елемент $p' \in P$, що $p^n = p'^{n+1} \cdot r$, де $r \in R$. Взявши замість p' найбільший спільний дільник елементів p і p', можемо вважати, що $p = p's$. Тоді отримаємо $p'^n s^n = p'^{n+1} r_2$, або, що те саме, $s^n = p' r \in P$. Звідси $s \in P$ і $p = p's \in P^2$. Тому $P = P^2$, що суперечить припущенню. Отже, ланцюг

$$P \supset P^2 \supset P^3 \supset \ldots \supset P^n \supset \ldots$$

строго спадає. Тому для довільного елемента $a \in P \setminus P^\infty$ існує і єдиний номер $\nu(a)$, такий, що $a \in P^{\nu(a)}$ і $a \notin P^{\nu(a)+1}$. Доведемо тепер, що P^∞ – простий ідеал. Нехай a, $b \in R$, $a \notin P^\infty$, $b \notin P^\infty$, але $ab \in P^\infty$. Тоді $a = p_1^{\nu(a)} \cdot u$, де $u \notin P$, і $b = p_2^{\nu(b)} v$, де $v \notin P$, причому $p_1 \in P \setminus P^2$ і $p_2 \in P \setminus P^2$. Звідси $ab = p_1^{\nu(a)} p_2^{\nu(b)} \cdot u \cdot v$ і $uv \notin P$. Оскільки $ab \in P^\infty$, то $ab \in P^k$ для будь-якого натурального числа k. Візьмемо $k_0 > \nu(a) + \nu(b)$. Тоді $p_1^{\nu(a)} p_2^{\nu(b)} u \cdot v \in P^{k_0}$, тобто $p_1^{\nu(a)} p_2^{\nu(b)} u \cdot v = p_3^{k_0} \cdot r$, $r \in R$. Нехай $p_1 R + p_2 R + p_3 R = p_4 R$, тоді $p_1 = p_4 \alpha$, $p_2 = p_4 \beta$, $p_3 = p_4 \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ і $p_4^{\nu(a)} p_4^{\nu(b)} \alpha^{\nu(a)} \beta^{\nu(b)} u \cdot v = p_4^{k_0 - \nu(a) - \nu(b)} \cdot r' \in P$. Звідси $\alpha^{\nu(a)} \beta^{\nu(b)} u \cdot v = p_4^{k_0 - \nu(a) - \nu(b)} r' \in P$. Оскільки u, $v \neq P$, то $\alpha^{\nu(a)} \beta^{\nu(b)} \in P$. Тим самим або $\alpha \in P$, або $\beta \in P$. Це значить, що $p_1 \in P^2$ або $p_2 \in P^2$, що суперечить вибору елементів p_1 і p_2.

Твердження 5. Нехай R – область Безу і $P_1 \supsetneqq P_2$ – прості ідеали. Тоді $P_1 P_2 = P_2$.

Доведення. Виберемо систему твірних ідеалу P_1, які не належать ідеалу P_2, тобто $P_1 = \{d_\alpha\}_{\alpha \in J}$, де $d_\alpha \notin P_2$ для довільного $\alpha \in J$. Якщо $p_2 \in P_2$, то маємо $p_2 = d_\alpha r \in P_2$. Оскільки $d_\alpha \notin P_2$, то $r \in P_2$. Таким чином, $p_2 \in P_2 P_1$, тобто $P_2 \subset P_1 P_2$. Обернене включення очевидне, і тому $P_2 = P_2 P_1$. Твердження доведено.

Умова Безу у твердженні суттєва. Якщо кільце R – це $R = P[x,y]$, де P – поле. Тоді $P_2 = (x) \subset (x,y) = P_1$, але $P_2 P_1 \neq P_2$.

Наведемо приклади областей Безу R , у яких кожен максимальний ідеал m є не ідемпотентним і не головним, а отже, володіє властивістю

$$m \subsetneq \bigcup_{n \in mspecR \setminus m} n$$

1.Нехай R – кільце цілих аналітичних функцій, а S – множина цілих функцій, які задаються многочленами. Очевидно, що S – мультиплікативно замкнена множина. Тоді $R_{s\infty}$ має потрібні властивості. Те, що R_s є кільцем Безу і що $\bigcap_{n=1} m^n \in specR$ для кожного неголовного максимального ідеалу m , доведено у дослідженні [4].

2. Нехай R – ультрастепінь не адекватної області Безу з безмежним максимальним спектром, у якій немає ідемпотентних максимальних ідеалів щодо неголовного ультрафільтру. Нехай S – множина всіх факторіальних елементів області R . Очевидно, що S – мультиплікативно замкнена множина. Тоді R_s – область Безу з вказаною властивістю, яка не є адекватною. Приклад неадекватної області Безу, в якій кожний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, побудований у статті [2]. Вона володіє потрібними нам властивостями.

Актуальність наведених прикладів мотивована змістом праці [1].

1. B r a n d a l W. Constructing Bezout domains // Rocky Mountain J. Math. 1976. Vol. 6. N 3. P. 383-399. 2. B r e w e r J., C o n r a d P., M o n t g o m e r y P. Lattice ordered groups and a conjecture for adequate domains // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. N 3. P. 31-35.
3. F i s c h e r T.S. The prime spectrum of a Bezout ring // Commun. Alg. 1978. Vol. 6. P. 1715-1739. 4. H e n r i k s e n M. On the prime ideals of the ring of entire functions // Pacif. J. Math. 1953. Vol. 3. N 3. P. 711-720. 5. L e w i s W.J., O h m J. The ordering of specR. // Can. J. Math. 1976. Vol. 28. N 3. P. 820-835.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.89

УДК 512.8

В.Р.Зелісько

ПРО ФАКТОРИЗАЦІЮ РЕГУЛЯРНИХ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Нехай $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ – регулярний симетричний матричний многочлен степеня $2r$, де $A_i \in M_n(\mathbb{C})$, тобто [4] $A(x) = A^{\triangledown}(x)$, $A^{\triangledown}(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i A_i^* x^i$, A_i^* – ермітово спряжена матриця до A_i.

Відомо, що для $A(x)$ існують такі оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$, що

$$P(x)\, A(x)\, Q(x) = S(A) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \qquad /1/$$

де $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Матрицю $S(A)$ називають формою Сміта матричного многочлена $A(x)$, а многочлени $\varepsilon_i(x)$ – його інваріантними множниками.

Припустимо, що кожний інваріантний множник $\varepsilon_i(x)$ або не має коренів на уявній осі, або має їх, але кратність кожного такого кореня – парне число. Тоді форму Сміта $S(A)$ можна зобразити у вигляді

$$S(A) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\, I \operatorname{diag}(\varphi_1^{\triangledown}(x), \ldots, \varphi_n^{\triangledown}(x)), \qquad /2/$$

де $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $I = \operatorname{diag}(\pm 1, \ldots \pm 1)$.

Таку факторизацію форми Сміта $S(A)$ матричного многочлена $A(x)$ називають допустимою.

<u>Теорема</u>. Нехай $S(A)$ володіє допустимою факторизацією виду /2/. Тоді для $A(x)$ має місце факторизація

$$A(x) = B(x)\, C\, B^{\triangledown}(x), \qquad /3/$$

де $B(x)$ – унітальний матричний многочлен степеня r з формою Сміта $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, а C – неособлива ермітова матриця, причому $B(x)$ – єдиний при фіксованій факторизації /2/, тоді і лише тоді, коли $P^{-1}(x)\Phi(x)$ регуляризується справа, тобто в позначеннях із праць [2, 3]:

$$\det M_{P(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^{r-1} \|}(\Phi) \neq 0. \qquad /4/$$

8-2498

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Якщо має місце факторизація /3/, то умова /4/ виконується згідно з результатами із праць [1], [3]. Д о с т а т н і с т ь. Із рівностей /1/ і /2/ отримуємо $A(x)=P^{-1}(x)\Phi(x)I\Phi^{\nabla}(x)\,Q^{-1}(x)$. Нехай $G(x)=Q^{-1}(x)\,(P^{-1}(x)^{\nabla})^{-1}$. Як показано у праці [4], існує невироджена над $\mathbb{C}[x]$ симетрична матриця $H(x)$, що $\Phi^{\nabla}(x)G(x)=H(x)\Phi^{\nabla}(x)$. Тоді

$$A(x)=P^{-1}(x)\Phi(x)I\,H(x)\Phi^{\nabla}(x)\,P^{-1}(x)^{\nabla}.$$

З цієї рівності на основі /4/ одержимо

$$A(x)=P^{-1}(x)\Phi(x)R(x)R^{-1}(x)I\,H(x)\Phi^{\nabla}(x)\,P^{-1}(x)^{\nabla},$$

де $P^{-1}(x)\,\Phi(x)\,R(x)=B(x)$ – унітальний матричний многочлен степеня r. Тоді $\Phi^{\nabla}(x)\,P^{-1}(x)^{\nabla}=R^{-1}(x)^{\nabla}B^{\nabla}(x)$, а отже,

$$A(x)=B(x)R^{-1}(x)\,I\,H(x)\,R^{-1}(x)^{\nabla}B^{\nabla}(x).$$

Враховуючи те, що старший коефіцієнт $B(x)$ рівний E, а $B^{\nabla}(x)$ – E або $(-E)$, бачимо, що $R^{-1}(x)I\,H(x)R^{-1}(x)^{\nabla}=\pm A_0$, тобто неособлива ермітова матриця. Єдиність $B(x)$ випливає із теореми 5 праці [1].

Якщо $A(x)$ – дійсний симетричний матричний многочлен, то згідно з працями [3,4] умова /4/ є необхідною і достатньою для існування дійсної симетричної C і $B(x)\in M_n(\mathbb{R}[x])$, які задовольняють факторизацію /3/ для кожної допустимої факторизації /2/, де $\varphi_i(x)\in\mathbb{R}[x]$.

Зауважимо, що коефіцієнти матричного многочлена $B(x)=Ex^{r}-B_1x^{r-1}-\ldots-B_r$ знаходяться за формулою

$$\left\|\begin{matrix}B_r\\ \ldots\\ B_1\end{matrix}\right\|=\left(M_{P(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\Phi)\right)^{-1}M_{P(x)x^{r}}(\Phi). \qquad /5/$$

Як наслідок, із теореми при $r=1$ на основі узагальненої теореми Безу одержуємо умови існування розв"язку рівняння $X^2A_0+XA_1+A_2=0$ / де A_0 і A_2 – ермітові матриці, а A_1 – косоермітова/, єдиного з жордановою формою, відповідною Φ, який знаходиться за формулою /5/.

Зауваження. Якщо $S(A)$ можна зобразити у вигляді

$$S(A)=diag(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))\,I\,diag(\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x)),$$

де $dian(\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x))$ еквівалентна матриці $diag(\psi_1^{\nabla}(x),\ldots,\psi_n^{\nabla}(x))$, то у відповідній факторизації /3/ унітальний множник $B(x)$ вже не єдиний [1], а залежить від скінченного числа змінних, які приєднуються до поля $\mathbb{C}$ і можуть набувати допустимих значень із $\mathbb{C}$.

1. З е л и с к о В.Р. Вопросы факторизации матричных многочленов //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1983. Вып. 17. С.28-33. 2. К а з і м і р с ь к и й П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К., 1981. 3. Щ е д р и к В.П. Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена //Укр. мат. журн. 1987. Т.39. № 3. С.370-373. 4. Я к у б о в и ч В.А. Факторизация симметричных матричных многочленов //Докл. АН СССР. 1970. Т.194. № 3. С.532-535.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 515.12

Т.М.Радул

ПРО МОНАДИ, ПОРОДЖЕНІ ДЕЯКИМИ НОРМАЛЬНИМИ ФУНКТОРАМИ

Всі простори і відображення беремо з категорії компактів $Comp$. У цій статті мова буде йти про характеризацію алгебр монад, породжених ендофункторами $\tilde{G}$, $\tilde{N}$, $\tilde{N}_k$, що діють у категорії $Comp$. Всі загальні означення, що стосуються монад і їх алгебр, можна знайти у праці [4]. Функтори $\tilde{G}$, $\tilde{N}$, $\tilde{N}_k$ є нормальними аналогами слабко нормальних функторів G, N, N_k [1,2].

Для простору X приймаємо $\tilde{G}X = \{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid B \in \mathcal{A}$ для кожної $B \in \exp X$ такої, що $B \supset A$ для деякої $A \in \mathcal{A}$ і $B \subset \cup \mathcal{A}\}$. Топологія в $\tilde{G}X$ індукується з простору $\exp^2 X$. Існує ретракція $\gamma X : \exp^2 X \to \tilde{G}X$, що задається формулою $\gamma X(\mathcal{A}) = \{B \in \exp X \mid B \subset \cup\mathcal{A}$ і існує $A \in \mathcal{A}$ таке, що $B \supset A\}$. Безпосередньо перевіряється, що γX - неперервне відображення. Отже, $\tilde{G}X$ - компакт і $\tilde{G}$ є підфунктором $\exp^2$.

Введемо два відображення $\tilde{\cap}$ і $\tilde{U} : \exp \tilde{G}X \to \tilde{G}X$ наступним чином: $\tilde{U}(\alpha) = \gamma X(\cup \alpha)$ і $\tilde{\cap}(\alpha) = \cap\{\gamma X(\mathcal{A} \cup \{A_\alpha\}) \mid \mathcal{A} \in \alpha\}$, де $A_\alpha = \cup\{\cup\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \alpha\}$. Неперервність $\tilde{\cap}$ і $\tilde{U}$ перевіряється безпосередньо.

Із загальної теорії функторів [3] випливає існування природного перетворення $\eta : Id \to \tilde{G}$, компоненти якого будуть мати вигляд $\eta X(a) = \{\{a\}\}$, де $a \in X$.

Введемо відображення $\mu X : \tilde{G}^2 X \to \tilde{G}X$ таким чином: $\mu X(\mathfrak{A}) = \tilde{U}(\tilde{\cap}\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A})$, де $\mathfrak{A} \in \tilde{G}^2 X$. Легко бачити, що $\{\mu X\}$ - природне перетворення.

<u>Лема 1</u>. Трійка $(\tilde{G}, \eta, \mu)$ утворює монаду на $Comp$.

Доведення. Необхідно перевірити тотожності /1/ $\mu\circ\eta\tilde{G} = \mu\circ\tilde{G}\eta = 1_{comp}$. Нехай $\mathcal{A}\in\tilde{G}X$. Тоді $\eta\tilde{G}X(\mathcal{A}) = \{\{\mathcal{A}\}\}$. Очевидно, що $\mu X\circ\eta\tilde{G}X(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Разом з тим $\mu X\circ\tilde{G}\eta X(\mathcal{A}) = \tilde{U}\{\tilde{\bigcap}\alpha \mid \alpha\in \exp\tilde{G}X$ і $\alpha = \{\{\{a\}\} \mid a\in A\}$ для деякого $A\in\mathcal{A}\} = \tilde{U}\{\{A\} \mid A\in\mathcal{A}\} = \mathcal{A}$. Тотожність виконується.

/2/ $\mu\circ\mu\tilde{G} = \mu\circ\tilde{G}\mu$. Нехай $\tilde{\mathfrak{A}}\in\tilde{G}^3X$. Тоді $\mu X\circ\mu\tilde{G}X(\tilde{\mathfrak{A}}) = \gamma X(\{A\in\exp X$ існує $\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathfrak{A}}$ і існує $\alpha\in\tilde{\bigcap}\tilde{\alpha}$ таке, що $A\in\tilde{\bigcap}\alpha\}) = \gamma X(\mathcal{A}_1)$, а $\mu X\tilde{G}(\mu X)(\mathfrak{A}) =$
$= \gamma X(\{A\in\exp X \mid A\in\tilde{\bigcap}\mu X\tilde{\alpha}$ для деякого $\tilde{\alpha}\in\tilde{\mathfrak{A}}\} = \gamma X(\mathcal{A}_2)$. Неважко переконатися, що $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, а отже, тотожність справедлива. Лема доведена.

