дифференциальных уравнений эллиптического типа /Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975. 3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 09.10.90

УДК 517.648:519.68

П.С.Сеньо, П.С.Венгерський

ІНТЕРВАЛЬНИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ, ЯКИЙ НЕ МІСТИТЬ ІНВЕРСІЙ ІНТЕРВАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

У статті [2] нами запропонована методика побудови ефективних інтервальних ітераційних процесів високих порядків збіжності. Зокрема, там отримано метод

$$V^{(n+1)} = x^{(n)} - \left[1/4\, f'(x^{(n)}) + 3/4\, f'\left(x^{(n)} + 2/3\,(X^{(n)} - x^{(n)})\right)\right]^{-1} f(x)^{(n)}; \qquad /1/$$

$$X^{(n+1)} = V^{(n+1)} \cap X^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad /2/$$

і досліджено його збіжність. У цій праці розглядається модифікація згідно з ідеєю Кравчика [3] методу /1/-/2/, яка не містить операції обертання інтервальних матриць:

$$K(X^{(k)}) = x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + \left(I - C^{(k)} F'(X^{(k)})\right)\left(X^{(k)} - x^{(k)}\right), \qquad /3/$$

$$X^{(k+1)} = K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, \qquad /4/$$

де $X^{(0)}$ – деякий початковий інтервал;

$C^{(k)}$ – приблизна інверсія центру матриці $F'(X^{(k)})$;

I – одинична матриця, $x^{(k)} = m(X^{(k)})$,

$$F'(X^{(k)}) = 1/4\, f'(x^{(k)}) + 3/4\, f'\left(x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} - x^{(k)})\right).$$

Як буде показано нижче, метод /3/-/4/ знаходить усі дійсні корені системи нелінійних рівнянь у заданому інтервалі

Два підходи до означення дій над інтервалами.

Нехай $I(R)$ – множина всіх замкнених дійсних інтервалів. Операції над елементами з $I(R)$ згідно з [1] визначаються таким чином.

Означення 1.

Якщо $*$ – бінарна операція на множині дійсних чисел; X, $Y \in I(R)$, тоді

$$X * Y = \{z = x * y \mid x \in X,\ y \in Y\} \qquad /5/$$

визначає бінарну операцію з $I(R)$.

Поряд з визначеними вище операціями /5/ для проведення інтервальних обчислень будемо використовувати поточкові операції з відповідними точками з вихідних інтервалів, тобто в $I(R)$ проводитимемо такі операції.

Означення 2.

Нехай $X, Y \in I(R)$, тоді

$$X \circledast Y = \{z \mid z = x * y,\ x = x(t),\ y = y(t), \forall x \in X, \forall y \in Y\} \qquad /6/$$

Наприклад, так можна визначити розклад в ряд Тейлора функції G на інтервалі Z:

$$G(Z) = \{G(z) \mid G(z) = G(m(Z)) + G'(m(Z))(z - m(Z)) + \frac{1}{2!} \times G''(m(Z))(z - m(Z))^2 + \ldots + \frac{1}{(i+1)!} G^{(i+1)}(m(Z))(z - m(Z))^{i+1} + \frac{1}{(i+2)!} G^{(i+2)}(m(Z) + \theta^{\circ}_{i+2}(z - m(Z)))(z - m(Z))^{i+2};\ z \in Z,\ \theta^{\circ}_{i+2} \in (0,1)\}.$$

Очевидно, що при визначенні операцій над інтервалами згідно з /6/ має місце властивість дистрибутивності.

Оцінка збіжності методу.

Сформулюємо теорему.

Теорема.

Нехай відображення $f: D \subset R^n \to R^n$ двічі неперервно диференційоване за Фреше на $X^{(0)} \subset D$; x^* – нуль $f(x)$ в $X^{(0)}$. Тоді послідовність інтервалів $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, обчислена за формулами /3/-/4/, задовольняє такі співвідношення:

1/ $x^* \in K(X^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$ де $X^{(k)} \supseteq [x^{(k)}, x^{(k)} + \frac{3}{2}(x^* - x^{(k)})]$; /7/

2/ якщо для відображення $f(x)$ виконується умова

$$\|I-C(X^{(0)})F'(X^{(0)})\| < 1, \qquad \text{де} \quad C(X^{(0)}) = (F'(X^{(0)}))^{-1}, \qquad /8/$$

тоді $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = x^*$;

3/ якщо, крім I/ і 2/, $f(x)$ тричі неперервно диференційована за Фреше, тоді має місце нерівність

$$\omega(X^{(k+1)}) \le c\left(\omega(X^{(k)})\right)^3, \quad c \ge 0, \qquad /9/$$

