УДК 518:517.9

М.В.Жук

ВАРІАНТИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У ВИПАДКУ ОБЛАСТІ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Розглянемо рівняння

$$Lu \equiv -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+p(x_1,x_2)u=f(x_1,x_2),\quad p_{ij}=p_{ji}\ , \qquad /1/$$

при однорідній крайовій умові задачі Діріхле

$$u/_{\Gamma}=0, \qquad /2/$$

де Γ – межа області D, що складається з двох концентричних кіл.

Оператор L розглядаємо в просторі $H=L_2(D)$ з нормою $\|u\|^2=\iint\limits_D u^2(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$.

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x_1,x_2)$ в області $\bar{D}=D+\Gamma$, які задовольняють умову /2/.

Зважаємо, що оператор L в області $\bar{D}$ задовольняє умову рівномірної еліптичності

$$\mu_1(\xi_1^2+\xi_2^2)\le\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}(x_1,x_2)\xi_i\xi_j\le\eta_1(\xi_1^2+\xi_2^2), \qquad /3/$$

де $\mu_1,\eta_1=\mathrm{const}>0$; ξ_1, ξ_2 – довільні дійсні числа.

Крім того припускаємо, що функція $p(x_1,x_2)$ обмежена, тобто $\alpha\le p(x_1,x_2)\le\beta$, і при цьому виконується умова $\mu>0$, де

$$\mu=\begin{cases}\mu_1, & \text{якщо } \alpha\ge 0,\\ \mu_1+\alpha\varkappa, & \text{якщо } \alpha\le 0.\end{cases} \qquad /4/$$

У співвідношенні /4/ $\varkappa$ – постійна нерівності Фрідріхса [3].

Введемо простір H_0 функцій $u(x_1,x_2)$, які мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом і які задовольняють умову /2/, з нормою

$$|u|_0^2=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]dx_1\,dx_2. \qquad /5/$$

Відзначимо, що H_0 є енергетичним простором допоміжного додатно визначеного оператора. При цьому

$$\|u\| \le \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} |u|_0$$

для довільного $u \in H_0$ [3].

Для довільних $u, v \in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v) = \iint_D \Big[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + p(x_1,x_2)uv\Big]dx_1\,dx_2 . \qquad /6/$$

Виходячи з /3/ і /4/, для довільного $u \in H_0$ отримуємо

$$\mu|u|_0^2 \le L(u,v) \le \eta|u|_0^2 , \qquad /7/$$

де

$$\eta = \begin{cases} \eta_1 + \beta\varkappa & \text{, якщо } \beta \ge 0, \\ \eta_1 & \text{, якщо } \beta \le 0. \end{cases}$$

Узагальненим розв"язком задачі /I/-/2/ називається функція $u \in H_0$, для якої виконується тотожність

$$L(u,v) = \iint_D f v\, dx_1 , dx_2 \qquad /8/$$

при довільній функції $v \in H_0$.

Перейдемо до полярної системи координат ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$), у якій межа області D описується колами радіусів $\rho = \rho_0$ і $\rho = \rho_1$, тобто область D перетворюється в область

$$D_1 : \begin{Bmatrix} \rho_0 \le \rho \le \rho_1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{Bmatrix} .$$

Задача /I/-/2/ у полярній системі координат має вигляд

$$Lu \equiv -\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i'}\Big(p_{ij}'\frac{\partial u}{\partial x_j'}\Big) + pu = f , \qquad /9/$$

$$p_{ij}' = \rho\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} p_{rs}\frac{\partial x_i'}{\partial x_r}\frac{\partial x_j'}{\partial x_s} , \quad \rho = x_1' , \quad \theta = x_2' ,$$

$$u(\rho,\theta)/_{\rho=\rho_0} = u(\rho,\theta)/_{\rho=\rho_1} = 0 ; \qquad /10/$$

$$u(\rho,0) = u(\rho,2\pi). \qquad /11/$$

Припустимо тепер, що лінійно незалежна система функцій $\{\chi_\ell(\theta)\varphi_k(\rho)\}$, де функції $\chi_\ell(\theta)$ задовольняють умову $\chi_\ell(0)=\chi_\ell(2\pi)$, а функції $\varphi_k(\rho)$ умови /10/, буде повною в просторі H_0.