Визначимо NX як підпростір $\tilde{G}X$, що складається зі зчеплених систем /система називається зчепленою, якщо будь-які дві її множини мають непорожній перетин; k - зчепленою, якщо будь-які k її множин мають непорожній перетин/; $\tilde{N}_kX$ - з k зчеплених систем. Простір $\bigcap_{k=3}^{\infty}\tilde{N}_kX$ позначимо через $\tilde{N}_\infty X$, який складається з систем з $\tilde{G}X$, що мають непорожній перетин. Неважко переконатися, що функтори $\tilde{N}$, $\tilde{N}_k$, $\tilde{N}_\infty$ доповнюються до монад природними перетвореннями η і μ, введеними вище. Отже, для цих монад справедливі включення

$$\tilde{N}_\infty \subset \ldots \subset \tilde{N}_k \subset \tilde{N}_{k-1} \subset \ldots \subset \tilde{N}_3 \subset \tilde{N} \subset \tilde{G}.$$

Для характеризації категорії алгебр монади $\tilde{G}$ доведемо таку теорему:

Теорема 1. (X,ξ) - $\tilde{G}$-алгебра тоді і лише тоді, коли на X існують дві структури півгратки Лоусона, зв"язані між собою цілком дистрибутивністю, для яких $\xi(\mathcal{A}) = \bigvee\{\bigwedge A \mid A\in\mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A}\in\tilde{G}X$.

Доведення. Нехай (X,ξ) - $\tilde{G}$-алгебра, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\tilde{G}X$. Покажемо, що $\xi(\mathcal{A}\tilde{\bigcap}\mathcal{B}) = \xi(\{\{\xi(\mathcal{A})\}\}\tilde{\bigcap}\{\{\xi(\mathcal{B})\}\})$. Нехай $\xi(\mathcal{A}) = a$, а $\xi(\mathcal{B}) = b$. Розглянемо $\mathfrak{A}\in\tilde{G}^2X$ і $\mathfrak{A} = \{\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}\}$. Тоді $\mu X(\mathfrak{A}) = \mathcal{A}\tilde{\bigcap}\mathcal{B}$ і $\tilde{G}(\xi)(\mathfrak{A}) = \{\{a,b\}\} = \{\{a\}\}\tilde{\bigcap}\{\{b\}\}$. Отже, $\xi(\mathcal{A}\tilde{\bigcap}\mathcal{B}) = \xi\circ\mu X(\mathfrak{A}) = \xi\circ\tilde{G}(\xi)(\mathfrak{A}) = \xi(\{\{a\}\}\tilde{\bigcap}\{\{b\}\})$.

Тоді можна коректно визначити півграткову операцію $\bigwedge$ формулою $\bigwedge A = \xi(\tilde{\bigcap}\{\{\{a\}\} \mid a\in A\})$ для кожної $A\in\exp X$. Всі аксіоми півгратки перевіряються безпосередньо. Очевидно, що $\bigwedge$ - неперервне відображення з $\exp X$ в X. Отже, $(X,\bigwedge)$ - Лоусонова півгратка.

Друга структура будується аналогічно по $\tilde{U}$. Цілком дистрибутивність введених операцій випливає цілком з дистрибутивності

$\tilde{\cap}$, $\tilde{\cup}$ і з тотожності $\xi \circ \mu X = \xi \circ \tilde{G}\, \xi$. За побудовою $\wedge$ і $\vee$, $\xi(\mathcal{A}) = \vee\{\wedge A \mid A \in \mathcal{A}\}$ для кожної $\mathcal{A} \in \tilde{G}X$. Необхідність доведена.

Нехай X – компакт зі вказаними структурами. Визначимо $\xi : \tilde{G}X \to X$ формулою $\xi(\mathcal{A}) = \vee\{\wedge A \mid A \in \mathcal{A}\}$. Очевидно, що ξ – неперервне відображення. Тотожність $\xi \circ \eta X = 1_X$ очевидна. Тотожність $\xi \circ \mu X = \xi \circ G(\xi)$ випливає з цілком дистрибутивності $\vee$ і $\wedge$. Теорема доведена.

Безпосередньо перевіряється, що морфізми $\tilde{G}$ -алгебр характеризуються повними гомоморфізмами по обидвох операціях. Отже, одержана характеризація категорії $\tilde{G}$ -алгебр у термінах теорії компактних півграток.

Нехай X – компакт з частковим порядком. Назвем X k-арною в-множиною Лоусона, якщо для кожної $A \in \exp X$, для кожних k точок якої існує $\sup$, існує $\sup A$ і відображення $\sup : \mathcal{A} \to X$ неперервне, де $\mathcal{A} \subset \exp X$, на якій визначена операція $\sup$. У випадку $k = 2$ будемо говорити про бінарність. Якщо у попередньому означенні $\sup$ існує для тих $A \in \exp X$, для кожної скінченної множини точок якої існує $\sup$, то назвем X ∞ -арною в-множиною Лоусона.

<u>Лема 2</u>. Нехай X – $\tilde{N}$ -алгебра, $\xi(\mathcal{A}_1) = \xi(\mathcal{A}_2)$, $\xi(\mathcal{B}_1) = \xi(\mathcal{B}_2)$, де $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \tilde{N}X$ і $\mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2 \in \tilde{N}X$. Тоді $\xi(\mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1) = \xi(\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)$.

<u>Доведення</u>. Розглянемо $\mathfrak{A}_1 \in \tilde{N}^2 X : \mathfrak{A}_1 = \{\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2\}, \{\mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2\}, \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1\}\}$. Тоді $\mu X(\mathfrak{A}_1) = (\mathcal{A}_1 \tilde{\cap} (\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)) \tilde{\cup} (\mathcal{B}_1 \tilde{\cap} (\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)) = (\mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1) \tilde{\cap} (\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)$, а $\tilde{N}(\xi)(\mathfrak{A}_1) = \gamma X(\{\{\xi(\mathcal{A}_1), \xi(\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)\}, \{\xi(\mathcal{B}_1), \xi(\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)\}\}) = \gamma X(\{\{\xi(\mathcal{A}_2), \xi(\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)\}, \{\xi(\mathcal{B}_2), \{\xi(\mathcal{B}_2), \xi(\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)\}\}) = \tilde{N}(\xi)(\mathfrak{A}_2)$, де $\mathfrak{A}_2 = \gamma \tilde{N} X\{\{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2\}, \{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2 \tilde{\cup} \mathcal{A}_2\}\}$. Разом з тим $\mu X(\mathfrak{A}) = (\mathcal{A}_2 \tilde{\cap} (\mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1)) \tilde{\cup} (\mathcal{B}_2 \tilde{\cap} (\mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1)) = \tilde{N}(\xi)(\mathfrak{A}_3)$, де $\mathfrak{A}_3 = \gamma \tilde{N} X\{\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1\}, \{\mathcal{B}_1, \mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1\}\}$. Але $\mu X(\mathfrak{A}_2) = \mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2$, а $\mu X(\mathfrak{A}_3) = \mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1$, отже, $\xi(\mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{B}_1) = \xi(\mathcal{A}_2 \tilde{\cup} \mathcal{B}_2)$. Лема доведена.

Наступна теорема дає характеризацію $\tilde{N}$ -алгебр.

<u>Теорема 2</u>. X – $\tilde{N}$ -алгебра тоді і лише тоді, коли на X існує структура півгратки Лоусона $(\inf)$ і структура бінарної в-множини Лоусона $(\widetilde{\sup})$, які пов"язані цілком дистрибутивністю і для яких $\xi(\mathcal{A}) = \widetilde{\sup}\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A} \in \tilde{N}X$.

<u>Доведення</u>. Нехай X – $\tilde{N}$ -алгебра. Структура півгратки Лоусона будується аналогічно теоремі I. Побудуємо структуру бінарної в-множини Лоусона. Введемо на X частковий порядок: $x \leqslant y$

тоді і тільки тоді, коли існують $\mathcal{A}_1 \in \xi^{-1}(x)$, $\mathcal{A}_2 \in \xi^{-1}(y)$ такі, що $\xi(\mathcal{A}_1 \tilde{\cup} \mathcal{A}_2) = y$. Коректність такого визначення випливає з леми 2. Нехай $A \in \exp X$ і для будь-яких $a, b \in A$ існує $\sup\{a, b\}$. Побудуємо $\sup A$. Для кожної $a \in A$ визначим $a^+ \in \exp X : a^+ = \{b \mid a \leq b\}$. Оскільки для кожних двох точок A існує $\sup$, то $\mathcal{A} = \gamma X\{a^+ \mid a \in A\}$ буде зчепленою. Безпосередньо перевіряється, що $\xi(\mathcal{A}) = \tilde{\sup} A$.

Покажемо неперервність $\tilde{\sup}$. Для цього достатньо показати неперервність відображення $+ : X \to \exp X$, $+(a) = a^+$.

Нехай $a^+ \in \langle V \rangle$. Припустимо, що існує послідовність $\{a_i\}$, таких, що для кожного i існує $b_i \in a_i^+$ таке, що $b_i \notin V$ і $\{a_i\} \to a$. Оскільки X і $\tilde{N}X$ компакти, ми можемо вибрати підпослідовність $\{a_{i_k}, b_{i_k}\}$ таку, що $b_{i_k} \to b$ і існують $\mathcal{A}_{i_k} \in \xi^{-1}(a_{i_k})$ і $\mathcal{B}_{i_k} \in \xi^{-1}(b_{i_k})$ такі, що $\xi(\mathcal{A}_{i_k} \tilde{\cup} \mathcal{B}_{i_k}) = b_{i_k}$ і $\{\mathcal{A}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k}\} \to \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$. Тоді $\xi(\mathcal{A}) = a, \xi(\mathcal{B}) = b$ і $\xi(\mathcal{A} \tilde{\cup} \mathcal{B}) = b$. Отже, $b \in a^+ \subset V$, і ми одержали протиріччя. Відображення $+$ – неперервне. Отже, X – бінарна b-множина Лоусона. Цілком дистрибутивність випливає з тих самих міркувань, що і в теоремі 1. Необхідність доведена.

Достатність доводиться аналогічно достатності в теоремі 1 із зауваженням, що існування $\tilde{\sup}$ у структурному відображенні випливає зі зчепленості систем. Теорема доведена.

Зауважимо, що лема 2 справедлива і для $\tilde{N}_k$, $\tilde{N}_\infty$ -алгебр. Цілком аналогічно теоремі 2 доводяться дві наступні теореми.

<u>Теорема 3</u>. $(X, \xi) \in \tilde{N}_k$ -алгеброю тоді і лише тоді, коли на X існує структура півгратки Лоусона і структура k-арної в-множини Лоусона, які пов"язані цілком дистрибутивністю і для яких $\xi(\mathcal{A}) = \tilde{\sup}\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A} \in \tilde{N}_k X$.

<u>Теорема 4</u>. $(X, \xi) \in \tilde{N}_\infty$ -алгеброю тоді і лише тоді, коли на X існує структура півгратки Лоусона і структура ∞-арної в-множини Лоусона, які пов"язані цілком дистрибутивністю і для яких $\xi(\mathcal{A}) = \tilde{\sup}\{\inf A \mid A \in \mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A} \in \tilde{N}_\infty X$.

Очевидно, що морфізми $\tilde{N}$ -, $\tilde{N}_k$ -, $\tilde{N}_\infty$ -алгебр характеризуються повними гомоморфізмами відповідних структур.

1. И в а н о в А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сиб. мат. журн. 1986. Т.27. № 6. С.95-110. 2. М о и с е е в Е.В. О пространствах замкнутых гиперпространств включения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математики, механики. 1988. № 3. С.54-57. 3. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 4. B a r r M., W e l l s Ch. Toposes, triples and theories. New York, 1985.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89

УДК 515.12

Т.О.Банах

ПРО ПРЯМІ ГРАНИЦІ ІТЕРОВАНИХ ФУНКТОРІВ

Нехай $\mathscr{C}$ – підкатегорія категорії $\mathscr{D}$, замкненої щодо зліченних прямих границь, і $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ – ендофунктор, для якого існує природне перетворення $\eta: 1_{\mathscr{C}}\to F$. Виникає питання: скільки існує попарно неізоморфних функторів вигляду $\varinjlim\{F^n, f_n\}:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, де $f_i\in\{F^i\eta, \eta F^i\}$. Теорема 1 стверджує, що таких функторів не більше ніж зліченна кількість; теорема 2 дає умову на функтор F, при виконанні якої принаймні два розглядувані функтори не є ізоморфними.

Відзначимо, що конструкції прямих границь ітерованих функторів активно досліджуються з точки зору їх застосувань у нескінченновимірній топології [1, 2, 6].

Кожен морфізм f_n зобразимо у вигляді $f_n = F^{n\varepsilon_n}\eta F^{n(1-\varepsilon_n)}$, де $\varepsilon_n\in\{0,1\}$, і для функтора $G=\varinjlim\{F^n, f_n\}$ визначимо характеристичні числа $\sigma_1(G)=\sum_i\varepsilon_i\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ і $\sigma_2(G)=\sum_i(1-\varepsilon_i)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

<u>Теорема 1</u>. Нехай $G_1=\varinjlim\{F^n, f_n'\}$, $G_2=\varinjlim\{F^n, f_n''\}$. Якщо $\sigma_i(G_1) = \sigma_i(G_2)$, $i = 1,2$, то функтори G_1 і G_2 природно ізоморфні.

<u>Доведення</u>. Досить уважно розглянути діаграму

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\eta F"] \arrow[d, "F\eta"'] & F^2 \arrow[r, "\eta F^2"] \arrow[d, "F^2\eta"'] & F^3 \arrow[r] \arrow[d, "F^3\eta"'] & \cdots \\
F^2 \arrow[r, "\eta F^2"] \arrow[d, "F^2\eta"'] & F^3 \arrow[r, "\eta F^3"] \arrow[d, "F^3\eta"'] & F^4 \arrow[r] \arrow[d, "F^4\eta"'] & \cdots \\
F^3 \arrow[r, "\eta F^3"] \arrow[d] & F^4 \arrow[r, "\eta F^4"] \arrow[d] & F^5 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots, \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

комутативність якої випливає з природності перетворення η.

Всі необхідні далі поняття з теорії функторів у категорії компактів $Comp$ можна знайти у працях [3, 5]. Нехай $F: Comp\to Comp$ – неперервний мономорфний функтор, що зберігає точку, прообрази та перетини. Оскільки $F^n = F^{n-i}(F^i)$, то можна розглядати природне перетворення /не обов"язково неперервне/ $\mathrm{supp}^i: F^n\to\exp F^i$, $\mathrm{supp}^i(a) = \bigcap\{A\in\exp F^i X \mid a\in F^{n-i}(A)\}$.
Нескладно перевірити, що виконуються твердження:

а/ $\mathrm{supp}^j X(F^n\eta X(a)) = F^{j-1}\eta X(\mathrm{supp}^{j-1}X(a))$, $a\in F^n X$, $1\le j\le n$;

б/ якщо $a\in F^nX$ і $supp^1X(a)\subset\eta X(X)$, то $a=F^{n-1}\eta(b)$ для деякого $b\in F^{n-1}X$.