тобто

$$O_R\,(X^{(k)},\, x^*) \ge 3. \qquad /9'/$$

<u>Доведення.</u> 1/ Згідно з теоремою Тейлора

$$f(x^*) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^*-x^{(k)}) + \frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)} + \theta_2^0\,(x^*-x^{(k)})\right)(x^*-x^{(k)})^2.$$

Із /7/ отримаємо

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^*-x^{(k)}) + \frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)} + \theta_2^0\,(x^*-x^{(k)})\right)(x^*-x^{(k)})^2 \subseteq$$
$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^*-x^{(k)}) + \frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\theta_1^1]\,(X^{(k)}-x^{(k)})\right)(x^*-x^{(k)})^2. \qquad /10/$$

Згідно з /10/ маємо

$$x^*-x^{(k)}-C^{(k)}\left(f(x^*)-f(x^{(k)})\right) \subseteq x^*-x^{(k)}-C^{(k)}\Big(f'(x^{(k)})(x^*-x^{(k)}) +$$
$$+\frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1]\,(X^{(k)}-x^{(k)})\right)(x^*-x^{(k)})^2 = x^*-x^{(k)}-C^{(k)}\Big(f'(x^{(k)}) +$$
$$+\frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(k)}-x^{(k)})\right)(x^*-x^{(k)})\Big)\,(x^*-x^{(k)}).$$

Скориставшись монотонністю інтервальних операцій, отримаємо

$$x^*-x^{(k)}-C^{(k)}\Big(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(k)}-x^{(k)})\right)(x^*-x^{(k)})\Big) \times$$
$$\times(x^*-x^{(k)}) = \Big(I-\big(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1]\,(X^{(k)}-x^{(k)})\right)(X^{(k)}-x^{(k)})\Big)\times$$
$$\times(x^*-x^{(k)}) \subset \Big(I-\big(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''\left(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(k)}-x^{(k)})\right)(X^{(k)}-x^{(k)})\Big)\times$$
$$(X^{(k)}-x^{(k)}).$$

З умови теореми $f(x^*) = 0$. Тому

$$x^* \in x^{(k)}-C^{(k)}f(x^{(k)}) + \Big(I-C^{(k)}\big(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''\big(x^{(k)}+$$
$$+\frac{2}{3}[\theta_1^1]\,(X^{(k)}-x^{(k)})\big)\big)\,(X^{(k)}-x^{(k)})\Big)\,(X^{(k)}-x^{(k)}).$$

Згідно з /6/ маємо

$$x^{(k)}-C^{(k)}f(x^{(k)}) + \Big(I-C^{(k)}\big(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''\big(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1]\,\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)})\big)(X^{(k)}-x^{(k)})\big)\Big)(X^{(k)}-x^{(k)}) = x^{(k)}-C^{(k)}f(x^{(k)}) + \Big(I-C^{(k)}\big(1/4\,f'(x^{(k)})+$$
$$+3/4\,f'\big(x^{(k)}+\frac{2}{3}(X^{(k)}-x^{(k)})\big)\big)\Big)\,(X^{(k)}-x^{(k)}) = K(X^{(k)}). \qquad /11/$$

Далі методом математичної індукції доводимо, що $x^* \in K(X^{(k)})$ для всіх k, де $k = 0, 1, 2, \dots$

2/: З побудови методу /3/–/4/ випливає, що

$$\omega(X^{(k+1)}) \leqslant \omega\left(X^{(k)} \cap K(X^{(k)})\right) \leqslant \omega\left(K(X^{(k)})\right). \qquad /12/$$

Далі маємо

$$\omega\left(K(X^{(k)})\right) = \omega\left(\left(I - C^{(k)} F'(x^{(k)})\right)(X^{(k)} - x^{(k)})\right) =$$

$$= \omega\left(\left(I - (m(F'(X^{(k)})))^{-1} F'(X^{(k)})\right)(X^{(k)} - x^{(k)})\right). \qquad /13/$$

З того, що $0 \in (X^{(k)} - x^{(k)})$, отримаємо

$$\omega\left(\left(I - C^{(k)} F'(X^{(k)})\right)(X^{(k)} - x^{(k)})\right) \leqslant \left|I - C^{(k)} F'(X^{(k)})\right| \omega(X^{(k)}) \leqslant$$

$$\left|I - C^{(k)} F'(X^{(0)})\right| \omega(X^{(k)}) \leqslant \left|I - C(X^{(k)}) F'(X^{(k)})\right| \omega(X^{(k)}).$$

Враховуючи співвідношення теореми 3.І з [2], маємо

$$\left|I - C(X^{(k)}) F'(X^{(0)})\right| \leqslant \left|I - C(X^{(0)}) F'(X^{(0)})\right|, \qquad /14/$$

оскільки $X^{(k)} \subseteq X^{(k-1)} \subseteq X^{(k-2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(0)}$ і $C(X^{(k)}) \subseteq$ $\subseteq C(X^{(k-1)}) \subseteq C(X^{(k-2)}) \subseteq \dots \subseteq C(X^{(0)})$.

