УДК 517.949:517.956

М.Д.Коркуна, А.М.Кузик, І.І.Чулик

ПАРАЛЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + q(x,t)\, u(x,t) = f(x,t) \qquad /1/$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_T \qquad /2/$$

де $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \alpha = 1,2,3\}$ Γ – границя області Ω, $Q_T = \Omega \times (0\,T)$, $S_T = \Gamma \times [0,T]$.

На відрізку $[0\ T]$ і в області $\overline{\Omega}$ введемо рівномірні сітки $\overline{\omega}_\tau$ і $\overline{\omega}_h$ відповідно [3]. На сітці $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, поклавши в основну локально-одновимірну модель методу сумарної апроксимації [2], побудуємо локально-одновимірну різницеву схему

$$\eta_\alpha \frac{y_\alpha^{j+1} - \bar{y}^{j}}{\tau} + \Lambda_{\alpha,j+1}\, y_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} T_1 T_2 T_3 f_\alpha(\cdot,t)\,dt, \qquad /3/$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \omega_h; \quad j = 0,1,\dots K-1, \quad \alpha = 1,2,3,$$

$$y_\alpha^0 = T_1\, T_2\, T_3\; u_0(\cdot), \quad \bar{y}^j = \sum_{\alpha=1}^{3} \eta_\alpha y_\alpha^j,$$

$$y_\alpha^j \big/_\gamma = 0, \quad j = 0,1,\dots,k, \qquad /4/$$

де $\sum_{\alpha=1}^{3}\eta_\alpha = 1$, $\sum_{\alpha=1}^{3} f_\alpha(x,t) = f(x,t)$, а оператори $\Lambda_{\alpha,j+1}$, $T_\alpha, \alpha = 1,2,3$ визначаються аналогічно операторам у праці [3].

Якщо $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, то при достатньо гладких коефіцієнтах $k_\alpha(x,t)$, $\alpha = 1, 2, 3$ $q(x,t)$ розв"язок задачі /3/, /4/ збігається до розв"язку задачі /I/, /2/ у негативній нормі зі швидкістю $O(r + |h|^2)$ [5], а при $t \le c|h|^2$ / c - константа/ - зі швидкістю $O(|h|)$ в нормі простору L_2 [4]. Таким чином, розв"язування задачі /I/, /2/ на кожному рівні $t = t_{j+1}$, $j = \overline{0, k-1}$ зводиться до розв"язування системи із трьох одновимірних рівнянь /3/, які розв"язуються паралельно, незалежно одне від одного /наприклад, рівняння /3/ з початковими та крайовими умовами /4/ можуть розв"язуватися паралельно на трьох макропроцесорах/. Ефект від розпаралелення підсилюється, якщо на кожному рівні t_{j+1} різницеві рівняння другого порядку /3/ розв"язувати, використовуючи паралельний алгоритм прогонки [1]: приймаючи послідовно $\alpha = 1, 2, 3$ і застосовуючи паралельний алгоритм прогонки, визначаємо y_1^{j+1}, y_2^{j+1}, y_3^{j+1} і тим самим отримуємо розв"язок на $j + 1$ рівні $\bar{y}^{j+1} = \sum_{\alpha=1}^{3} \eta_\alpha y_\alpha^{j+1}$.

Якщо взяти до уваги, що на кожному $j + 1$ рівні підготовка вхідних даних для задачі /3/, /4/ /коефіцієнти і права частина/ не вимагає значних обчислювальних затрат, а значить, і паралельний алгоритм по їх реалізації суттєво на висоту і ширину основного алгоритму не впливає, то граф /вершинам якого зіставлені базові операції: додавання, віднімання, множення і ділення/ паралельного алгоритму розв"язування задачі /I/, /2/ /тобто обчислення всіх $\bar{y}^j$, $j = \overline{1, k}$ має висоту $O(k \log_2 h)$ і ширину $O(h)$, де

$$h = \max_{1 \le \alpha \le 3} \{ l_\alpha / h_\alpha \}.$$

I. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. М., 1986. 2. Гордезиани Д.Г., Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации // Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С.178-186. 3. Коркуна М.Д., Кузик А.М., Чулик І.І. Дослідження швидкості збіжності методу сумарної апроксимації в класі $W_2^{1,0}(Q_T)$ // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 33. С.37-39. 4. Кузик А.М. Про швидкість збіжності локально-одновимірної різницевої схеми у випадку узагальнених розв"язків // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип. 27. С.57-60. 5. Макаров В.Л., Кузик А.М. Сходимость метода суммарной аппроксимации для обобщенных решений. Львов. 1984. 34 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2096Ук-Д84.

Стаття надійшла до редколегії 11.10.90