<u>Лема</u>. Нехай $F\supset SP^2$. Тоді для кожного $n\geq 2$ не існує природного вкладення $\gamma: F^2\to F^n$, для якого $F^{n-1}\eta\circ\dots\circ F\eta=\gamma\cdot\eta F$.

<u>Доведення</u>. Для точок $x,y\in X$ через $[x,y]\in FX$ позначимо образ точки $\{x,y\}\in SP^2X$ при вкладенні $SP^2X\hookrightarrow FX$. Зауважимо, що $[x,x]=\eta X(x)$ /це випливає з єдиності природного перетворення $\eta: Id\to F$, [3]). Приймемо $Y=\{0,1\}$, $X=Y^2=\{0,1\}^2=$ $=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Нехай $a=[[(0,0),(1,0)],[(0,1),(1,1)]]\in F^2X$. Зауважимо, що $F^2(pr_1)(a)=\eta FY([0,1])$ /де $pr_1:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$ – проекція на І-й співмножник/. Використовуючи природність перетворення γ, можна записати $F^n(pr_1)\circ\gamma X(a)=\gamma Y\circ F^2(pr_1)(a)=\gamma Y\circ$ $\circ\eta FY([0,1])=F^{n-1}\eta Y\circ\dots\circ F\eta Y([0,1])=b$. Зауважимо, що $supp^i(b)=\eta F^{i-1}Y\circ\dots\circ\eta Y(\{0,1\})$, $0\leq i\leq n-1$.
Оскільки $supp^1: F^n\to expF$ – природне перетворення, то $exp\cdot F(pr_1)\circ supp^1\gamma X(a)\subset supp^1(F^n(pr_1)\gamma X(a))=\eta Y(Y)$, звідки випливає, що $supp^1(\gamma X(a))\subset F(\{(0,0),(0,1)\})\cup F(\{(1,0),(1,1)\})$.
Нехай $\alpha\in supp^1(\gamma X(a))$. Покажемо, що $\alpha\in\eta X(X)$. Для визначеності можна вважати, що $\alpha\in F(\{(0,0),(0,1)\})$. Якщо припустити, що $supp\,\alpha=\{(0,0),(1,0)\}$, то, оскільки точка $a\in F^2X$ інваріантна щодо перестановки f елементів $(0,0)$ і $(1,0)$ в X, $supp^1(F^n(f)\times$ $\times\gamma X(a))=supp^1(\gamma X(a))=F^1(f)(supp^1\gamma X(a))$. Але $F^1(f)(\alpha)\notin$ $\notin supp^1\gamma X(a)$, оскільки $supp(F(f)(\alpha))=\{(1,0),(0,1)\}$, звідки випливає, що $F(f)(\alpha)\notin F(\{(0,0),(0,1)\})\cup F(\{(1,0),(1,1)\})$, а отже і $F(f)(\alpha)\notin supp^1\gamma X(a)$. Значить, $supp^1\gamma X(a)\subset\eta X(X)$.
Аналогічно можна показати, що $supp^i\gamma X(a)\subset\eta F^{i-1}X\circ\dots\circ\eta X(X)$ при $1\leq i\leq n-1$. Оскільки $supp^{n-1}\gamma X(a)\subset\eta F^{n-2}X\circ\dots\circ\eta X(X)$, то існує $c\in FX$ таке, що $\gamma X(a)=F^{n-1}\eta\circ\dots\circ F\eta X(c)$. Отже, $\gamma X(\eta FX(c))=\gamma X(a)$ і $\eta FX(c)\neq a$, тобто γX – не мономорфізм.
Лема доведена.

З леми легко випливає така теорема.

<u>Теорема 2</u>. Нехай $F: Comp\to Comp$ – неперервний, мономорфний функтор, що зберігає точку, прообрази і перетини і $SP^2\subset F$. Тоді функтори $G_1=\varinjlim\{F^n, F^n\eta\}$ і $G_2=\varinjlim\{F^n, \eta F^n\}$ неізоморфні.

<u>Зауваження</u>. Тим самим способом, яким ми доводили лему, можна довести, що не існує природного вкладення $\alpha: F^n\to F^m$, $n\leq m$, такого, що $F^{m-1}\eta\circ\dots\circ F^n\eta\circ F^{n-1}\eta=\alpha\circ\eta F^{n-1}$. З цього факту випливає, що функтори $G=\varinjlim\{F^n, f_n\}$, де $f_i=F^i\eta$ при $i\geq n_0$, попарно неізоморфні, якщо тільки їх характеристичні

числа різні. Тобто насправді існує зчисленна сім"я попарно неізоморфних функторів виду $\varinjlim \{F^n, f_n\}$, де $f_n \in \{F^n\eta, \eta F^n\}$.

Відзначимо нарешті, що кожен нормальний функтор містить у ролі підфунктора функтор $(-)^2$ або SP^2 [4]. Для степеневого функтора $(-)^n$ всі функтори прямих границь ізоморфні, причому ізоморфізм здійснюється відповідними перестановками координат. Постає задача знаходження максимального класу функторів, для яких виконується твердження теореми 2.

1. Заричный М.М. Итерированные суперрасширения //Общая топология. Отображения топологических пространств. М., 1986. С.45-59. 2. Федорчук В.В. Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадичных функторов //Докл. АН СССР. 1988. Т.301, № 1. С.41-45. 3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988. 4. Шапиро Л.Б. Категорная характеристика гиперпространства //Успехи мат. наук. 1988. Т.43. Вып. 4. С.227-228. 5. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т.36. Вып. 3. С. 3-62. 6. Torunczyk H., West J. A Hilbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 89. N 2. P. 329-335.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.89

УДК 512.552.12

І.Я.Тушницький

КІЛЬЦЯ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ ПЕРЕДКРУЧЕННЯМИ

У даній статті знайдено критерій того, щоб комутативна адекватна область Безу була кільцем з локально визначеними передкрученнями. А саме, в такій області кожне нетривіальне передкручення однозначно визначається своїми локалізаціями щодо максимальних ідеалів тоді і тільки тоді, коли ця область h-локальна.

Для повноти викладу результату нагадаємо деякі необхідні поняття, які використовуються у статті. Надалі маємо, що R - комутативне кільце з $1 \neq 0$. Максимальний спектр кільця R позначаємо через $mspec(R)$. Найбільший спільний дільник елементів a і b кільця R позначатимемо через (a, b).

Кільце R називається областю Безу, якщо, по-перше, воно є областю цілісності, і по-друге, кожний скінченно-породжений ідеал кільця R є головним.

Передрадикальним фільтром у кільці R називається непорожня сім"я $\mathcal{F}$ ідеалів кільця R, яка задовольняє наступні умови:

T1. Якщо $\mathcal{I}\in\mathcal{F}$ і $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$, де $\mathcal{J}$ - ідеал в R, то $\mathcal{J}\in\mathcal{F}$;

T2. Якщо $\mathcal{I},\mathcal{J}\in\mathcal{F}$, то $\mathcal{I}\cap\mathcal{J}\in\mathcal{F}$;

T3. Якщо $\mathcal{I}\in\mathcal{F}$ і $r\in R$, то $(\mathcal{I}:r)\in\mathcal{F}$.

Якщо, крім цього, виконується умова:

T4. Якщо $\mathcal{I}$ - ідеал кільця R і $\mathcal{J}\in\mathcal{F}$, причому $(\mathcal{I}:r)\in\mathcal{F}$ при будь-якому $r\in\mathcal{J}$, то $\mathcal{I}\in\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ називається радикальним фільтром.

Кільце дробів кільця R щодо мультиплікативно замкненої множини $S=R\setminus m$, де m - максимальний ідеал, називається локалізацією кільця R щодо максимального ідеалу m і позначається через R_m.

Нехай $\mathcal{I}$ - ідеал кільця R. Тоді через $\mathcal{I}_m$ позначимо множину $\{\frac{a}{s}/a\in\mathcal{I}, s\in S\}$. Легко переконатися, що $\mathcal{I}_m$ є ідеалом в R_m.

Локалізацією передрадикального фільтра $\mathcal{F}$ щодо максимального ідеалу m називається множина $\{\mathcal{I}_m/\mathcal{I}\in\mathcal{F}\}$, яка позначається через $\mathcal{F}_m$. Відмітимо, що $\mathcal{F}_m$ є передрадикальним фільтром кільця R_m. Передрадикальний фільтр будемо називати ненульовим, якщо він не містить нульового ідеалу.

Як і у праці [1], через $\mathcal{G}_0(R)$ позначимо множину всіх ненульових передрадикальних фільтрів кільця R, а через $\mathcal{G}_0(R_m)$ - множину ненульових передрадикальних фільтрів кільця R_m, де $m\in mspec(R)$. Позначатимемо елементи декартового добутку $\prod_{m\in mspec(R)}\mathcal{G}_0(R_m)$ у вигляді сімейств $\langle g[m]\rangle$, де $g[m]\in\in\mathcal{G}_0(R_m)$ для кожного $m\in mspec(R)$.

Визначимо функцію $\Phi_0:\mathcal{G}_0(R)\to\prod_{m\in mspec(R)}\mathcal{G}_0(R_m)$ таким чином: $\Phi_0(\mathcal{F})=\langle\mathcal{F}_m\rangle$, де $\mathcal{F}\in\mathcal{G}_0(R)$.

Якщо визначене вище відображення Φ_0 біективне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними передкрученнями.

Відзначимо, що обмеження Φ відображення Φ_0 на множину радикальних фільтрів кільця R збігається з відображенням Φ, визначеним у праці [1]. Якщо відображення Φ біективне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними крученнями.

Область R називається h - локальною, якщо будь-який ненульовий простий ідеал кільця R міститься в єдиному максимальному ідеалі і кожний ненульовий елемент із R міститься лише у скінченному числі максимальних ідеалів.

Нехай R - комутативна область Безу. Ненульовий елемент a кільця R називається адекватним, якщо для кожного елемента $b\in R$ існують такі елементи c і d, що $a=c\cdot d$, причому $(c,b)=1$

і (d',b) – незворотний для будь-якого незворотного дільника d' елемента d.

Комутативна область Безу R називається адекватною областю, якщо кожний ненульовий елемент кільця R є адекватним [2].

Перейдемо до викладу основних результатів. У статті доведено [1], що відображення $\Phi: \mathcal{U}_0(R) \to \prod_{m \in mspec(R)} \mathcal{U}(R)^0_m$ на множині радикальних фільтрів кільця R бієктивне, якщо R – h – локальна область. Цей же факт легко переноситься на випадок відображення Φ_0.

Таким чином, справедлива наступна лема.

Лема 1. Якщо кільце R – h – локальна область, то воно є кільцем з локально визначеними передкрученнями.

Доведення цього факту точно таке ж, як і у праці [1].

Виявляється, що для адекватних областей Безу справедливе і обернене твердження. Для доведення цього факту спочатку доведемо наступну лему.

Лема 2. Нехай R – адекватна комутативна область Безу і J – ненульовий ідеал у R. Тоді для довільного $m \in mspec(R)$, який містить ідеал J, ідеал $J_m \cap R = J_0$ міститься лише в одному максимальному ідеалі m і, крім цього, $(J_0)_m = J_m$.

Доведення. Нехай a_0 – ненульовий елемент з J_0 і $m' \in mspec(R)$, причому $m' \neq m$. Тоді $m + m' = R$. Звідси випливає, що існують елементи $m_0 \in m$ і $m_0' \in m'$, такі, що $m_0 + m_0' = 1$. Так як R – адекватне, то і елемент $a_0 \in R$ – адекватний. Тому існують такі елементи r і s кільця R, що $a_0 = r \cdot s$, причому $rR + m_0'R = R$ і (s', m_0') – незворотний дл довільного незворотного дільника s' елемента s. Покажемо, що $s \notin m$. Якщо $s \in m$, то $(s, m_0) = t \in m$. Тоді існують елементи кільця R s_1 і m_1, такі, що $s = t \cdot s_1$ і $m_0 = t m_1$. Оскільки $m_0 + m_0' = 1$, то $(m_0, m_0') = 1$, а отже, і $(t, m_0') = 1$. З іншого боку, оскільки t – незворотний дільник елемента s, то t має незворотний спільний дільник з m_0', тобто (t, m_0') – незворотний. Отримана суперечність показує, що $s \notin m$. Отже, $r = \frac{a_0}{s} \in (J_0)_m$. Згідно з лемою 1.1 /1/ праці [1], $(J_0)_m = J_m$. А оскільки $r \in R$, то $r \in J_m \cap R = J_0$. Покажемо, що $r \notin m'$. Справді, якщо $r \in m'$, то $rR + m_0'R \subset m'$, а це суперечить умові $rR + m_0'R = R$. Таким чином, $r \in J_0 \setminus m'$, а це означає, що $J_0 \not\subseteq m'$. Оскільки m' – довільний максимальний ідеал, відмінний від m, то J_0 міститься лише в одному максимальному ідеалі m кільця R. Лема доведена.

Лема 3. Нехай R – адекватна комутативна область Безу. Тоді якщо R є кільцем з локально визначеними передкрученнями, то воно h – локальне.

Доведення. Оскільки R є кільцем з локально визначеними передкрученнями, то відображення Φ_0, визначене вище, є бієктивним. Із умови сюр"єктивності відображення Φ_0 згідно леми 2. з праці [1] випливає, що кожний простий ідеал в R міститься лише в єдиному максимальному ідеалі. Покажемо, що із припущення ін"єктивності відображення Φ_0 випливає умова: кожний ненульовий елемент кільця R міститься лише в скінченному числі максимальних ідеалів. Припустимо супротивне. Тоді існує елемент r кільця R, який міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів. Тоді ідеал rR також міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів. Розглянемо два сімейства ідеалів: $\mathcal{F}$ - множина всіх ненульових ідеалів кільця R і $\mathcal{F}_0$ - множина ідеалів, що містяться лише в скінченному числі максимальних ідеалів. Легко бачити, що $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_0$ є передрадикальними фільтрами. Якщо rR міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів, то $rR \notin \mathcal{F}_0$. Оскільки $rR \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}_0 \subsetneqq \mathcal{F}$. За лемою 2, для будь-якого ідеалу J кільця R і для будь-якого $m \in mspec(R)$ ідеал $J_m \cap R = J_0$ належить $\mathcal{F}_0$ і $(J_0)_m = J_m$. Тому для довільного $m \in mspec(R)$ $\mathcal{F}_m = (\mathcal{F}_0)_m$. Отже, ми отримали, що $\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{F}$ і $\Phi(\mathcal{F}) = \Phi(\mathcal{F}_0)$, а це суперечить ін"єктивності відображення Φ_0. Таким чином, припущення, що існує елемент r кільця R, який міститься в нескінченному числі максимальних ідеалів, невірне. Лема доведена.

Із лем 1 і 3 випливає справедливість наступного результату:

Теорема 1. Нехай R - адекватна комутативна область Безу. Значить, R є кільцем з локально визначеними передкрученнями тоді і тільки тоді, коли воно h - локальне.