З виразів /7/, /12/–/14/ отримаємо

$\omega(X^{(k+1)}) \leqslant \alpha\, \omega(X^{(k)})$, де $\alpha < 1$.

Звідси випливає, що $\omega(X^{(k)}) \to 0$. Згідно з /11/ маємо $x^* \in X^{(k)} = K(X^{(k-1)}) \cap X^{(k-1)}$, тому $\lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)} = x^*$.

Залишається встановити /9/ або /9'/. З побудови методу /3/–/4/ одержуємо

$$K(X^{(k)}) = x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + \left(I - C^{(k)} F'(X^{(k)})\right)(X^{(k)} - x^{(k)}) =$$

$$= x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + \left(I - C^{(k)}\left(\tfrac{1}{4} f'(x^{(k)}) + \tfrac{3}{4} f'\left(x^{(k)} + \tfrac{2}{3} \times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times (X^{(k)} - x^{(k)})\right)\right)\right)(X^{(k)} - x^{(k)}) = x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + \left(I - C^{(k)}\left(f'(x^{(k)}) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \tfrac{1}{2!} f''\left(x^{(k)} + \tfrac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(k)} - x^{(k)})\right)(X^{(k)} - x^{(k)})\right)\right)(X^{(k)} - x^{(k)}).$$

Зауважимо, що вище ми використали розклад Тейлора функції $f'\left(x^{(k)} + \frac{2}{3}(X^{(k)} - x^{(k)})\right)$:

$$f'\left(x^{(k)} + \tfrac{2}{3}(X^{(k)} - x^{(k)})\right) = f'(x^{(k)}) + \tfrac{2}{3} f''\left(x^{(k)} + \tfrac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(k)} - x^{(k)})\right)(X^{(k)} - x^{(k)}),$$

який має місце згідно з означенням 2.

Тоді для оцінки ширини інтервалу $X^{(k+1)}$ отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\omega(X^{(k+1)}) = \omega\,(K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}) \le \omega\,(K(X^{(k)})) = \\
&= \omega\Big(x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + (I - C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\Theta_1^1] \times \\
&\times (X^{(k)} - x^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)})\Big) = \omega\Big(x^{(k)} + C^{(k)}(f(x^*) - \\
&- f(x^{(k)})) + (I - C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\Theta_1^1]\,(X^{(k)} - x^{(k)})) \times \\
&\times (X^{(k)} - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)})\Big) = \omega\Big(x^{(k)} + C^{(k)}(f'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) + \\
&+ \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \Theta_2^0\,(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)})^2) + (I - C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \\
&+ \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\Theta_1^1]\,(X^{(k)} - x^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)})\Big) = \\
&= \omega\Big(x^{(k)} + C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \Theta_2^0\,(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)})) \times \\
&\times (x^* - x^{(k)}) + (I - C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\Theta_1^1]\,(X^{(k)} - x^{(k)})) \times \\
&\times (X^{(k)} - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)})\Big) = \omega\Big(x^{(k)} - x^* + C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \\
&+ \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \Theta_2^0\,(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)}) + (I - C^{(k)} \times \\
&\times (f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\Theta_1^1]\,(X^{(k)} - x^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)})\Big) = \\
&= \omega\Big((-I + C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \Theta_2^0\,(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)}))) \times \\
&\times (x^* - x^{(k)}) + (I - C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\Theta_1^1]\,(X^{(k)} - x^{(k)})) \times \\
&\times (X^{(k)} - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)})\Big) \le \omega\Big((-I + C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \\
&+ \Theta_2^0\,(x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)}) + (I - C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \\
&+ \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\Theta_1^1]\,(X^{(k)} - x^{(k)})))(X^{(k)} - x^{(k)})\Big).
\end{aligned}
$$