Тоді наближений розв"язок задачі /9/-/11/ згідно з методом Канторовича шукаємо в одному з виглядів

$$u_n^1 = \sum_{k=1}^{n} c_k(\theta)\varphi_k(\rho); \qquad /12/$$

$$u_n^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k(\rho)\chi_k(\theta). \qquad /13/$$

У випадку /12/ невідомі коефіцієнти $c_k(\theta)$ визначаються із системи

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho(Lu_n^1 - f)\varphi_i(\rho)\,d\rho = 0, \quad i = 1,2,\dots,n \qquad /14/$$

при умові

$$c_k(\theta)\Big|_{\theta=0} = c_k(\theta)\Big|_{\theta=2\pi}, \quad k = 1,2,\dots,n. \qquad /15/$$

У випадку /13/ шукані коефіцієнти визначаються із системи

$$\int_0^{2\pi} (Lu_n^2 - f)\chi_i(\theta)\,d\theta = 0, \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad /16/$$

при умові

$$c_k(\rho)\Big|_{\rho=\rho_0} = c_k(\rho)\Big|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad k = 1,2,\dots,n \qquad /17/$$

Позначимо через $H_n^1 \subset H_0$ простір функцій вигляду $u_n^1(\rho,\theta) = \sum a_k(\theta)\varphi_k(\rho)$, а через $H_n^2 \subset H_0$ простір функцій вигляду $u_n^2(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{n} b_k(\rho)\chi_k(\theta)$, які задовольняють умови /10/ і /11/.

Нехай для деякої функції $u_n^i(\rho,\theta) \in H_n^i$ /i = 1,2/ справедлива тотожність

$$L(u_n^i, v_n^i) = \iint_{D_1} \rho f v_n^i\, d\rho\, d\theta,$$

в якій $v_n^i(\rho,\theta)$ - довільна функція з H_n^i.

Тоді функція $u_n^i(\rho,\theta)$ при i = 1 називається узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /14/-/15/, а при i = 2 - узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /16/-/17/.

Аналогічно праці [2] доводиться наступна теорема.

Теорема. При умовах, що накладаються на вихідні дані, при довільній функції $f \in H$ задача /1/–/2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u \in H_0$; при довільному n системи методу Канторовича /I4/–/I5/ і /I6/–/I7/ мають єдиний узагальнений розв"язок $u_n^i \in H_n^i$, $i = 1,2$ відповідно; метод Канторовича збігається, а швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u - u_n^i|_0 \leq C\, |u - V_n^i|_0 ,$$

де $C = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$, а елемент $V_n^i \in H_n^i$ вибираємо таким, що реалізує мінімум функціоналу $|u - V_n^i|_0$.

Зауважимо, що повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0 будуть системи

$$\left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \, l\theta \sin \frac{k\pi(\rho - \rho_1)}{\rho_1 - \rho_0} \right\}, \quad l, k = 0, 1, 2, \ldots$$

При цьому, якщо для узагальненого розв"язку задачі перші похідні неперервні та існують сумовані з квадратом другі похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}$, то

$$|u - u_n|_0 = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

якщо наближений розв"язок по методу Канторовича шукаємо у вигляді

$$u_n(\rho\, \theta) = \sum_{k=1}^{n} c_k(\theta) \frac{\sin k\pi(\rho - \rho_0)}{\rho_1 - \rho_0} .$$

У випадку, якщо наближений розв"язок за методом Канторовича шукаємо у вигляді

$$u_{2n+1}(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{n} c_k^1(\rho) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{n} c_k^2(\rho) \sin k\theta,$$

то за умови неперервності перших похідних узагальненого розв"язку задачі та існування сумованих з квадратом других похідних $\frac{\partial u}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}$ отримуємо оцінку

$$|u - u_{2n+1}|_0 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Накладаючи умови на похідні більш високого порядку, можна отримати більш високий порядок мализни [1].

1. К а н т о р о в и ч Л.В., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1962. 2. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных

дифференциальных уравнений эллиптического типа /Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. 3. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 09.10.90

УДК 517.648:519.68

П.С.Сеньо, П.С.Венгерський

ІНТЕРВАЛЬНИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ, ЯКИЙ НЕ МІСТИТЬ ІНВЕРСІЙ ІНТЕРВАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

У статті [2] нами запропонована методика побудови ефективних інтервальних ітераційних процесів високих порядків збіжності. Зокрема, там отримано метод

$$V^{(n+1)} = x^{(n)} - \left[1/4\, f'(x^{(n)}) + 3/4\, f'\left(x^{(n)} + 2/3\,(X^{(n)} - x^{(n)})\right)\right]^{-1} f(x^{(n)}), \qquad /1/$$

$$X^{(n+1)} = V^{(n+1)} \cap X^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad /2/$$

і досліджено його збіжність. У цій праці розглядається модифікація згідно з ідеєю Кравчика [3] методу /1/-/2/, яка не містить операції обертання інтервальних матриць:

$$K(X^{(k)}) = x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + \left(I - C^{(k)} F'(X^{(k)})\right)\left(X^{(k)} - x^{(k)}\right), \qquad /3/$$

$$X^{(k+1)} = K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad /4/$$

де $X^{(0)}$ – деякий початковий інтервал;

$C^{(k)}$ – приблизна інверсія центру матриці $F'(X^{(k)})$;

I – одинична матриця, $x^{(k)} = m(X^{(k)})$,

$$F'(X^{(k)}) = 1/4\, f'(x^{(k)}) + 3/4\, f'\left(x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} - x^{(k)})\right).$$

Як буде показано нижче, метод /3/-/4/ знаходить усі дійсні корені системи нелінійних рівнянь у заданому інтервалі