Якщо $\mathcal{F}$ - радикальний фільтр кільця R, то позначимо через $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ множину всіх тих ідеалів з $\mathcal{F}$, які містяться лише у скінченному числі максимальних ідеалів кільця R. Легко бачити, що $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ є передрадикальним фільтром кільця R. Нехай $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ - найменший серед радикальних фільтрів кільця R, що містять $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ [3]. Тоді має місце таке твердження:

Теорема 2. Адекватна комутативна область Безу R є областю з локально визначеними крученнями тоді і тільки тоді, коли для будь-якого ненульового радикального фільтра $\mathcal{F}$ кільця R $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай Φ - бієктивне. Доведемо, що $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$. Покажемо, що для довільного максимального ідеалу m кільця R $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m = \mathcal{F}_m$. Включення $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m \subset \mathcal{F}_m$ очевидне. Покажемо, що $\mathcal{F}_m \subset (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m$. Нехай $J \in \mathcal{F}$. Тоді $J_m \cap R \supset J$ /за лемою 1.1 /2/ з праці [1]/. Звідси на основі Т1 випливає, що $\mathcal{J}_m \cap R \in \mathcal{F}$. Згідно з лемою 1.1 /1/ із праці [1] маємо, що $(\mathcal{J}_m \cap R)_m = \mathcal{J}_m \in \mathcal{F}_m$. За лемою 2, $\mathcal{J}_m \cap R$ міститься лише в одному максимальному ідеалі m. Тому $\mathcal{J}_m \cap R \in \mathcal{B}_\mathcal{F}$, а $(\mathcal{J}_m \cap R)_m \in (\mathcal{B}_\mathcal{F})_m$. Отже, $\mathcal{F}_m \subset (\mathcal{B}_\mathcal{F})_m$. Так як $\mathcal{B}_\mathcal{F} \subset \mathcal{J}(\mathcal{B}_\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, то $\mathcal{J}(\mathcal{F})_m = \mathcal{F}_m$. З ін"ективності відображення φ_0 випливає, що $\mathcal{J}(\mathcal{B}_\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Достатність. Нехай $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_\mathcal{F})$. Спочатку доведемо ін"ективність відображення φ. Нехай $(\mathcal{F}_1)_m = (\mathcal{F}_2)_m$. За доведеним вище $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1})_m = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})_m$. За лемою 2.1 із праці [1], яка є вірною і для передрадикальних фільтрів, отримуємо, що $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}_2}$. Звідси видно, що $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1}) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})$. Отже, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. Тепер покажемо, що відображення $\mathcal{F}$ – сюр"ективне. Нехай $<\mathcal{G}[m]> \in \prod_{m \in mspec} \mathcal{G}_0(R_m)$ і $\mathcal{F} = \{ J / J$ – ідеал в R і $J_m \in \mathcal{G}[m]$ для довільного $m \in mspec(R)$. За лемою 1.7 із праці [1], $\mathcal{F} \in \mathcal{G}_0(R)$. Нехай $m \in mspec(R)$. Покажемо, що $\mathcal{F}_m = \mathcal{G}[m]$. Ясно, що $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{G}[m]$. Нехай $\mathcal{J} \in \mathcal{G}[m]$ і $J = \mathcal{J} \cap R$. Тоді $J_m = \mathcal{J} \in \mathcal{G}[m]$ /за лемою 1.1/1/ із праці [1]/. Якщо $\mathcal{P} \in mspec(R) \setminus \{m\}$, то $J_\mathcal{P} = R_\mathcal{P}$, бо J міститься згідно з лемою 2 лише в одному максимальному ідеалі m. Отже, $J_m \in \mathcal{F}_m$ для будь-якого $m \in mspec(R)$. Звідси випливає $\mathcal{G}[m] \subset \mathcal{F}_m$.

1. Brandal W., Barbut E. Localization of torsion theories // Pacific J. Math. 1983. Vol. 107. N 1. P. 27-37. 2. Larsen M.D., Lewis W.J., Shores T.S. Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 187. N 1. P. 231-248. 3. Stenström S. Rings of quotients // Berlin. 1975.

Стаття надійшла до редколегії 21.03.89

УДК 512.552

О.Д.Артемович

ПРО ПРАВІ ГАМІЛЬТОНОВІ КІЛЬЦЯ

Кільце називається правим гамільтоновим, якщо всі його підкільця - праві ідеали [4, задача I.141]. У цій статті описані деякі класи правих гамільтонових кілець. Нагадаємо, що гамільтонові кільця /тобто кільця, всі підкільця яких двосторонні ідеали/ з точністю до нільпотентних p-кілець описані у працях [1-3, 5,9]. Надалі будемо користуватися термінологією праць [5-7]; зауважимо лише, що $\langle S \rangle$ означає підкільце, породжене підмножиною S кільця R, $C(a)$ - централізатор елемента a, $Z(R)$ - центр кільця R.

Лема 1. Праве гамільтонове кільце є лівим дуо-кільцем.

Лема 2. Нехай R - праве гамільтонове кільце. Тоді

1/ $ara = a^2r$ для будь-яких елементів $a, r \in R$;

2/ якщо $b \in C(a)$, то $b \in C(ar)$ для будь-якого $r \in R$;

3/ правий ідеал aR - комутативне кільце;

4/ якщо R містить хоча б один ненульовий недільник нуля, то кільце R комутативне.

Доведення. Нехай a - який-небудь ненульовий елемент кільця R, а b - довільний елемент із $C(a)$. Тоді, очевидно, $a \in C(b)$ і оскільки, за умовою, $C(a)$ і $C(b)$ - праві ідеали, то

$$b(ar) = (ar)b \qquad /1/$$

для будь-якого елемента r кільця R. Отже, зокрема, при $b=a$ із виразу /1/ одержуємо, що

$$a^2r = ara. \qquad /2/$$

Із виразу /1/ також, зокрема, при $b=at$, де t - довільний елемент кільця R, отримаємо, що

$$(atr)a = (ar)(at),$$

звідки випливає, що

$$(atr)a = a(tr)a = a^2tr = a(at)r = (at)(ar),$$

а отже, $(ar)(at) = (at)(ar)$. Таким чином, aR - комутативне кільце.

Нехай надалі $c \neq 0$ і c - недільник нуля кільця R.

Тоді для будь-яких елементів r, t кільця R, враховуючи вираз /2/, маємо $c(cr - rc) = c^2 r - crc = 0,$

$$cr - rc = 0, \quad cr \in Z(R),$$

а значить,

$$ctr = rct = crt, \quad c(tr - rt) = 0 \ \text{і} \ tr = rt,$$

тобто R – комутативне кільце. Лема доведена.

Наслідок 1. Праве гамільтонове кільце є PI-кільце.

З леми також випливає, що в негамільтоновому кільці, що є правим гамільтоновим кільцем, всі ненульові елементи є дільниками нуля.

Лема. Нехай ∂ – внутрішнє диференціювання кільця R. Тоді $\partial R \subseteq \mathcal{L}(R)$, де $\mathcal{L}(R)_e$ – радикал Левицького кільця R, і навіть більше того, $(\partial r)^2 = 0$ для будь-якого елемента r кільця R.

Доведення. Справді, для довільних елементів a, b кільця R враховуючи вираз /2/, маємо $(ab - ba)^2 = 0$.

Беручи до уваги леми 2, 3 та результати праць [3,4], легко отримати два таких твердження:

Твердження 1. Для кільця R з одиницею наступні твердження рівносильні:

1/ R – праве гамільтонове кільце;

2/ R – гамільтонове кільце;

3/ $R \simeq \mathbb{Z}$ або $R \simeq \mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Твердження 2. Якщо кільце R таке, що $R \neq \mathcal{L}(R) = 0$, де $\mathcal{L}(R)$ – радикал Левицького, то наступні твердження рівносильні:

1/ R – праве гамільтонове кільце;

2/ R – гамільтонове кільце;

3/ $R = \sum_p R_p$ – пряма сума по різних простих числах p, або R ізоморфне кільцю, породженому таким цілим числом $z \neq 0$, $z^2 = \alpha z$, де α – ненульове ціле число.

Має місце така теорема:

Теорема 1. Нехай R – кільце без кручення. Тоді R – праве гамільтонове кільце в тому і тільки в тому випадку, коли або

1/ R – кільце з нульовим множенням /тобто $R^2 = 0$ /, або

2/ R – ізоморфне кільцю, породженому ненульовим цілим числом, тобто $R \simeq \langle k \rangle$, $k^2 = \alpha k$, де α – ненульове ціле число,

або 3/ $R = J + \langle t \rangle$, $J^2 = 0$, $tJ = 0$, $J \cap \langle t \rangle = 0$, $t^2 = t$, $\langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $it = i$ для будь-якого елемента $i \in J$.

Доведення. Достатність очевидна.

Н е о б х і д н і с т ь. Очевидно, підкільце $J=\langle i\in R \mid i^2=0\rangle$ є ідеалом кільця R.

Припустимо, що R – нількільце. Нехай r – довільний елемент із R індексу нільпотентності n, i – ненульовий елемент із J, причому $i^2=0$. Тоді $ir\in\langle i\rangle$, а тому $ir=\alpha i$, де $\alpha\in\mathbb{Z}$. Звідси $0=r^{n-1}ir=\alpha r^{n-1}i$, і внаслідок того, що R без кручення, маємо $r^{n-1}i=0$. Тоді також $0=r^{n-2}ir=\alpha r^{n-2}i$, а отже, $r^{n-2}i=0$. Міркуючи аналогічно, отримаємо, що $ri=0$ і $ir=0$. Таким чином, $JR=RJ=0$. Звідси випливає, що $J\leqslant Z(R)$, а тому фактор-кільце $R/Z(R)$ комутативне і гамільтонове. Оскільки $Z(R)$ і $R/Z(R)$ також без кручення, то $Z(R)^2=0$, $(R/Z(R))^2=0$ [3, теорема 5]. Це означає, що $J=Z(R)$, $R^2\leqslant Z(R)$, $R^3\leqslant RZ(R)=RJ=0$. Крім того, з гамільтоновості кільця $\langle r\rangle$ випливає, що $r^2=0$ [5].

Нехай t – також довільний елемент кільця R. Тоді $rt=\beta r$, де $\beta\in\mathbb{Z}$, $0=rt^2=\beta rt$, а отже, $rt=0$. Звідси отримуємо, що $R^2=0$.

Якщо тепер $R\neq Z(R)$, $Z(R)=0$, то внаслідок твердження 2 кільце R є типу 2/ із умови теореми.

Тому припустимо, що $R\neq Z(R)\neq 0$. Зрозуміло, що $Z(R)^2=0$. Нехай $t\notin Z(R)$ і $i\in Z(R)$. Очевидно, $\langle i\rangle\cap\langle t\rangle=0$ та $ti=0$. Крім того, всі елементи кільця R мають тип K_7 /в сенсі [5]/. Отже,

$$(i+t)^2=(i+t)\sigma,\qquad t^2=\beta t,\quad \text{де}\quad \sigma,\beta\in\mathbb{Z}.$$

Звідси випливає, що

$$it+t^2=\sigma i+\sigma t,$$

$$\langle i\rangle\ni it-\sigma i=\sigma t-t^2\in\langle t\rangle,$$

а отже, $\sigma=\beta$ і $it=\beta i$. Але тоді $\langle i,t\rangle/\langle i,t\rangle$ – змішане гамільтонове кільце з фактор-кільцем по радикалу без кручення і в силу праці [2] $\bar{i}=\bar{0}$. Звідси $i\in\langle it\rangle$, $i=\gamma it=\gamma\beta i$, $\gamma\beta=1$, а отже, $i=it$, $\langle t\rangle\simeq\mathbb{Z}$.

Теорема доведена.

Легко отримати ще одне твердження.

<u>Твердження 3</u>. Нехай R – періодичне нількільце. Тоді R праве гамільтонове в тому і лише в тому випадку, коли $R=\sum_p\oplus R_p$ – пряма сума нільпотентних правих гамільтонових p-кілець R_p по різних простих числах p.

Наступну теорему отримуємо на основі результату із праці [8] з урахуванням теореми 3 [3] і леми 4 [3].

Теорема 2. Якщо R — гамільтонове p-кільце, то воно нільпотентне і є підпрямою сумою кілець R_i, кожне з яких належить до одного із типів:

1/ $R_i \simeq \langle x \rangle, O(x) = p^n (n>0), x^2 = \alpha x, \alpha \in \mathbb{Z}, (\alpha, p) \neq 1$;

2/ R_i — кільце з нульовим множенням.

1. Андриянов В.И. Смешанные гамильтоновы нилькольца // Мат. зап. Урал. гос. ун-та. 1966. Т.5. Тетр. 3. С.15-30. 2. Андриянов В.И. Смешанные Г-кольца //Ученые зап. Свердлов. гос. пед. ин-та. 1967. Вып. 51. С.12-21. 3. Андриянов В.И., Фрейдман П.А. О гамильтоновых кольцах //Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-та. 1965. Вып. 31. С.3-23. 4. Днестровская тетрадь: Нерешенные проблемы теории колец и модулей. 3-е изд. Новосибирск, 1982. 5. Фрейдман П.А. Письмо в редакцию /по поводу статьи М.Шперлинга/ //Мат. сб. 1960. Т.52 /94/. № 3. С.915-916. 6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М., 1971. 7. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., 1972. 8. Kruse R.L. Price D.T. On the subring structure of finite nilpotent rings // Pacif. J. Math. 1969. Vol. 31. P. 103-117. 9. Redei L. Vollidealringe in weiteren Sinn. I // Acta Math. Acad. Hung. 1952. Vol. 3. S. 243-268.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.89

УДК 515.12

М.М.Зарічн , О.Й.Ткач

ПРО ТОПОЛОГІЮ ПРОСТОРУ ШАРУВАНЬ НА ГЛАДКОМУ МНОГОВИДІ

Нехай M^n — n-вимірний C^r-многовид, $n \geq 2$, $r \geq 1$, $Fol_k^r(M)$ — множина k-вимірних C^r-шарувань на многовиді M^k, $1 \leq k < n$. Через $\xi: G_k TM \to M$ позначаємо розшарування гроссманових многовидів над M. Кожне шарування $\mathcal{F} \in Fol_k^r(M)$ визначає переріз $\varphi_{\mathcal{F}}$ розшарування ξ, для якого $\varphi_{\mathcal{F}}(x)$ рівне дотичному простору до шару шарування $\mathcal{F}$, що містить x. Таким чином, одержуємо вкладення

$$\varphi: Fol_k^r(M) \to C^{r-1}(M, G_k TM), \quad \mathcal{F} \mapsto \varphi_{\mathcal{F}}.$$

Надалі топологізуємо множину $Fol_k^r(M)$ сильною /слабкою/ топологією Уітні в $C^{r-1}(M, G_k TM)$ [2], індукованою вкладенням φ. Утворений топологічний простір позначається $Fol_k^r(M)_S$

/відповідно $Fol_k^r(M)_W$ /. Див. [4] з приводу інших топологізацій множини $Fol_k^r(M)$.

<u>Твердження</u>. Група дифеоморфізмів $Diff_S^r(M)$ $(Diff_W^r(M))$ діє неперервно на просторі $Fol_k^r(M)_S$ $(Fol_k^r(M)_W)$.

Доведення випливає з рівності $\varphi_{f\mathcal{F}}(p) = Df \circ \varphi_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}(p)$ /тут $p \in M, \mathcal{F} \in Fol_k^r(M), f \in Diff_k^r(M)$ і Df ми трактуємо як відображення з $G_k TM$ в себе/, а також неперервності відображення композиції, операції взяття оберненого елемента та відображення D. У випадку сильної топології слід зауважити ще, що неперервність відображення композиції гарантується власністю відображень Df та $\varphi_{\mathcal{F}}$.

<u>Теорема</u>. Нехай $Fol_k^r(M) \neq \emptyset$ і M – некомпактний многовид. Тоді простір $Fol_k^r(M)_S$ не є нормальним.

<u>Доведення</u>. Нехай $\{N_i \mid i \geq 1\}$ – дискретна послідовність компактних підмноговидів многовида M, для якої виконується умова:

многовид M розбивається підмноговидами $\{N_i\}$ на компактні підмноговиди з краєм $\{M_i \mid i \geq 0\}$ так, що $\partial M_i = N_{i-1} \cup N_i$ /тут ми вважаємо, що $N_0 = \emptyset$ /.