Оскільки $\left(-I + C^{(k)}\left(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \theta_2^\circ\ (x^* - x^{(k)})\right)(x^* - x^{(k)})\right)\right)$ і $\left(I - C^{(k)}\left(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\theta_1^!](X^{(k)} - x^{(k)})\right)(X^{(k)} - x^{(k)})\right)\right)$ симетричні матриці, тоді, скориставшись дистрибутивністю, запишемо

$$\omega\Big(\big(-I + C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \theta_2^\circ (x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)}))\big)(X^{(k)} - x^{(k)}) +$$

$$+ \big(I - C^{(k)}(f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\theta_1^!](X^{(k)} - x^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)}))\big) \times$$

$$\times (X^{(k)} - x^{(k)}) = \omega\Big(\frac{1}{2!} C^{(k)}\big(f''(x^{(k)} + \theta_2^\circ (x^* - x^{(k)}))(x^* - x^{(k)}) -$$

$$\times f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\theta_1^!](X^{(k)} - x^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)})(X^{(k)} - x^{(k)})\big) \leqslant \omega\Big(\frac{1}{2!} C^{(k)} \times$$

$$\times \big(f''(x^{(k)} + \theta_2^\circ (X^{(k)} - x^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)}) - f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\theta_1^!](X^{(k)} - x^{(k)})) \times$$

$$\times (X^{(k)} - x^{(k)})\big)(X^{(k)} - x^{(k)})\Big) = \frac{1}{2!}|C^{(k)}|\,\omega\Big(\big(f''(x^{(k)} + \theta_2^\circ (X^{(k)} - x^{(k)})) -$$

$$- f''(x^{(k)} + \frac{2}{3}[\theta_1^!](X^{(k)} - x^{(k)}))\big)(X^{(k)} - x^{(k)})^2\Big) \leqslant |C(X^{(0)})|\,|\theta_2^\circ - \frac{2}{3}[\theta_1^!]| \times$$

$$\times |f'''(X^{(k)})|\,\omega(X^{(k)} - x^{(k)})(\omega(X^{(k)}))^2 \leqslant |C(X^{(0)})|\,|f'''(X^{(k)})| \times$$

$$\times (\omega(X^{(k)}))^3 \leqslant |C(X^{(0)})|\,|f'''(X^{(0)})|\,(\omega(X^{(k)}))^3.$$

Таким чином, маємо /9/ /або /9'/, де в ролі C можна вибрати матрицю $|C(X^{(0)}) f'''(X^{(0)})|$.

<u>Наслідок.</u> Нехай відображення $f : D \subset R^n \to R^n$ чотири рази неперервно диференційоване за Фреше на $X^{(0)} \subset D$, або його третя похідна належить до класу ліпшицевих функцій. Тоді послідовність інтервалів $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, обчислена за формулами /3/-/4/, задовольняє співвідношення /1/ -2/ теореми і має порядок збіжності не нижче чотирьох.

Доведення наслідку проводиться аналогічно наслідку і теоремі 2 з [2].

Якщо ж третя похідна за Фреше відображення f задовольняє умову Гьольдера з параметром $\alpha (0<\alpha\leqslant 1)$, тоді послідовність інтервалів $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, обчислена за формулами /3/-/4/, задовольняє співвідношення /1/ - 2/ теореми і має порядок збіжності не нижче $3 + \alpha$.

I. Алефельд И., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М., 1987. 2. Венгерский П.С., Сеньо П.С. Интервальный метод решения систем нелинейных уравнений, базирующийся на предельных теоремах о среднем. Львов. 1990. 23 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ. 3. Krawczyk R. Intervalliterationsverfahren. Ber. Math.// Statist. Sek. Forshungzent. Graz, 1982. Vol. 185-189. S. 1-49.

Стаття надійшла до редколегії 23.10.90

УДК 681.03

В.С.Костирко, О.В.Костів

ДО ПИТАННЯ ПРО УКРАЇНІЗАЦІЮ ПЕРСОНАЛЬНИХ КОМП"ЮТЕРІВ

Широке впровадження української мови у всі сфери життя на Україні /особливо в навчальний процес, науку, діловодство/ та прискорена комп"ютеризація різноманітних галузей роблять актуальною проблему реалізації в комп"ютерах українського алфавіту /українізації комп"ютерів/.

У зв"язку з цим необхідно:

- розробити внутрішнє кодування українських букв у комп"ютері;
- українізувати клавіатуру пристроїв вводу і підготовки даних так, щоб при натисненні на клавіші з українськими буквами генерувалися відповідні внутрішні коди;
- українізувати пристрої виводу /дисплей, принтер/, щоб при передачі на них кодів українських букв генерувалися відповідні зображення.

Через велику різноманітність типів комп"ютерів не може бути єдиного підходу до розв"язання цих задач. Тому, з огляду на домінуюче використання в Україні персональних комп"ютерів типу IBM PC і сумісних з ними, в даному дослідженні будемо розглядати лише ці комп"ютери. Всі символи в IBM PC кодуються згідно з таблицею ASCII - числами від 0 до 255, причому латинські, службові і розділові символи кодуються від 0 до 127 /перша половина таблиці/. Друга половина ASCII -таблиці /коди від 128 до 255/ виділена для розміщення букв національних алфавітів, псевдографічних, математичних та інших спеціальних символів.