Нехай $\mathcal{F} \in Fol_k^{r-1}(M)$. Приймемо

$A = \{\mathcal{G} \in Fol_k^r(M) \mid \mathcal{G}|int\, M_i = \mathcal{F} \mid int\, M_i$ для всіх $i = 2k\}$, $A_j = \{\mathcal{H} \in Fol_k^r(int(M_{j-1} \cup M_j \cup M_{j+1})) \mid \mathcal{H}|int(M_{j-1} \cup M_{j+1}) = \mathcal{G}|int(M_{j-1} \cup M_{j+1})\}$, $j = 2k+1$, $k \in N$.

Через $\Box\{X_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ позначається ящиковий добуток сім"ї $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ топологічних просторів.

<u>Лема</u>. Підпростір $A \subset Fol_k^r(M)_S$ гомеоморфний ящиковому добутку $\Box\{A_j \mid j = 2k+1, k \in N\}$.

<u>Доведення</u>. Нескладно бачити, що відображення

$$\psi : Fol_k^r(M)_S \to \Box\{A_j \mid j = 2k+1,\ k \in N\},$$

$$\psi(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}|int(M_0 \cup M_1 \cup M_2), \mathcal{G}|int(M_2 \cup M_3 \cup M_4), \ldots)$$

є гомеоморфізмом.

З теореми Фробеніуса [1] випливає, що для компактного C^r – многовида X^n простір $Fol_k^r(X)_S$ гомеоморфний замкнутому підпростору в $C_S^r(X, G_k TX)$, а тому є топологічно повним. Оскільки $Fol_k^r(X)$ ніде не локально компактний, то він замкнуто містить берівський простір ω^ω.

Міркуючи аналогічно, переконуємося, що кожен простір A_j містить замкнуто простір ω^ω. Значить, простір A, а отже, і простір $Fol_k^r(M)_S$ замкнуто містять ящиковий добуток

$\square^{\omega}(\omega^{\omega})$. За теоремою ван Дауена [3], простір $\mathcal{F}ol_k^r(M)_S$ не нормальний.

1. У о р н е р Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М., 1987. 2. Х и р ш М. Дифференциальная топология. М., 1979. 3. D o u w e n E.K. van. The box product of countable many metrizable spaces need not be normal // Fund. Math. 1975. Vol. 88. N 2. P. 127-132. 4. E p s t e i n D.B.A. A topology for the space of foliations // Lect. Notes Math. 1977. Vol. 597. P. 132-150.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, В.О.Оніщук

СТАБІЛЬНІ КРУЧЕННЯ ПРОСТОГО ТИПУ

Нехай S - множина класів простих правих модулів. Для підмножини $S_1 < S$ позначимо $T(S_1)$ - радикальний клас кручення, породженого простими модулями з S_1 . Такі кручення називаються крученнями простого типу. Основні поняття і допоміжні твердження можна знайти у працях [1-3]. Нагадаємо, що кручення називається стабільним, коли його радикальний клас замкнутий щодо ін"єктивних оболонок. Модуль називається півартіновий, якщо його цоколь - великий підмодуль.

Теорема. Для кільця R такі умови еквівалентні:

1. Над R всі кручення простого типу стабільні.
2. Якщо L півпростий правий R - модуль і $L \in T(S_1)$, то ін"єктивна оболонка $E(L) \in T(S_1)$.
3. Для правого ідеалу J виконується наступна умова: якщо $\{r_\beta\}$, $\beta \in B$ така сім"я елементів з R /які не лежать в J /, що $r_{\beta_1} R \cap r_{\beta_2} R = 0$ для попарно різних β_1, β_2 з B , то існує правий ідеал $H \supseteq J$ такий, що R/H - півартіновий модуль $r_\beta \notin H$ для всіх $\beta \in B$.

Доведення. Імплікація 1/$\Rightarrow$ 2/ - очевидна. Доведемо імплікацію з 3/$\Rightarrow$ 2/. Розглянемо множину A правих ідеалів кільця R , які містять J і не містять жоден з елементів $\{r_\beta\}$, $\beta \in B$.
За лемою Цорна в множині A існує максимальний елемент H .
Модуль $\sum_{\beta \in B} (r_\beta R+H)/H$ є великим підмодулем модуля R/H . Дійсно, якщо $L/H \neq 0$, то L повинен включати хоча б один елемент

τ_β, і тоді перетин L/H і $\sum_{\beta\in B}(\tau_\beta R+H)/H$ – ненульовий. Кожний доданок $(\tau_\beta R+H)/H$ – простий модуль. Дійсно, якщо б існував правий ідеал K такий, що $H\subset K\subsetneq \tau_\beta R+H$, то K повинен був би містити деякий елемент $\tau_{\beta'}$. З того, що $\tau_\beta R\cap \tau_{\beta'}=0$, для різних β,β' одержимо $\beta=\beta'$ і, значить, $K=\tau_\beta R+H$. Звідси випливає, що модуль R/H – півартіновий. Доведемо імплікацію 2/ $\Rightarrow$ 3/. Нехай $L=\sum_{\alpha\in A}P_\alpha$ – півпростий модуль і $L\in T(S_1)$. Для довільного ненульового $x\in E(L)$, $xR\cap L=\sum_{\beta\in B}P_\beta$. Модуль $\sum_{\beta\in B}P_\beta$ є великим підмодулем модуля $xR\cong R/(0:x)$. Нехай образ $\sum_{\beta\in B}P_\beta$ при вкладенні в $R/(0:x)$ має вигляд $\sum_{\beta\in B}(\tau_\beta R+(0:x))/(0:x)$, де $\tau_{\beta_1}R\cap\tau_{\beta_2}R=0$ для попарно різних β_1,β_2. За умовою існує правий ідеал такий, що R/H – півартіновий, $(0:x)\subseteq H$ та $\tau_\beta\notin H$ для всіх $\beta\in B$. Оскільки $\sum_{\beta\in B}(\tau_\beta R+(0:x))/(0:x)$ – великий підмодуль в $R/(0:x)$, то $(0:x)$ збігається з H. А звідси буде випливати, що $R/(0:x)\in T(S_1)$. Отже, $E(L)\in T(S_1)$. Доведем останню імплікацію 2/ $\Rightarrow$ 1/. Нехай K – довільний ін"єктивний модуль і τ_{S_1} – кручення простого типу з радикальним класом $T(S_1)$. Через $Soc_{S_1}K$ позначимо S_1 – цоколь модуля K. Очевидно, що

$$K=E(Soc_{S_1}A)+Q \quad і \quad Soc_{S_1}Q=0.$$

Таким чином, $E(Soc_{S_1}K)=\tau_{S_1}(K)$. Одержуємо, що для кожного кручення простого типу всі ін"єктивні модулі розщеплюються. Звідси випливає, що кручення $\tau_{S_1}(K)$ – стабільне.

Наслідок 1. Над областю Оре всі кручення простого типу стабільні тоді і тільки тоді, коли кожний правий ідеал є перетином таких правих ідеалів H, що R/H – півартіновий модуль.

Доведення випливає з того, що над областю Оре перетин двох ненульових правих ідеалів ненульовий.

<u>Наслідок 2</u>. Над областю головних ідеалів всі кручення простого типу стабільні.

1. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., 1969. 2. Stenström B. Ring of quotiente springer. Berlin; New York, 1975. 3. Colan J.S. Localization of noncommutative rings. New York, 1974.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.89

УДК 512.55

О.Л.Горбачук, С.С.Прийма

СКІНЧЕННІ КІЛЬЦЯ І КРУЧЕННЯ НАД НИМИ

У працях [1,6] вивчаються скінченні кільця /одиниці може не бути/, наприклад, описані кільця до сьомого порядку [1]. У нашій статті вивчаються кільця з одиницею. Виділяються кільця, порядок яких не ділиться на куб простого числа. Основним результатом є теорема про розщепленість кручень над скінченними кільцями.

Лема 1. Скінченне кільце з одиницею, абелева група якого циклічна, ізоморфне кільцю лишків Z_n.

Доведення. Нехай порядок кільця n. Спочатку встановимо, що порядок одиниці e збігається з n. Для будь-якого $m\in N$ вірно $ma = m(ea) = (me)_a$. Звідси одержуємо, що $O(e) \geq O(a)$, оскільки a - твірний елемент, то $O(e) = O(a)$ і $R = \{0, e, 2e, \dots, (n-1)e\}$, безпосередньо видно, що $R \approx Z_n$.

Наслідок 1. Кільце з одиницею, порядок якого просте число, ізоморфне полю Z_p.

Лема 2. Кільце порядку p^2 ізоморфне кільцю лишків Zp^e або фактор-кільцю кільця многочленів $Zp[x]$ по ідеалу, породженому многочленом другого степеня.

Доведення. Якщо в кільці R існує елемент порядку p^2, тобто абелева група кільця циклічна, за лемою 1 кільце $R \approx Zp^2$. Якщо абелева група не циклічна, то всі відмінні від нульового елементи кільця R мають порядок p. Підкільце $R_p = \{0, e, 2e, \dots, (n-1)e\}$ ізоморфне кільцю Zp. До кільця $R_p = \{0, e, \dots, (n-1)e\}$ приєднаємо довільний елемент $a \notin Rp$, тобто розглянемо кільце $Rp[a]$. Очевидно, що $Rp[a] = R$ /за кількістю елементів/. Будуємо гомоморфізм кільця $Zp[x]$ в кільце $Rp[a]$ за правилом: многочлен $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ перейде в елемент $a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots + a_na^n$. Таке відображення буде гомоморфізмом на сюр"ективне, одержуємо $R \approx Zp[x]/J$. Оскільки $Zp[x]$ кільце головних ідеалів, то

$$J = f_0(x)\, Zp[x].$$

Виходячи з кількості елементів кільця R, робимо висновок, що $f_0(x)$ - многочлен другого степеня. Зауважимо, що якщо многочлен $f_0(x)$ розкладається в добуток взаємно простих многочленів першого степеня $f_1(x)$ і $f_2(x)$, то за відомою теоремою [3] буде

$$Z_p[x]/_{f_0(x)Z_p[x]} = Z_p[x]/_{f_1(x)Z_p[x]} \dotplus Z_p[x]/_{f_2(x)Z_p[x]}.$$

Оскільки $f_1(x)$ і $f_2(x)$ першого степеня, то фактор-кільце
$Z_p[x]/_{f_i(x)} \approx Z_p$,
тобто R ізоморфне прямій сумі кілець Z_p.

Означення. Скінченне кільце називається примарним, якщо його абелева група примарна, тобто кільце має порядок p^n .

Наслідок 2. Кільце з одиницею, порядок якого не ділиться на p^3 , комутативне.

Доведення. Відомо [7], що якщо кільце порядку n розкладається в пряму суму p -примарних кілець, тобто $|R| = p^i$ і за умовою n не ділиться на p^3 , то кожна примарна компонента має порядок p або p^2 . З леми 2 випливає, що ця компонента комутативна.

Наслідок 3. Якщо n ділиться на p^3 , то існує некомутативне кільце порядку n .

Доведення. Виходячи з примарного розкладу, достатньо показати, що існує кільце порядку p^3 , яке некомутативне. Досить розглянути кільце трикутних матриць другого порядку $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ над полем Z_p . Можна довести, що довільне некомутативне кільце порядку p^3 ізоморфне такому матричному кільцю.

Далі будемо вивчати розщеплюваність кручень над скінченними кільцями. Всі означення і факти з теорії кручень даються в книгах [4, 5].

Оскільки скінченне кільце артінове, то довільне кручення буде радикально півпростим, тобто воно задається двостороннім ідемпотентним ідеалом. Тоді $v(M)$ - періодичний підмодуль модуля M визначається так:

$$v(M) = \{m \in M,\ mJ = 0\},$$

де J - двосторонній ідемпотентний ідеал $(J = J^2)$.

Нагадаємо, що кручення v називається розщеплюваним, якщо для довільного модуля M підмодуль $v(M)$ є прямим доданком, тобто

$$M = v(M) \dotplus K,$$

де K - підмодуль, вільний від кручення, тобто для будь-якого $k \in K$, $kJ \neq 0$.

Теорема. Якщо порядок кільця n не ділиться на p^3 , де p просте число, то над ним всі кручення розщеплюються. Коли n ділиться на p^3 , то існує кільце порядку n і таке кручення v над даним кільцем, яке не розщеплюється.

Доведення. Якщо n не ділиться на p^3, то за наслідком 2 кільце комутативне. Скінчення комутативне кільце досконале і над ним всі кручення розщеплюються [2]. Для доведення другої частини теореми достатньо над кільцем R матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in Z_p$ побудувати кручення, яке не розщеплюється. Для цього задамо це кручення таким ідемпотентним ідеалом:

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in Z_p \right\}.$$

Розглянемо правий підмодуль $M = R$. Тоді

$$v(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, b, c \in Z_p \right\}.$$

Припустимо, що кручення розщеплюється, тоді

$$R = v(R) \dot{+} T,$$

де T - правий ідеал і $v(R) \cap T = 0$.

Якщо $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in T$ і

$a_1 = 0$, то $\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in v(R)$,

тоді $b_1 = 0$ і $c_1 = 0$.

Нехай $\begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in T$ і $a \neq 0$.

В силу того, що T є правий ідеал, a може бути довільне.

Дійсно, $\begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

за рахунок довільності a_2, aa_2 довільний елемент.

Виходить, що $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$ для будь-якого $a \in Z_p$.

Зі співвідношення $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 & ab_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

отримаємо, що в $T \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$, для будь-яких $\left. a, b \in Z_p \right\}$.

Оскільки для будь-якого $b \in Z_p$ $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in v(R) \cap T$,

то ми отримали протиріччя з припущенням, що v розщеплюється.

Ми встановили: в категорії правих модулів над R існує нерозщеплюване кручення.

Таке кручення існує в категорії лівих модулів, достатньо замість нашого ідеала J взяти ідеал $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, b, c \in Z_p$.

1. Антипкин В.Г., Елизаров В.П. Кольца порядка n // Сиб. мат. журн. 1982. № 23. С.9-18. 2. Горбачук Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы // Мат. исследования. Кишинев, 1972. С.81-90. 3. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. М., 1963. Т. 1. С.166-169. 4. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинев, 1983. 5. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М., 1969. 6. Colin R. Flether Rings of small order // The mathematical Gazette. 1980. Vol. 64. N 8. P. 9-22.

7. M c D o n a l d B. Finite ring with identity. New York, 1974.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.89

УДК 539.3

В.С.Грицевич, Б.В.Ковальчук

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У БАГАТОШАРОВИХ ТІЛАХ

Розглянемо багатошарову сферу при $r \in [r_0, r_1), \ldots, [r_{n-1}, r_n]$, що складається із n матеріалів відповідно, між якими має місце ідеальний тепловий контакт. У початковий момент часу $\tau = 0$ сфера має температуру $t_н$. У наступні моменти часу внутрішня поверхня підтримується при температурі t^-, а зовнішня - при t^+.

Теплофізичні характеристики сфери як єдиного цілого подаємо у вигляді [2]:

$$\rho(r) = \rho_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\rho_{k+1} - \rho_k) \cdot S_-(r - r_k), \qquad /1/$$

$$S_-(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Моделювання розривних характеристик за допомогою асиметричних одиничних функцій є природним з теоретико-множинної точки зору, оскільки логічно відповідає розбиттю множини точок відрізка $[r_0, r_n]$ на підмножини.

Температурне поле такої сфери отримуємо при розв"язанні задачі теплопровідності:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \lambda(r) \frac{\partial t}{\partial r}\right] = c(r)\dot{t}, \\ t\big|_{r=r_0} = t_н + (t^- - t_н) \cdot S_+(\tau), \\ t\big|_{r=r_n} = t_н + (t^+ - t_н) \cdot S_+(\tau), \\ t\big|_{\tau=0} = t_н, \end{cases} \qquad /2/$$

де $\quad S_+(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<0\\ 1, & \tau>0.\end{cases}$

Традиційний підхід до розв"язання такої задачі полягає у виконанні операції диференціювання у лівій частині рівняння теплопровідності з використанням теореми диференціювання добутку двох розривних функцій. При цьому враховуємо розривність похідної $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ і отримуємо рівняння з сингулярними коефіцієнтами.

У даній статті при розв"язанні задачі теплопровідності пропонується інший підхід.

Переходимо від шуканої змінної t до нової змінної θ за формулою

$$\theta=\lambda_1(t-t_H)+\sum_{K=1}^{n-1}(\lambda_{K+1}-\lambda_K)\cdot(t-t\big|_{\tau=\tau_K})\cdot S_-(\tau-\tau_K). \qquad /3/$$

Легко показати, що заміна /3/ має такі властивості:

1. θ - неперервна по τ_i у вузлах $\tau=\tau_K$, $K=1,\dots,n-1$.

2. $$\theta\big|_{\tau=\tau_i}=\lambda_i(t\big|_{\tau=\tau_1}-t_H)+\sum_{j=2}^{i}\lambda_j(t\big|_{\tau=\tau_j}-t\big|_{\tau=\tau_{j-1}}). \qquad /4/$$

3. Обернене перетворення до θ має вигляд

$$t=\frac{1}{\lambda(\tau)}\Big[\theta+\lambda_1 t_H+\sum_{K=1}^{n-1}(\lambda_{K+1}-\lambda_K)\cdot t\big|_{\tau=\tau_K}\cdot S_-(\tau-\tau_K)\Big], \qquad /5/$$

де $$t\big|_{\tau=\tau_i}=t_H+\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_{j+1}}\right)\theta\big|_{\tau=\tau_j}+\frac{1}{\lambda_i}\theta\big|_{\tau=\tau_i}, \quad i=1,\dots,n. \qquad /6/$$

4. $\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$ - неперервна по τ у вузлах $\tau=\tau_K$, $K=1,\dots,n-1$.

5. $$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\lambda(\tau)\cdot\frac{\partial t}{\partial\tau}. \qquad /7/$$

6. $\theta\big|_{\tau=0}=0$.

7. $$\dot\theta=\lambda(\tau)\dot t-\sum_{K=1}^{n-1}(\lambda_{K+1}-\lambda_K)\,\dot t\big|_{\tau=\tau_K}\cdot S_-(\tau-\tau_K). \qquad /8/$$

Якщо у рівнянні теплопровідності задачі /2/ перейти від змінної t до змінної θ, то з урахуванням виразів /4/-/8/ отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}+\frac{2}{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{1}{a(\tau)}\dot\theta+\frac{1}{a(\tau)}\sum_{K=1}^{n-1}(\lambda_{K+1}-\lambda_K)\dot t\big|_{\tau=\tau_K}\cdot S_-(\tau-\tau_K), \qquad /9/$$

де $\dot{t}\Big|_{r=r_K} = \sum_{j=1}^{K-1}\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{j+1}}\right)\dot{\theta}\Big|_{r=r_j} + \frac{1}{\lambda_K}\dot{\theta}\Big|_{r=r_K}$,

яке не містить сингулярних коефіцієнтів, а шукана функція θ має неперервну похідну по r на всьому проміжку $[r_0, r_n]$.

Розглянемо випадок, коли $n=2$. Тоді отримуємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{1}{a(r)}\dot{\theta} + \frac{1}{a_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)\dot{\theta}\Big|_{r=r_1} \cdot S_-(r-r_1), \\ \theta\Big|_{r=r_0} = \lambda_1 \cdot (t^- - t_H)\, S_+(\tau), \\ \theta\Big|_{r=r_2} = \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\theta\Big|_{r=r_1} + \lambda_2 \cdot (t^+ - t_H)\, S_+(\tau), \\ \theta\Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \qquad /10/$$

Тепер після перетворення Лапласа по змінній τ маємо

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{\theta}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\bar{\theta}}{dr} = \left[\gamma_1^2 + (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) S_-(r-r_1)\right]\bar{\theta} + \\ +\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)\gamma_2^2\bar{\theta}\Big|_{r=r_1} \cdot S_-(r-r_1), \\ \bar{\theta}\Big|_{r=r_0} = \frac{\lambda_1}{S}(t^- - t_H), \\ \bar{\theta}\Big|_{r=r_2} = \frac{\lambda_2}{S}(t^+ - t_H) - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)\bar{\theta}\Big|_{r=r_1}, \end{cases} \qquad /11/$$

де

$$\gamma_K^2 = \frac{S}{a_K}, \quad K = 1,2.$$

Розв"язок задачі /11/ запишеться у вигляді

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 \cdot [1 - S_-(r-r_1)] + \bar{\theta}_2 \cdot S_-(r-r_1),$$

де $\bar{\theta}_1 = r_0\lambda_1(t^- - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{11}(r,S)}{r\cdot S} + r_2\lambda_2(t^+ - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{12}(r,S)}{r\cdot S}$,

$$\bar{\theta}_2 = r_0\lambda_1(t^- - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{21}(r,S)}{r\cdot S} + r_2\lambda_2(t^+ - t_H)\cdot\frac{\bar{\Phi}_{22}(r,S)}{r\cdot S},$$

$$\bar{\Phi}_{11}(r,S) = \frac{sh\gamma_1(r_1 - r)}{sh\gamma_1(r_1 - r_0)} + \lambda_1\frac{r_1\gamma_1 sh\gamma_2(r_2 - r_1)}{Z(r,S)}\cdot\frac{sh\gamma_1(r - r_0)}{sh\gamma_1(r_1 - r_0)},$$

$$\bar{\Phi}_{12}(r,S) = \lambda_1\cdot\frac{r_1\gamma_2 sh\gamma_1(r - r_0)}{Z(r,S)},$$

$$\bar{\Phi}_{21}(r,S) = (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{r\gamma_1 sh\gamma_2(r_2 - r_1)}{Z(r,S)} + \lambda_2\frac{r_1\gamma_1 sh\gamma_2(r_2 - r)}{Z(r,S)},$$

$$\bar{\Phi}_{22}(r,S)=\frac{sh\gamma_2(r-r_1)}{sh\gamma_2(r_2-r_1)}+(\lambda_1-\lambda_2)\frac{r\gamma_2\, sh\gamma_1(r_1-r_0)}{Z(r,S)}+$$

$$+\lambda_2\frac{r_1\gamma_2\, sh\gamma_1(r_1-r_0)}{Z(r,S)}\cdot\frac{sh\gamma_2(r_2-r)}{sh\gamma_2(r_2-r_1)},$$

$$Z(r,S)=\lambda_1\psi_1(r_1)\cdot sh\gamma_2(r_2-r_1)+\lambda_2\psi_2(r_2)\cdot sh\gamma_1(r_1-r_0),$$

$$\psi_1(r)=\gamma_1 r_1\, ch\gamma_1(r-r_0)-sh\gamma_1(r-r_0),$$

$$\psi_2(r)=\gamma_2 r_1\, ch\gamma_2(r-r_1)+sh\gamma_2(r-r_1).$$

Із виразів /5/, /6/ випливає, що

$$\bar{t}=\frac{t_H}{S}+\frac{1}{\lambda(r)}\left[\bar{\theta}+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)\bar{\theta}\Big|_{r=r_1}\cdot S_-(r-r_1)\right],$$

де $\bar{\theta}\Big|_{r=r_1}=\frac{\lambda_1}{S}\cdot\frac{\lambda_1(t^--t_H)r_0\gamma_1\, sh\gamma_2(r_2-r_1)+\lambda_2(t^+-t_H)r_2\gamma_2\, sh\gamma_1(r_1-r_0)}{Z(r,S)}.$

При $r_0=0,\ t^-=t_H,\ r=0$ отримуємо

$$\bar{t}(r,S)=\bar{t}_1\cdot[1-S_-(r-r_1)]+\bar{t}_2\cdot S_-(r-r_1),$$

$$\frac{\bar{t}_1(r,S)}{t_H}=\frac{1}{S}-\lambda_2\cdot\frac{r_1 r_2\gamma_2\, sh\gamma_1 r}{r\cdot S\cdot Z(r,S)},$$

$$\frac{\bar{t}_2(r,S)}{t_H}=\frac{1}{S}-\frac{r_2}{rS}\cdot\frac{\lambda_2\psi_2(r)\, sh\gamma_1 r_1+\lambda_1\psi_1(r_1)\, sh\gamma_2(r-r_1)}{Z(r,S)}.$$

Це відповідає розв"язкові, отриманому у праці [1].

Отже, показана можливість застосування заміни змінної вигляду /3/ для розв"язання задач теплопровідності у кусково-однорідних областях.

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967.
2. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.89

УДК 539.377:536.12

І.М.Колодій, І.І.Верба

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РОТЕ ДО РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТЕРМОЧУТЛИВИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ

Розглянемо задачу про охолодження шару, що складається з двох різних матеріалів. У початковому стані обидва матеріали нагріті до високої температури t_0 /порядку 2000 °C/. Через поверхні $x_i = \ell_i$ $(i = 1,2)$ здійснюється віддача тепла в середовище температури $t_c = g(\tau)$ за законом Ньютона. На стику поверхонь при $x = \ell$ мають місце умови ідеального теплового контакту. Тоді для знаходження нестаціонарного температурного поля в двошаровому тілі матимемо таку крайову задачу:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_i(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial x}\right) = c_i(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial \tau}, \quad t_i = t_i(x,\tau), \quad i = 1,2, \qquad /1/$$

$$t_i(x,0) = t_0, \qquad /2/$$

$$\lambda_i(t_i)\frac{\partial t_i}{\partial x} = \pm\, \alpha_i\left(t_i - g(\tau)\right) \quad \text{при } x_i = \ell_i, \qquad /3/$$

$$t_1 = t_2, \; \lambda_1(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial x} = \lambda_2(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial x} \quad \text{при } x = \ell, \qquad /4/$$

де $c_i(t_i) = c_{i0}\, t_i^{\nu_i}, \; \lambda_i(t_i) = \lambda_{i0}\, t_i^{\nu_i}$.

Після заміни $T_i = t_i^{\nu_i + 1}$ крайова задача /1/-/4/ зведеться до крайової задачі для лінійних рівнянь і нелінійних граничних умов виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{1}{K_i}\frac{\partial T_i}{\partial Fo}, \quad T_i = T_i(X, Fo), \quad i = 1,2; \qquad /5/$$

$$T_i(X,0) = T_{i0}; \qquad /6/$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial X} = \pm Bi_i(1+\nu_i)\left(T^{\frac{1}{\nu_i+1}} - T_c\right) \quad \text{при } X = L_i; \qquad /7/$$

$$T_1^{\frac{1}{\nu_1+1}} = T_2^{\frac{1}{\nu_2+1}}, \; \frac{\lambda_{10}}{\nu_1+1}\frac{\partial T_1}{\partial X} = \frac{\lambda_{20}}{\nu_2+1}\frac{\partial T_2}{\partial X} \quad \text{при } X = L. \qquad /8/$$

Тут $X=\frac{x}{\ell_2}$, $a_i=\frac{\lambda_{io}}{C_{io}}$, $Fo=\frac{a_2\tau}{\ell_2^2}$, $Bi_i=\frac{\alpha_i\ell^2}{\lambda_{io}}$, $K_1=\frac{a_1}{a_2}$, $K_2=1$,

$T_{io}=t_o^{\nu_i+1}$, $L_i=\frac{\ell_i}{\ell_2}$, $L=\frac{\ell}{\ell_2}$, $T_c=g\left(\frac{\ell_2^2}{a_2}Fo\right)$.

Задачу /5/-/8/ розв"язуемо методом Роте [1,2]. Для цього розіб"емо проміжок $[0,Fo^*]$ зміни Fo на n рівних частин точками $Fo_k=kh$, $k=0,1,\ldots,n$, $h=\frac{Fo^*}{n}$. У рівнянні /5/ приймемо $Fo=Fo_{k+1}$ і замінимо похідну по часу Fo різницевою похідною. В результаті такої заміни отримаемо звичайні лінійні диференціальні рівняння для функцій $T_{i,k+1}(X)$, що е наближеними значеннями $T_i(X,Fo_{k+1})$

$$\frac{d^2T_{i,k+1}(X)}{dX^2}=\frac{1}{K_i}\,\frac{T_{i,k+1}(X)-T_{i,k}(X)}{h},\quad i=1,2;\ k=0,1,\ldots,n-1. \qquad /9/$$

Враховуючи вираз /6/, приймаемо

$$T_{i,0}(X)=T_{i,0}; \qquad /10/$$

інші $T_{i,k+1}(X)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ будуть задовольняти умови /7/, /8/

$$\frac{d\,T_{i,k+1}(X)}{dX}=\pm Bi_i(1+\nu_i)\left(T_{i,k+1}^{\frac{1}{\nu_i+1}}(X)-T_{c,k+1}\right) \quad \text{при } X=L_i, \qquad /11/$$

$$T_{1,k+1}^{\frac{1}{\nu_1+1}}(X)=T_{2,k+1}^{\frac{1}{\nu_2+1}}(X),\ \frac{\lambda_{10}}{\nu_1+1}\frac{dT_{1,k+1}(X)}{dX}=\frac{\lambda_{20}}{\nu_2+1}\frac{dT_{2,k+1}(X)}{dX} \quad \text{при } X=L, \qquad /12/$$

де $T_{c,k+1}=g\left(\frac{\ell_2^2}{a_2}Fo_{k+1}\right)$; $k=0,1,\ldots,n-1$.

Підставимо в рівняння /9/ $k=0$. $T_{i,0}(X)$ відомі з виразу /10/, тому можна знайти розв"язки $T_{i,1}$ рівнянь /9/, що задовольняють граничні умови /11/ і умови спряження /12/. Потім підставимо $k=1$ у вираз /9/ і знайдемо $T_{i,2}(X)$ і т.д.

Загальний розв"язок рівнянь /9/ має вигляд

$$T_{i,k+1}(X)=A_{i,k+1}\,ch\frac{X}{\sqrt{h_i}}+B_{i,k+1}\,sh\frac{X}{\sqrt{h_i}}+\frac{1}{\sqrt{h_i}}\int_L^X T_{i,k}(\xi)\,sh\frac{\xi-X}{\sqrt{h_i}}\,d\xi, \qquad /13/$$

де $h_1=\frac{a_1}{a_2}h$, $h_2=h$.

Коефіцієнти $A_{i,k+1}$, $B_{i,k+1}$ знайдемо, задовольнивши умови /11/ і /12/ з такої нелінійної системи рівнянь:

$$A_{i,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\,sh\frac{L_i}{\sqrt{h_i}}+B_{i,k+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\,ch\frac{L_i}{\sqrt{h_i}}-\frac{1}{h_i}\int_L^{L_i}T_{i,k}(\xi)\,ch\frac{\xi-L_i}{\sqrt{h_i}}\,d\xi=$$

$$= \pm Bi_i(1+\vartheta_i)\left[\left(A_{i,K+1}\, ch\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} + B_{i,K+1}\, sh\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} + \frac{1}{\sqrt{h_i}}\int_L^{L_i} T_{i,K}(\xi)\, sh\frac{\xi - L_i}{\sqrt{h_i}}\, d\xi\right)^{\frac{1}{\vartheta_i+1}} - T_{c,K+1}\right],$$

$$\left(A_{1,K+1}\, ch\frac{L}{\sqrt{h_1}} + B_{1,K+1}\, sh\frac{L}{\sqrt{h_1}}\right)^{\frac{1}{\vartheta_1+1}} = \left(A_{2,K+1}\, ch\frac{L}{\sqrt{h_2}} + B_{2,K+1}\, sh\frac{L}{\sqrt{h_2}}\right)^{\frac{1}{\vartheta_2+1}},$$

$$\frac{\lambda_{10}}{\vartheta_1+1}\left(A_{1,K+1}\frac{1}{\sqrt{h_1}}\, sh\frac{L}{\sqrt{h_1}} + B_{1,K+1}\frac{1}{\sqrt{h_1}}\, ch\frac{L}{\sqrt{h_1}}\right) =$$

$$= \frac{\lambda_{20}}{\vartheta_2+1}\left(A_{2,K+1}\frac{1}{\sqrt{h_2}}\, sh\frac{L}{\sqrt{h_2}} + B_{2,K+1}\frac{1}{\sqrt{h_2}}\, ch\frac{L}{\sqrt{h_2}}\right). \qquad /14/$$

Зауважимо, що якщо в граничних умовах /11/ справа $T_{i,K+1}^{\frac{1}{\vartheta_i+1}}(X)$ замінити на $T_{i,K}^{\frac{1}{\vartheta_i+1}}(X)$, тобто використовувати інформацію попереднього моменту часу, то отримаємо лінійні граничні умови

$$\left.\frac{dT_{i,K+1}(X)}{dX}\right|_{X=L_i} = \pm Bi_i(1+\vartheta_i)\left(T_{i,K}^{\frac{1}{\vartheta_i+1}} - T_{c,K+1}\right)\Big|_{X=L_i}. \qquad /15/$$

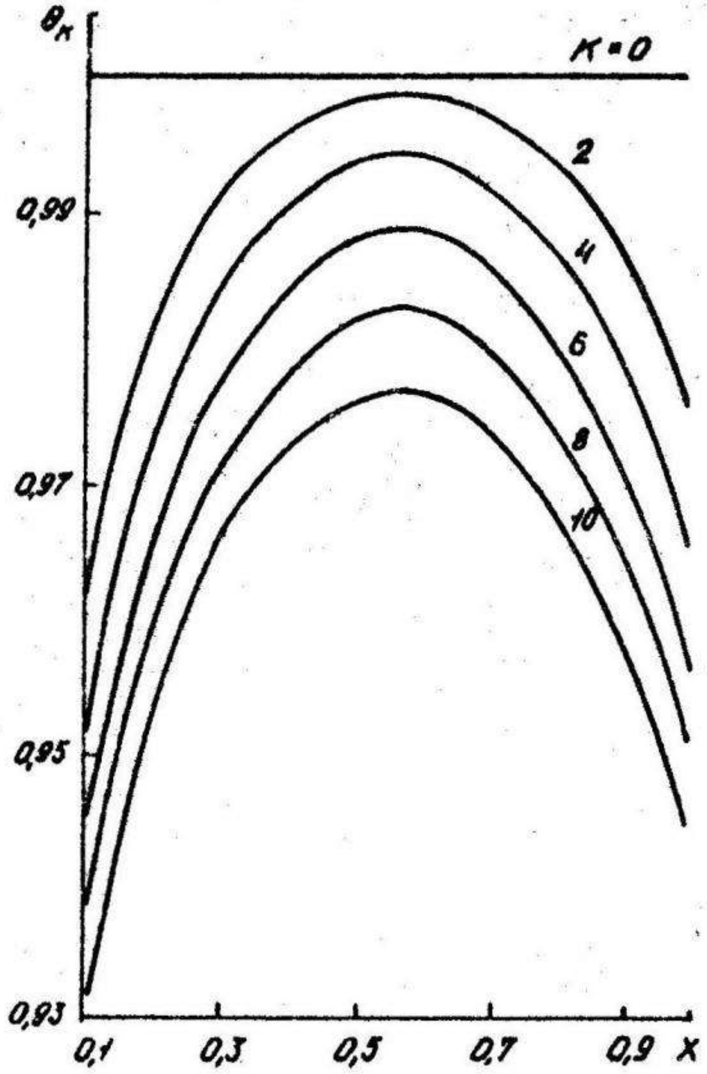
Такий підхід назвемо методом Роте з запізненням. Розв"язування задачі /5/-/8/ методом Роте з запізненням приводить до розв"язування крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь /9/ з лінійними граничними умовами /15/ і умовами спряження /12/. У цьому випадку два перших рівняння системи /14/ стануть лінійними і матимуть вигляд

$$A_{i,K+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\, sh\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} + B_{i,K+1}\frac{1}{\sqrt{h_i}}\, ch\frac{L_i}{\sqrt{h_i}} - \frac{1}{h_i}\int_L^{L_i} T_{i,K}(\xi)\, ch\frac{\xi - L_i}{\sqrt{h_i}}\, d\xi =$$

$$= \pm Bi_i(1+\vartheta_i)\left(T_{i,K}^{\frac{1}{\vartheta_i+1}}(L_i) - T_{c,K+1}\right).$$

Інтеграли у правій частині /13/ можна обчислити при $K = 0,1,\dots,n-1$, тобто отримати $T_{i,K+1}(X)$ у явному вигляді. Такі обчислення проведені авторами, але через громіздкість одержаних формул тут не наводяться.

Методом Роте з запізненням проведений числовий аналіз результатів при таких значеннях констант: $\vartheta_1 = 1;\ \vartheta_2 = 3;\ a_i = 1;\ K_i = 1;\ L_1 = 0{,}1;\ L = 0{,}2;\ L_2 = 1{,}0;\ t_0 = 2000;\ T_c = 20;\ Bi_1 = Bi_2 = 10;\ h = 0{,}1;\ h_i = 0{,}1;\ i = 1,2.$



На рисунку зображені графіки функцій $\theta_{i,K}(X)=\frac{1}{t_0}\,T_{i,K}^{\frac{1}{\nu_i+1}}(X)$, що є наближеними значеннями безрозмірної температури $\frac{1}{t_0}t_i\,(X,Fo_K)$ при $K=0,2,\dots,10$. Із графіків видно, що процес охолодження шару проходить несиметрично щодо серединної площини шару X = 0,55. Це зумовлено тим, що шар складається з двох різних матеріалів /лінія стику двох матеріалів зображена на рисунку пунктиром/. Найповільніше охолоджується область, що лежить у деякому околі серединної поверхні.

I. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1981. Т.4. Ч. 2. 2. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionalen Randwertaufgaben // Math. Ann. N 102. S. 650-670.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.89

УДК 511.364

Я.М.Холявка

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛ, ЗВ"ЯЗАНИХ З $\wp(z)$

Нехай $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса, $2\omega_1, 2\omega_2$ – довільна фіксована пара основних періодів, g_2, g_3 – її інваріанти, $\xi_1,\dots,\xi_6$ – довільні алгебраїчні числа,

$$n_i = \deg \xi_i, \quad n_{i,k} = \deg \mathbb{Q}(\xi_i, \xi_k), \ i \neq k, \quad L_i = L(\xi_i).$$

Теорема. Якщо $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 2m\omega_1 + 2h\omega_2$, $m, h \in \mathbb{Z}$,

$$n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_6),$$

$$N = \sum_{i=1}^{3} \frac{\ln L_i}{n_i} + \ln\Big(n\Big(1 + \sum_{i=4}^{6} \frac{\ln L_i}{n_i}\Big)\Big),$$

$$M = n(\min(n_{2,4}, n_{3,6}, n_{4,6}))\Big(1 + \sum_{i=1}^{6} \frac{\ln L_i}{n_i}\Big) + \ln\Big(n \sum_{i=1}^{3} \frac{\ln L_i}{n_i}\Big),$$

то існує така ефективна постійна Λ, що

$$|\omega_1 - \xi_1| + |\omega_2 - \xi_2| + |\alpha - \xi_3| + |g_2 - \xi_4| +$$

$$+ |g_3 - \xi_5| + |\wp(\alpha) - \xi_6| > \exp(-\Lambda n N M).$$

Для доведення цієї теореми можна скористатися другим методом Гельфонда [1]. Позначимо через $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ лінійно незалежні серед чисел $\xi_1^{u_1} \cdot \ldots \cdot \xi_6^{u_6}$, $u_i = 0, 1, \dots, n_i - 1$, $i = 1, \dots, 6$,

$$C_{k,\ell} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,\ell,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{k,\ell,\tau} \in \mathbb{Z}.$$

Допоміжну функцію, точки інтерполяції та параметри визначимо так:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{\ell=0}^{L} C_{k,\ell} z^k \wp^\ell(z),$$

$2x_1\omega_1+2x_2\omega_2+\alpha$ /точки інтерполяції/, $L=[\lambda^3 n_2 N]-1$,
$X_0=[\lambda\sqrt{M}]$, $X_1=[\lambda^4 n N]$, $S_0=[\lambda^4 n N]$, $K=[4\lambda X_0-1]^2-1$,
де λ – деяке натуральне число, X_0 та X_1 – межі інтерполяції до та після застосування основної леми у другому методі Гельфонда, S_0 – межа порядку похідних. Основна лема застосовується до функції $F(z)=f(z)\wp^{2L}(z+\alpha)$.

При закінченні доведення $|C_{k,l,\tau}|$ можна оцінити, використовуючи лему 4 [2].

1. Ф е л ь д м а н Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М., 1982. 2. Х о л я в к а Я.М. Приближение чисел, связанных с эллиптическими функциями. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4886-В87.

Стаття надійшла до редколегії 07.02.89

УДК 539.377

І.М.Махоркін, А.П.Сеник

РОЗВ"ЯЗОК НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ЙОГО НАГРІВАННІ НОРМАЛЬНО-РОЗПОДІЛЕНИМ ПОТОКОМ ЕНЕРГІЇ

Нехай маємо нелінійне рівняння теплопровідності

$$r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial r}\right]+r^{-2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right]\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right]=C_v(t)\frac{\partial t}{\partial\tau} \qquad /1/$$

і умови

$$\lambda(t)\frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r=b}=q\gamma(t_c)e^{-k[b^2\sin^2\varphi+z^2]}\cos\varphi\cdot S_+[\cos\varphi]\cdot S_+(\tau); \qquad /2/$$

$$\frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{|z|\to\infty}=t\big|_{|z|\to\infty}=0,\quad t\big|_{r=0}\neq\infty \qquad /3/$$

$$t\big|_{\tau=0}=0. \qquad /4/$$

Якщо під $\lambda(t)$, $C_v(t)$, $\gamma(t)$ розуміються температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності, об"ємної теплоємності та поглинання матеріалу відповідно; q – густини потужності потоку енергії на його осі; K – коефіцієнт зосередженості потоку; b – радіус граничної поверхні циліндричного тіла;

12-2498

$t_c(\tau) = t(r=b, z=0, \varphi=0)$ – температура поверхні тіла на осі теплового потоку;

$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – асиметрична одинична функція Хевісайда,

то крайова задача /1/–/4/ описує процес нагріву термочутливого /теплофізичні характеристики матеріалу залежать від температури/ довгого кругового циліндра концентрованим потоком енергії /зокрема, випромінюванням оптичного квантового генератора [5]/.

Відомо, що для широкого класу матеріалів та їх сплавів залежність коефіцієнтів теплопровідності та об"ємної теплоємності від температури мають однаковий характер [3], тобто

$$a = \lambda(t)/C_v(t) \approx const,$$

а значення коефіцієнта поглинання зростає з ростом температури [4].

У такому випадку:

1/ скориставшись апроксимацією температурних залежностей теплофізичних характеристик кусково-постійними функціями температури виду

$$p(t) = p_1 + \sum_{m=1}^{n} (p_{m+1} - p_m) S_+(t - t_m), \qquad 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m, \qquad /5/$$

де значення $p_m = const$ в інтервалі температур $t_{m-1} < t \leq t_m$ з заданою точністю відповідає значенню конкретної теплофізичної характеристики, t_m – вузли апроксимації;

2/ ввівши в розгляд змінну Кірхгофа

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t \lambda(x)\, dx, \qquad /6/$$

де λ_0 – опорне значення коефіцієнта теплопровідності, та взявши до уваги [2], що при $\frac{\partial f}{\partial \xi} > 0$

$$S_+[f(\xi)] = S_+(\xi - \xi_n), \qquad /7/$$

де ξ_n – корінь рівняння $f(\xi) = 0$, розв"язок крайової задачі /1/–/4/ зводиться до знаходження розв"язку такої задачі:

$$t(\vartheta) = \left\{\lambda_0 \vartheta + \sum_{m=1}^{M} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\, t_m\, S_+(\vartheta - \vartheta_m)\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{\lambda_1} + \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{\lambda_{m+1}} - \frac{1}{\lambda_m}\right) S_+(\vartheta - \vartheta_m)\right\}; \qquad /8/$$

$$r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v}{\partial r}\right]+r^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \tau}; \qquad /9/$$

$$\lambda_0\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=b}=q\Big[\gamma_1+\sum_{n=1}^{N-1}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)S_+(\tau-\tau_n)\Big]\times$$

$$\times\exp\left[-k(b^2\sin^2\varphi+z^2)\right]\cos\varphi\, S_+(\cos\varphi)S_+(\tau); \qquad /10/$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{|z|\to\infty}=v\Big|_{|z|\to\infty}=0, \quad v\Big|_{r=0}\neq\infty; \qquad /11/$$

$$v\big|_{\tau=0}=0, \qquad /12/$$

де $\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{N-1}<\tau_N$, $\tau_0=0$, $\tau_N=\infty$; τ_i $i=\overline{1,N-1}$ прості корені системи трансцедентних алгебраїчних рівнянь

$$v_c(\tau)-v_m=0, \quad m=\overline{1,M}, \quad N-1\leq M,$$

$$v_m=v(t_m), \quad v_c=v(t_c). \qquad /13/$$

Використавши інтегральні перетворення Фур"є по кутовій координаті φ і аксіальній координаті z, а також інтегральні перетворення Лапласа по часу τ [1], розв"язок крайової задачі /9/-/12/ знайдемо у вигляді

$$v=\frac{q}{\lambda_0\sqrt{\pi k}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon(j)a_j\gamma_n\cos j\varphi\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{\eta^2}{4k}\right)\cos\eta z\Big\{V_j(\eta)\times$$

$$\times\left[S_+(\tau-\tau_{n-1})-S_+(\tau-\tau_n)\right]+\sum_{p=0}^{\infty}u_{jp}\frac{\exp[-a\tau(\eta^2+\mu_{jp}^2)]}{\eta^2+\mu_{jp}^2}\times$$

$$\times\left[e^{a\tau_{n-1}(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau-\tau_{n-1})-e^{a\tau_n(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau-\tau_n)\right]\Big\}d\eta, \qquad /14/$$

де $\varepsilon(j)=\begin{cases}1, & j\geq 1\\ 0{,}5, & j=0;\end{cases}$

$$a_j=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-kb^2\sin^2\alpha}\cos\alpha\cos j\alpha\, d\alpha;$$

$$V_j(\eta)=\frac{I_j(\eta r)}{\frac{j}{b}I_j(\eta b)+\eta I_{j+1}(\eta b)}; \quad u_{jp}=\frac{2\mu_{jp}J_j(r\mu_{jp})}{(j^2/b\mu_{jp}-b\mu_{jp})J_j(b\mu_{jp})},$$

$I_j(x)$, $J_j(x)$ – функції Бесселя; μ_{jp} – додатні корені рівняння

$\frac{j}{b}J_j(b\mu_{jp})-\mu_{jp}J_{j+1}(b\mu_{jp})=0$; τ_n – прості корені системи рівнянь

$$\frac{q}{\sqrt{\pi k}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{i}\varepsilon(j)a_j\gamma_n\cos j\varphi\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{4k}\right)\cos\eta z\left\{V_j(\eta)\times\right.$$

$$\times\left[S_+(\tau_i-\tau_{n-1})-S_+(\tau_i-\tau_n)\right]+\sum_{p=1}^{\infty}u_{jp}\frac{\exp\left[-a\tau_i(\eta^2+\mu_{jp}^2)\right]}{\eta^2+\mu_{jp}^2}\times$$

$$\left.\times\left[e^{a\tau_{n-1}(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau_i-\tau_{n-1})-e^{a\tau_n(\eta^2+\mu_{jp}^2)}S_+(\tau_i-\tau_n)\right]\right\}d\eta=$$

$$=\lambda_1 t_1+\sum_{m=1}^{i}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(t_i-t_n)S_+(\tau_i-\tau_n);$$

$$i=1,\overline{M} \qquad /15/$$

$(N-1)$ – число простих коренів системи /15/.

1. Галицин А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. К., 1976. 2. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурні напруження від об"емних джерел. К., 1983. 3. Підстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., 1972. 4. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Смуров И.Ю. Расчет нелинейных задач лазерного нагрева металлов // Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы. М., 1985. 5. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Кокора А.Н. Лазерная обработка материалов. М., 1975.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.89

УДК 517.944:947

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко, Басьюні Халіль

ОДИН ВАР'АНТ ПОБУДОВИ ПОЧАТКОВОЇ ВИЛКИ ДЛЯ ЗАДАЧІ КОШІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Проблема початкової вилки є центральною в методі С.О.Чаплигіна інтегрування звичайних диференціальних рівнянь [1,2]. Нижче пропонується метод її побудови, заснований на використанні диференціальних рівнянь, близьких до вихідного у певному сенсі.

Нехай в обмеженій області $D\subset R^2$ потрібно знайти розв"язок задачі Коші

$$y'=f(x,y); \qquad /1/$$

$$y(x_0) = y_0 \neq 0 \qquad /2/$$

Будемо припускати, що задача /1/-/2/ має в D єдиний розв"язок.

Поряд із задачею /1/-/2/ розглянемо такі дві задачі Коші:

$$\tilde{y}' = k\tilde{y}, \quad k = \frac{f(x_0, y_0)}{y_0}, \qquad /3/$$

$$\tilde{y}(x_0) = y_0; \qquad /4/$$

$$\tilde{\tilde{y}}' = k\tilde{\tilde{y}} + Q\tilde{\tilde{y}}^n; \qquad /5/$$

$$\tilde{\tilde{y}}(x_0) = y_0, \qquad /6/$$

де стала Q визначається як розв"язок квадратного рівняння:

$$AQ^2 + BQ + C = 0,$$

$$A = ny_0^{2(n-1)},$$

$$B = k(n+1)\, y_0^{n-1},$$

$$C = k^2 + kf'_y(x_0, y_0) - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{y_0}. \qquad /7/$$

Показник степеня n вибирається із умови існування дійсного розв"язку рівняння /7/ /хоч би одного/. Розбіжність розв"язків задач /3/-/4/ та /5/-/6/ можна оцінити на основі звичайних міркувань. А саме, для їх різниці $z(x) = \tilde{\tilde{y}}(x) - \tilde{y}(x)$ маємо

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} e^{k(x-\xi)} Q\,[\tilde{\tilde{y}}(\xi)]^n\, d\xi. \qquad /8/$$

Із виразу /8/ маємо

$$\max_{|x-x_0| \le h} |z(x)| \le |Q| \cdot h e^{2|k|h} \max_{|x-x_0| \le h} |\tilde{\tilde{y}}(x)|^n,$$

де $\tilde{\tilde{y}}(x)$ може бути виписано явно на основі /5/-/6/.

Наявність розбіжності /"вилки"/ між $\tilde{y}(x)$ та $\tilde{\tilde{y}}(x)$ ставить питання про попадання розв"язку вихідної задачі /1/-/2/ в цю вилку. Відповідь на це питання дає відома теорема С.О.Чаплигіна про диференціальні нерівності [1,2], яка зводить його до перевірки нерівності

$$ky < f(x,y) < ky + Qy^n, \qquad /10/$$

якщо $Q>0$.

Якщо рівняння /7/ має два розв"язки $Q_1>0$ та $Q_2<0$, то початкову вилку для задачі /1/-/2/ можна будувати на основі таких задач:

$$\tilde{\tilde{y}}_i' = k\tilde{\tilde{y}}_i + Q_i \tilde{\tilde{y}}_i^n \quad (i=1;2); \qquad /11/$$

$$\tilde{\tilde{y}}(x_0) = y_0. \qquad /12/$$

При цьому можливість попадання шуканого розв"язку $y(x)$ у цю вилку встановлюється перевіркою виконання нерівності

$$ky + Q_2 y^n < f(x,y) < ky + Q_1 y^n. \qquad /13/$$

Із геометричних міркувань випливає, що вилка, утворена розв"язками задач Коші /11/-/12/, більш широка, ніж між розв"язками задач /3/-/4/ та /5/-/6/.

1. Л у з и н Н.Н. О методе приближенного интегрирования академика С.А.Чаплыгина //Тр. ЦАГИ. 1932. Вып. 141. С.1-32.
2. Ч а п л ы г и н С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.89

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІЧНО ЛОГІСТИЧНОГО РОЗПОДІЛУ

У праці [1, с.321-334] теоретично пояснено спадання інтенсивності відмов. Розподілом зі спадною інтенсивністю відмов є, наприклад, розподіл Парето [2]. Розглянемо деякі властивості одного розподілу, що залежно від параметра має або спадну інтенсивність відмов, або спершу зростаючу, а згодом спадну.

Означення. Випадкова змінна $L\Lambda(\sigma,\nu)$ називається логарифмічно логістичною, якщо її функція розподілу ймовірностей має вигляд

$$F(t)=P\{L\Lambda(\sigma,\nu)\le t\}=1-\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0), \qquad /1/$$

де σ - параметр масштабу; ν - параметр форми. Звідси густина розподілу ймовірностей

$$f(t)=F'(t)=\frac{\nu t^{\nu-1}}{\sigma^{\nu}\left[1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}\right]^{2}},\ t>0,\ (\sigma>0,\nu>0). \qquad /2/$$

Інтенсивність відмов. Якщо розподіл /1/ описує напрацювання технічної одиниці до відмови, то інтенсивність відмов

$$h(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{\nu t^{\nu-1}}{\sigma^{\nu}\left[1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}\right]},\ t>0,\ (\sigma>0,\nu>1). \qquad /3/$$

При $\nu\le 1$ інтенсивність відмов /3/ - спадна функція, а при $\nu>1$ має єдиний максимум у точці $t=\sigma(\nu-1)^{1/\nu}$. Максимальне значення інтенсивності відмов $\sigma^{-1}(\nu-1)^{1-\frac{1}{\nu}}$, $\nu>1$.

Середне напрацювання і тантиль. Сподіване напрацювання технічної одиниці до відмови

$$E\,L\Lambda(\sigma,\nu)=\int_0^{\infty}[1-F(t)]dt=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}}=\sigma\frac{\frac{\pi}{\nu}}{\sin\frac{\pi}{\nu}},\ (\sigma>0,\nu>1). \qquad /4/$$

Рівняння тантилів [3]

$$\int_0^{\tau_\omega}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}}=\omega\int_{\tau_\omega}^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\nu}},\quad (\nu>1,\ \omega>0),$$

набуває вигляду

$$\int_0^{\tau_\omega} \frac{dx}{1+x^\nu} = \frac{\frac{\pi}{\nu}}{\sin\frac{\pi}{\nu}} \cdot \frac{\omega}{1+\omega}, \quad (\nu>1,\ \omega>0). \qquad /5/$$

Зокрема, при $\nu=2$ дістаємо $\tau_\omega = \sigma\, tg\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\omega}{1+\omega}\right)$, і медіанний тантиль $\tau_1=\sigma$.

<u>Відбиття та моменти</u>. За означенням, відбиття випадкової змінної з густиною /2/

$$M(z) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t)dt = \sigma^{z-1}\,\Gamma\left(1+\frac{z-1}{\nu}\right)\Gamma\left(1-\frac{z-1}{\nu}\right) =$$

$$= \sigma^{z-1}\,\frac{\frac{\pi}{\nu}(z-1)}{\sin\left[\frac{\pi}{\nu}(z-1)\right]},\ 1-\nu < \operatorname{Re} z < 1+\nu,\ \nu>0. \qquad /6/$$

Звідси початковий момент m_j порядку j, якщо він існує

$$m_j = M(j+1) = \sigma^j\,\frac{\frac{\pi}{\nu}j}{\sin\left(\frac{\pi}{\nu}j\right)},\quad (j=1,2,\dots),\ j<\nu.$$

Отже, сподівання $EL\Lambda = m_1,\ \ \nu>1$; дисперсія $DL\Lambda(\sigma,\nu) = m_2 - m_1^2,\ \nu>2$; варіація

$$v = \frac{\sqrt{DL\Lambda(\sigma,\nu)}}{EL\Lambda(\sigma,\nu)} = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}\,tg\,\frac{\pi}{\nu} - 1},\quad \nu>2.$$

<u>Розщеплення на незалежні множники</u>. Оскільки випадковий імпульс $J(\sigma)$ в точці $\sigma>0$ має відбиття σ^{z-1}, випадкова змінна Гніденка-Вейбула $W(\sigma,\nu)$ з густиною

$$f(t) = \frac{\nu}{\sigma^\nu}\, t^{\nu-1} e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\nu},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0)$$

має відбиття

$$\int_0^\infty t^{z-1} f(t)dt = \sigma^{z-1}\,\Gamma\left(1+\frac{z-1}{\nu}\right),\ 1-\nu<\operatorname{Re} z,\ \nu>0,$$

а випадкова змінна найбільшого значення другого типу $M_2(\sigma,\nu)$ з густиною

$$f(t) = \frac{\nu\sigma^\nu}{t^{\nu+1}}\, e^{-\left(\frac{\sigma}{t}\right)^\nu},\ t>0,\ (\sigma>0,\ \nu>0)$$

має відбиття

$$\int_0^\infty t^{z-1} f(t)dt = \sigma^{z-1}\,\Gamma\left(1-\frac{z-1}{\nu}\right),\ \operatorname{Re} z<1+\nu,\ \nu>0,$$

то з виразу /6/ випливає, що логарифмічно логістична випадкова змінна розщеплюється на три незалежних множники

$$LA(\sigma,\nu) = J(\sigma)\cdot W(1,\nu)\cdot M_2(1,\nu). \qquad /7/$$

Оцінка параметрів. Нехай

$$t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_n - \qquad /8/$$

варіаційний ряд вибірки з популяції, що має функцію розподілу /I/. Потрібно оцінити невідомі параметри σ і ν .

Для точок /8/ знаходимо значення емпіричної функції розподілу за формулою

$$\hat{F}(t_j) = \frac{j-0,3}{n+0,4}, \qquad (j=1,\ldots,n).$$

З"єднуючи сусідні точки $(t_j, \hat{F}(t_j))$ відрізками, дістаємо графік емпіричної функції розподілу $\hat{F}(t),\ t_1 \le t \le t_n$. Оскільки при $t=\sigma$ значення функції розподілу /I/ дорівнює половині, то за оцінку $\hat{\sigma}$ параметра масштабу приймаємо емпіричну медіану. Тепер оцінку $\hat{\nu}$ параметра форми знаходимо як розв"язок рівняння

$$\hat{F}(t_j) = 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{t_j}{\hat{\sigma}}\right)^{\nu}},$$

тобто

$$\hat{\nu} = \frac{\ln\frac{j-0,3}{n+0,7-j}}{\ln\frac{t_j}{\hat{\sigma}}}, \quad t_j \ne \hat{\sigma}. \qquad /9/$$

Для прикладу розглянем вибірку

2836 4699 6348 8657 I0000 I24I2 I5753 2I282 35254 /I0/

з популяції /I/.

Як бачимо, медіана вибірки /I0/ обсягу $n=9$ дорівнює I0000. Отже, $\hat{\sigma}$ = I0000. Далі, наприклад, для j = 8, за формулою /9/

$$\hat{\nu} = \frac{\ln\frac{7,7}{1,7}}{\ln\frac{21282}{10000}} = 2.$$

Таким чином, залишається перевірити гіпотезу про те, що вибірка /I0/ взята з генеральної сукупності, керованої розподілом

$$F(t) = 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{t}{10000}\right)^2}, \quad t>0. \qquad /II/$$

Гіпотезу можна перевірити, наприклад, за допомогою критерію Андерсона-Дарлінга. Справді, за формулою $r_j = F(t_j),\ (j=1,\ldots,9)$, де t_j дані в /I0/, а F - виразом /II/, дістаємо

$r_1 = 0{,}0744416$ $r_2 = 0{,}180869$ $r_3 = 0{,}2872269$

$r_4 = 0{,}3936279$ $r_5 = 0{,}5$ $r_6 = 0{,}6063886$

$r_7 = 0{,}7127732$ $r_8 = 0{,}8191431$ $r_9 = 0{,}9255312$

Статистика Андерсона-Дарлінга

$$A^2 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\ln[r_i(1-r_{n+1-i})] - n$$

у нашому випадку набуває значення

$$A^2 = -\frac{1}{9}\cdot(-81{,}88457) - 9 = 0{,}098,$$

тобто менше, ніж критичне значення 2,492 на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Отже, гіпотеза про те, що вибірка /10/ одержана з популяції /11/, приймається. Для популяції з розподілом /11/ інтенсивність відмов зростає від нуля при $t=0$ до 10^{-4} при $t = 10000$, а згодом спадає до нуля.

1. Барлоу Б., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М., 1969. 2. Кві т І.Д., Косарчин В.М. Про деякі властивості розподілу Парето // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 32. С.68-70. 3. Квіт І.Д. Тантиль // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С.33-35.

Стаття надійшла до редколегії 19.12.89

ЗМІСТ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

ВЕСТНИК
ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия механико-математическая

Издается с 1965 г.

ВЫПУСК 34

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Львов. Издательство «Свит»
при Львовском госуниверситете
290000 Львов-центр, ул. Университетская, 1

Адрес редколлегии: 290000 Львов-центр,
ул. Университетская, 1
Университет,
кафедра дифференциальных уравнений

Львовская областная книжная типография
290000 Львов, ул. Стефаника, 11

(На украинском языке)

Художній редактор В. Д. Цейтін
Технічний редактор С. Д. Довба
Коректор М. Т. Ломеха

Н/К

Підп. до друку 06.04.90. БГ 04151. Формат $60\times84/_{16}$. Папір друк. № 3. Умовн. друк. арк. 5,81. Умовн. фарб.-відб. 6,04. Обл.-вид. арк. 5,89. Тираж 400 прим. Вид. № 2041. Зам. 2498. Ціна 1 крб. 20 к. Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня
290000 Львів, вул. Стефаника, 11.

1 крб. 20 к.

ISSN 0201—758X. 0320—6572.
Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1990, вип. 34, 1—100.